北京市十一学校2023~2024学年第1学段 常规初二年级 初中数学II课程

教与学诊断（2023.11）

总分：100分　　时间：120分钟　　命题人：刘海东　赵永恒

注意：请在答题纸的指定区域上作答，在本试卷上的答案一律不计入成绩.

一、选择题（每小题2分，本题共16分）第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 生物学家发现了一种病毒，其长度约为$0.00000032mm$，用科学记数法表示正确的是

A．3.2×10^{-10}　　B．3.2×10^{-8}　　C．3.2×10^{-7}　　D．3.2×10^{-9}

2. 下列计算正确的共有（　　）个

① $a^{12}-a^{6}=a^{6}$　　② $x^2y^3\cdot x^4y=x^8y^3$　　③ $a^3b^3=(ab)^3$

④ $(-3a^3)^2\div(-a^8)=9a^{-2}$　　⑤ $(2x+3)^2=4x^2+9$　　⑥ $\dfrac{3-x}{x^2-9}=-\dfrac{1}{x+3}$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3.化简 $(m-1)\sqrt{-\dfrac{1}{m-1}}$ 的结果是

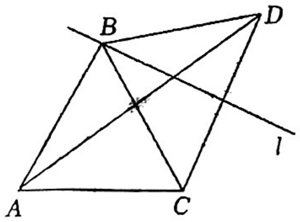
A．$\sqrt{1-m}$　　B．$-\sqrt{1-m}$　　C．$\sqrt{m-1}$　　D．$-\sqrt{m-1}$

4．已知：$\sqrt{x+y-3}=-(x-2y)^2$，可求得x^{-y}的值为

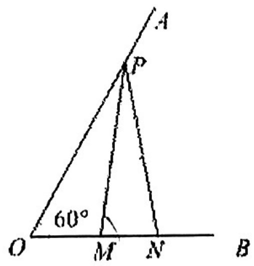
A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．2　　D．-2

5．如图，$\triangle ABC$是等边三角形，直线l过顶点B，作点C关于直线l的对称点D，连接BD，AD，CD，若$\angle BAD=25°$，则$\angle BCD$的度数为

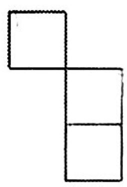
A．50°　　B．55°　　C．60°　　D．65°



第5题图



第6题图



第8题图

6. 如图，已知 $\angle AOB=60°$，点 P 在边 OA 上，$OP=5cm$，点 M，N 在边 OB 上，$PM=PN$，若 $MN=2cm$，则 OM 的长为

A．$2cm$　　　　B．$2.5cm$　　　　C．$1.5cm$　　　　D．$3cm$

7.若 $x^2-x-1=0$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 的值是

A．3　　　　B．2　　　　C．1　　　　D．4

8.如图是由三个面积相等的小正方形组成的图形，请你再补画一个小正方形，使补画后的图形成为轴对称图形，一共有（　　）种不同的补画方法?

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

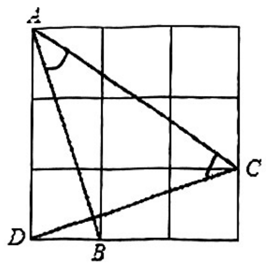
二、填空题（每小题 2 分，本题共 16 分）

9. 如图正方形网格，点 A，B，C，D 均落在格点上，则 $\angle BAC+\angle ACD=$____°.

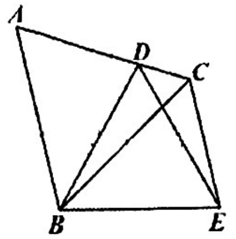
10. 若关于 x 的分式方程 $\dfrac{a}{x}=b$ 的解为 $\dfrac{1}{a+b}$，我们就说这个方程是和解方程．比如：$\dfrac{2}{x}=-4$ 就是一个和解方程．如果关于 x 的分式方程 $\dfrac{n}{x}=3-n$ 是一个和解方程，则 $n=$____.

11. 关于 x 的方程 $1-\dfrac{2x+2a-2}{x^2-1}=\dfrac{x+a}{x-1}$ 无解，则 a 的值为________________.

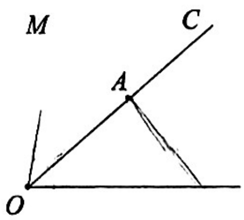
12. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 为 AC 边上一点，以 BD 为边作等边$\triangle BDE$，连接 CE．若 $CD=1$，$CE=3$，则 $BC=$____________.



