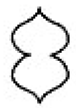
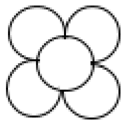
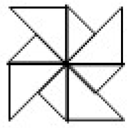
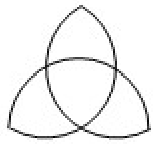
2022 北京四中初二 11 月月考

数　　学

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）.

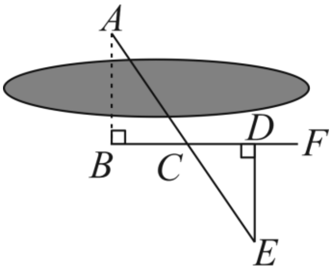
1. 下列图案中，有且只有三条对称轴的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

2. 已知点 $A(3,a)$ 与 $B(b,4)$ 关于 x 轴成轴对称，则 $a+b$ 的值为（　　）

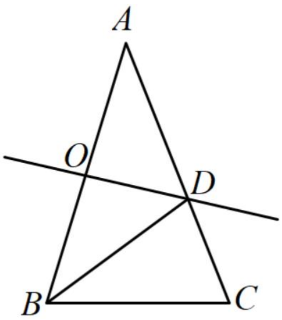
A. -1　　B. 1　　C. 7　　D. -7

3. 如图，要测量河两岸相对的两点 A、B 的距离，先在 AB 的垂线 BF 上取两点 C、D，使 $BC=CD$，再作出 BF 的垂线 DE，使点 A、C、E 在同一条直线上（如图），可以说明△ABC≌△EDC，得 $AB=DE$，因此测得 DE 的长就是 AB 的长，判定△ABC≌△EDC，最恰当的理由是（　　）



A. SAS　　B. HL　　C. SSS　　D. ASA

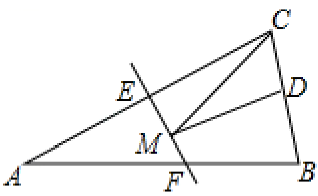
4. 如图，在△ABC 中，∠A=36°，AB=AC，AB 的垂直平分线 OD 交 AB 于点 O，交 AC 于点 D，连接 BD，下列结论错误的是(　　)



A. $\angle C=2\angle A$　　B. BD 平分 $\angle ABC$

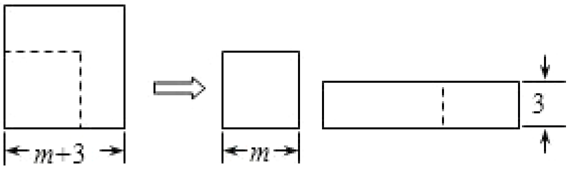
C. 图中有三个等腰三角形　　D. $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BOD}$

5. 如图，等腰△ABC 的底边 BC 长为 6，面积是 36，腰 AC 的垂直平分线 EF 分别交 AC，AB 边于 E，F 点．若点 D 为 BC 边的中点，点 M 为线段 EF 上一动点，则△CDM 周长的最小值为（　　）



A. 6　　B. 10　　C. 15　　D. 16

6. 如图，边长为(m+3)　正方形纸片剪出一个边长为 m 的正方形之后，剩余部分可剪拼成一个矩形(不重叠无缝隙)，若拼成的矩形一边长 为 3，则另一边长是（　　）



A. m+3　　B. m+6

C　2m+3　　D. 2m+6

7. 下列多项式中，完全平方式是（　　）

A. $4a^2-4a-1$　　B. a^2+2a+4　　C. $a^2-a+\frac{1}{4}$　　D. a^2-1

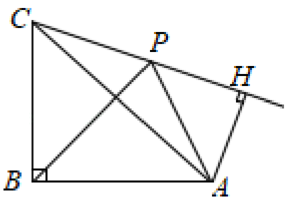
8. 下列各式不能分解因式　是（　　）

A. $2x^2-4x$　　B. $x^2+x+\frac{1}{4}$　　C. x^2+9y^2　　D. $1-m^2$

9. 已知 $m^2=3n+a$， $n^2=3m+a$， $m\neq n$，则 $m^2+2mn+n^2$ 的值为（　　）

A. 9　　B. 6　　C. 4　　D. 无法确定

10. 如图，等腰直角三角形 ABC 中，$\angle ABC$=90°，BA=BC，将 BC 绕点 B 顺时针旋转 θ（0°＜θ＜90°），得到 BP，连结 CP，过点 A 作 $AH\perp CP$ 交 CP 的延长线于点 H，连结 AP，则∠PAH 的度数（　　）



A. 随着 θ 的增大而增大

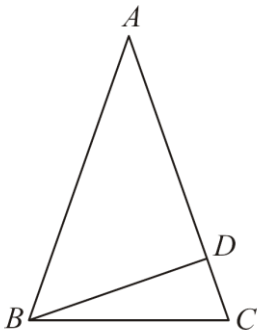
B. 随着 θ 的增大而减小

C. 不变

D. 随着 θ 的增大，先增大后减小

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）.