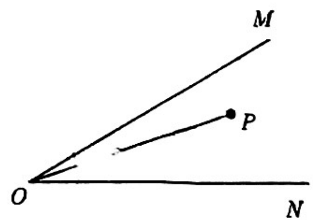
第 9 题图



第 12 题图



第 13 题图

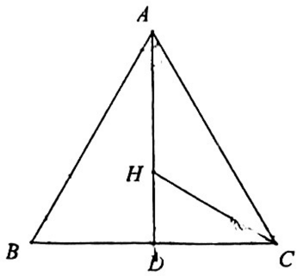


第 14 题图

13. 如图，$\angle MON=80°$，OC 平分 $\angle MON$，点 A 在射线 OC 上，若射线 ON 上有点 B，使 $\triangle OAB$ 是等腰三角形，那么 $\angle OBA$ 的度数为________________________.

14. 如图，已知 $\angle MON=30°$，在 $\angle MON$ 的内部有一点 P，A 为 OM 上一动点，B 为 ON 上一动点，$OP=a$，当$\triangle PAB$ 的周长最小时，$\angle APB=$____________度，　$\triangle PAB$ 的周长的最小值是__________.

15．已知等边ΔABC中$AD\perp BC, AD=12$，若点H在线段AD上运动，$\frac{1}{2}AH+CH$取最小值时，DH的值为____________



16．对于任意正实数a、b，

$\because (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$，

$\therefore a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$，

$\therefore a+b\geq 2\sqrt{ab}$，只有当$a=b$时，等号成立．

由此我们得到结论：**任意正实数a、b，有$a+b\geq 2\sqrt{ab}$**

依此结论我们有

（1）$m+\frac{1}{m}$（$m>0$）的最小值=__________

（2）$\frac{x^2+x-5}{x-2}\ (x>2)$的最小值=__________

三、解答题（本题共68分，第17-22题，每题5分，第23-26题，每题6分，第27-28题，每题7分） **解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．**

17.计算

（1）$(x+y+z)^2-(x+y-z)^2$

（2）$(a+2b)^2-2(a+2b)(a-2b)+(a-2b)^2$

18．已知实数a满足$a^2+2a+2-\sqrt{3}=0$，求$\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}\cdot\frac{a^2-2a+1}{a^2+4a+3}$的值．

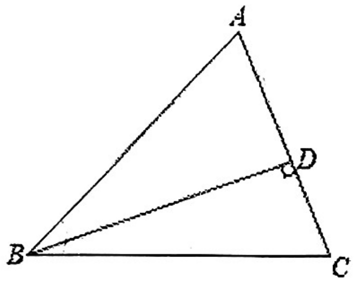
19．已知 $a=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，求 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$．

20．已知：在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=45°$，$BD\perp AC$于点D，过点C作$CE\perp AB$于点E，交BD于点F．

（1）依题意补全图形；

（2）求证：$\angle ABD=\angle ACE$；

（3）求证：$EF=AE$．



21.因为$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$，令$x^2+x-6=0$，则$(x+3)(x-2)=0$，$x=-3$或$x=2$，反过来，$x=2$能使多项式x^2+x-6的值为0.

利用上述阅读材料求解：

（1）若$x-4$是多项式x^2+mx+8的一个因式，则m的值是________；

（2）若$(x-1)$和$(x+2)$是多项式x^3+ax^2-5x+b的两个因式，则$a=$_____，$b=$_____；

（3）在（2）的条件下，把多项式x^3+ax^2-5x+b因式分解的结果为________．

22. 如果$10^a=b$，那么称a为b的劳格数，记为$a=f(b)$，由定义可知：$10^a=b$与$a=f(b)$所表示的是a、b两个量之间的同一关系.

（1）根据劳格数的定义，填空：$f(10^{-2})=$________；

（2）劳格数有如下运算性质：

若m、n为正数，则$f(mn)=f(m)+f(n)$，$f(\dfrac{m}{n})=f(m)-f(n)$．

根据运算性质，

填空：$\dfrac{f(b^3)}{f(b)}=$________（b 为正数）.

若 $f(2)\approx 0.3$，则 $f(20)\approx$________，$f(\dfrac{1}{50})\approx$________；（答案精确到小数点后一位）

（3）已知 $f(3)=a$，$f(7)=b$，$f(0.63)=c$，则 a，b，c 之间的等量关系式为________.

23. 如图，在长度为 1 个单位长度的小正方形组成的正方形网格中，ΔABC 的三个顶点 A、B、C 都在格点上.

（1）在图 1 中，画出与 ΔABC 关于直线 l 成轴对称的 $\Delta A_1B_1C_1$；

（2）在图 2 中，在直线 l 上找出一点 P，使得 $|PA-PC|$ 的值最大，该最大值为____（保留作图痕迹并标上字母 P）

（3）在图 3 中，在正方形网格中存在_____个格点，使得该格点与 B、C 两点构成以 BC 为腰的等腰三角形.

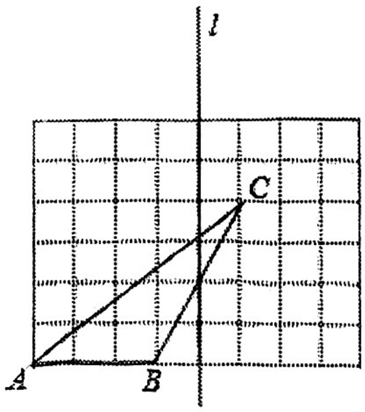


图 1

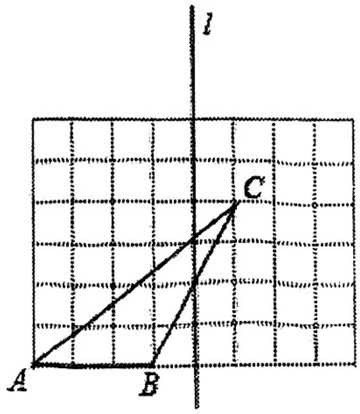


图 2

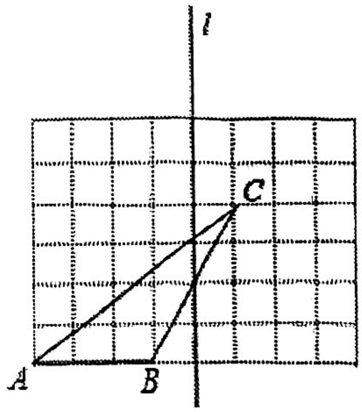


图 3

24. 探索规律

观察下列各式及验证过程：

$n=2$ 时，有式①：$2\times\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{2+\dfrac{2}{3}}$；

$n=3$时， 有式②：$3\times\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$；

$n=4$时， 有式③：$4\times\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$；

（1） 针对上述式①、 式②、式③的规律， 请写出$n=5$时的式子；

（2） 请写出满足上述规律的用n(n为自然数且$n\geqslant 2$)表示的等式， 并证明此等式成立.

25．某市为了做好“全国文明城市”验收工作，计划对市区S米长的道路进行改造，现安排甲、乙两个工程队进行施工.

（1）已知甲工程队改造360米的道路与乙工程队改造300米的道路所用时间相同．若甲工程队每天比乙工程队多改造30米，求甲、乙两工程队每天改造道路的长度各是多少米.

（2）若甲工程队每天可以改造a米道路，乙工程队每天可以改造b米道路（其中$a\neq b$)．现在有两种施工改造方案：

方案一：前$\frac{1}{2}S$米的道路由甲工程队改造，后$\frac{1}{2}S$米的道路由乙工程队改造；

方案二：完成整个道路改造前一半时间由甲工程队改造，后一半时间由乙工程队改造.

根据上述描述，请你判断哪种改造方案所用时间少？并说明理由.

26. 阅读材料：一般情形下等式$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$不成立，但有些特殊实数可以使它成立，例如：$x=2$，$y=2$时，$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$成立，我们称$(2,2)$是使$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$成立的“神奇数对”．请完成下列问题：

（1）数对$(\frac{4}{3}，4)$，$(1,1)$中，使$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$成立的“神奇数对”是____；

（2）若$(5-t,5+t)$是使$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$成立的“神奇数对”，求$t$的值；

（3）若(m,n)是使$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$成立的“神奇数对”，且$a=b+m$，$b=c+n$，求代数式$(a-c)^2-12(a-b)(b-c)$的最小值.

27. 已知$\angle MAN = 30°$，点B为边AM上一个定点，点P为线段AB上一个动点（不与点A，B重合），点P关于直线AN的对称点为点Q，连接AQ，BQ，点A关于直线BQ的对称点为点C，连接PQ，CP.