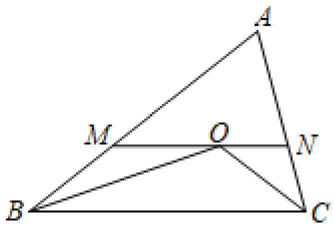
11. 如图，等腰 $\triangle ABC$ 一腰 AC 上的高 BD 与底边 BC 的夹角为 $37°$，则顶角为______°.



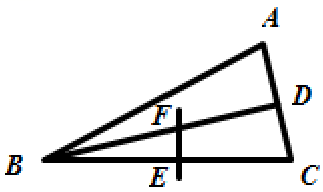
12. 在 $4^{x}=2^{x+6}$ 中，$x=$______.

13. 已知在 $\triangle ABC$ 中，三边长 a，b，c 满足 $a^{2}-16b^{2}-c^{2}+6ab+10bc=0$，则 a，b，c 满足的关系式是______.

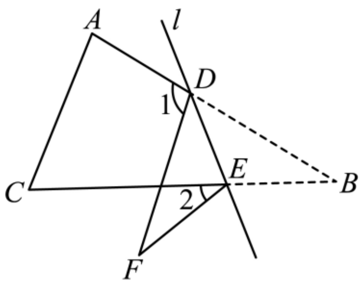
14. 如图，OB、OC 分别平分 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$，$MN \parallel BC$，若 $AB=38$，$AC=24$，则 $\triangle AMN$ 的周长是______.



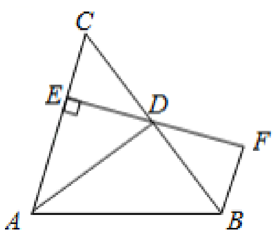
15. 如图，在△ABC 中，$AB=BC$,$\angle ABC=30°$，BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D,BC 的垂直平分线 EF 交 BC 于点 E,交 BD 于点 F,若 $BF=6$,则 AC 的长为____.



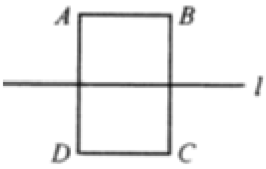
16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=40°$，将△ABC 沿着直线 l 折叠，使点 B 落在点 F 的位置，则 $\angle 1-\angle 2$ 的度数是 _____°.



17. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE \perp AC$，垂足为 E，$BF \parallel AC$ 交 ED 的延长线于点 F，若 BC 恰好平分 $\angle ABF$，$AE=2BF$．下列四个结论中：① $DE=DF$；② $DB=DC$；③ $AD \perp BC$；④ $AB=3BF$．其中正确的结论有______.



18. 如图，在长方形 $ABCD$ 的对称轴 l 上找点 P，使得 ΔPAB，ΔPBC 均为等腰三角形，则满足条件的点 P 有_________个.



三、解答题

19. 因式分解

（1）x^2-4

（2）$3a^2-6a+3$

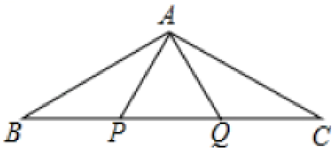
（3）$m(a-3)+2(3-a)$

（4）$2x^2-5x+3$

（5）$a^3b+2a^2b^2+ab^3$

（6）$(x^2-3)^2-2(x^2-3)+1$

20. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，P、Q 两点分别是边 AB 和 AC 的垂直平分线与 BC 的交点，连接 AP 和 AQ，且 $BP=PQ=QC$．求 $\angle C$ 的度数．



证明：∵P、Q 两点分别是边 AB 和 AC 的垂直平分线与 BC 的交点，

∴ $PA=$______，$QC=QA$．（____________）

∵ $BP=PQ=QC$，

∴在$\triangle APQ$中，$PQ=$ ______=______（等量代换）

∴$\triangle APQ$是______三角形.