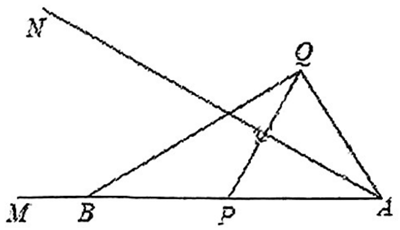


图1

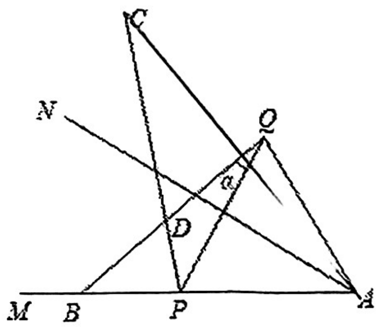


图2

（1）如图1，若点P为线段AB的中点.

①直接写出$\angle AQB$的度数；

②依题意补全图形，并直接写出线段AC与AP的等量关系；

（2）如图2，连结QC，线段CP与BQ交于点D.

①设$\angle BQP = \alpha$，求$\angle CPQ$的大小（用含α的式子表示）；

②用等式表示线段PC，DQ，DP之间的数量关系，并证明.

28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的点 M（a，b）和点 $N(a，b')$，给出如下定义：若满足 $b'=\begin{cases}2m-b & (b\geq m)\\ -b & (b<m)\end{cases}$，那么称点 N 是点 M 的"m-限变点".

请解决下面的问题：

（1）当 $m=2$ 时，

①已知点 P 的坐标是 $(2,1)$，则点 P 的"m-限变点"Q 的坐标是________________；

②若点 $P(a，b)$ 的"m-限变点"Q 的坐标为 $(-1,1)$，求点 P 的坐标；

（2）如图 1，已知点 $A(1,5)$，$B(4,2)$，点 P 在线段 AB 上，点 P 的"3-限变点"为 Q,

则 Q 的纵坐标 t 的取值范围是________________________；

（3）如图 2，已知点 P 是一、三象限角平分线上的点，$\triangle ABC$ 的顶点 $A(1,1)$、$B(4,-2)$、$C(6,0)$，

若$\triangle ABC$ 上存在点 P 的"m-限变点"，直接写出 m 的取值范围.

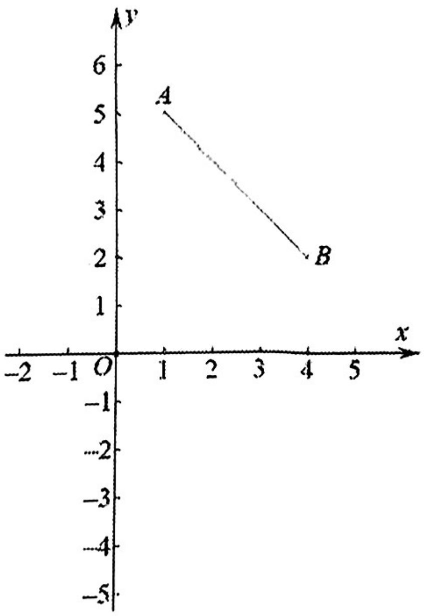


图 1

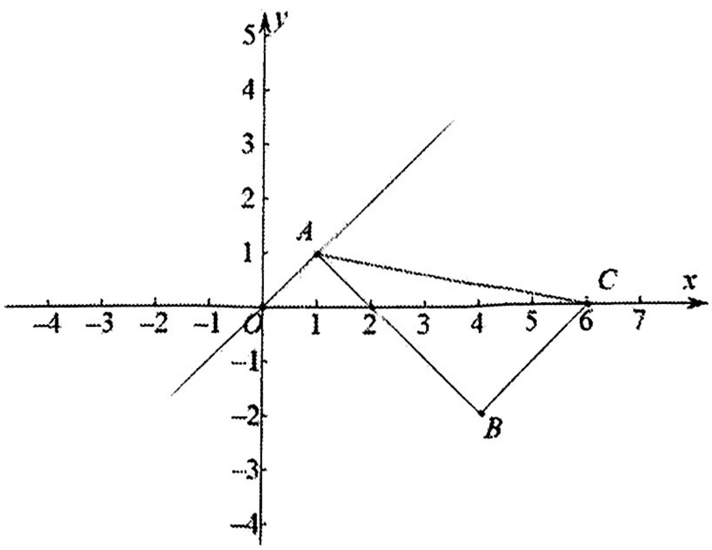


图 2