∴ $\angle AQP=60^\circ$，

∵在$\triangle AQC$中，$QC=QA$，

∴ $\angle C=\angle QAC$．

又∵ $\angle AQP$ 是$\triangle AQC$　外角，

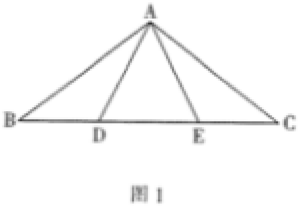
∴ $\angle AQP=\angle QAC+\angle$______$=60^\circ$．（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和）

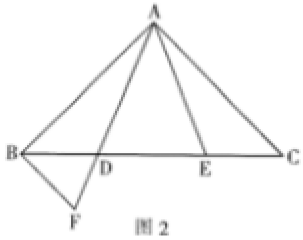
∴ $\angle C=$______.

21. 已知，在ΔABC中，$AB=AC$，点 D，点 E 在 BC 上，$BD=CE$，连接 AD, AE．

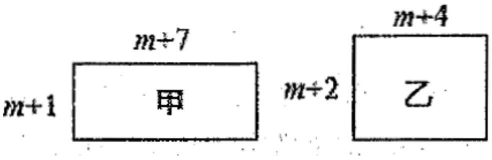
（1）如图 1，求证：$AD=AE$；

（2）如图 2，当$\angle DAE=\angle C=45^\circ$时，过点 B 作 $BF//AC$，交 AD 的延长线于点 F，在不添加任何辅助线的情况下，请直接写出图 2 中四个等腰三角形，使写出的每个等腰三角形的顶角都等于 45°．





22. 如图，甲长方形的两边长分别为$m+1$，$m+7$；乙长方形的两边长分别为$m+2$，$m+4$．(其中m为正整数)



（1）图中的甲长方形的面积S_1，乙长方形的面积S_2，比较：S_1__________S_2（填“<”、“=”或“>”）；

（2）现有一正方形，其周长与图中的甲长方形周长相等，试探究：该正方形面积S与图中的甲长方形面积S_1的差（即$S-S_1$）是一个常数，求出这个常数；

（3）在（1）的条件下，若某个图形的面积介于S_1、S_2之间（不包括S_1、S_2）并且面积为整数，这样的整数值有且只有16个，求m的值．

23. 等腰△ABC中，$AB=AC$，$\angle ACB>60°$，点D为边AC上一点，满足$BD=BC$，点E与点B位于直线AC的同侧，△ADE是等边三角形．

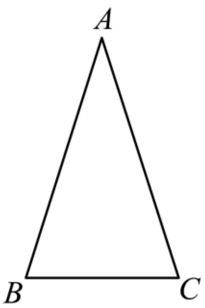


图1

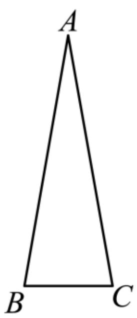


图2

（1）①请在图1中将图形补充完整；

②若点D与点E关于直线AB轴对称，$\angle ACB=$______；

（2）如图2所示，若$\angle ACB=80°$，用等式表示线段BA、BD、BE之间 数量关系，并说明理由．

附加题．（2分＋2分＋2分＋4分）

24. 在等边△ABC中，M、N、P分别是边AB、BC、CA上的点（不与端点重合），对于任意等边△ABC，下面四个结论中：

①存在无数个△MNP是等腰三角形；

②存在无数个△MNP是等边三角形；

③存在无数个△MNP是等腰直角三角形；

④存在一个△MNP在所有△MNP中面积最小．

所有正确结论的序号是______________．

25. 已知 a，b，c 是正整数，$a>b$，且 $a^2-ab-ac+bc=11$，则 $a-c=$________

26. 如图 1，在平面直角坐标系中，我们把 $d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=AC+BC$ 定义为 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 两点之间的非常距离，在图 2，图 3 的正方形网格中，每个小正方形的边长为 1．如图 2，$d(D,E)=d(D,F)=3$，$d(E,F)=4$，我们把到 M、N 两点非常距离相等的所有点组成的图形叫做 M，N 两点间的“非常垂直平分线”．如图 3，$d(M,N)=$______，并在图 3 中画出 M、N 两点间的“非常垂直平分线”．

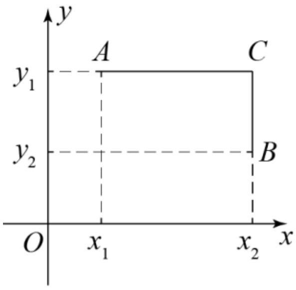


图1

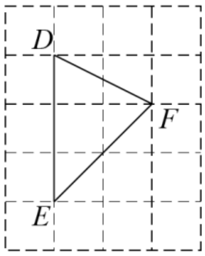


图2

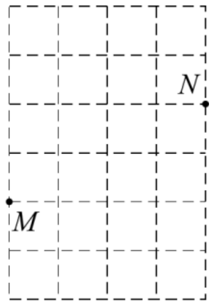


图3

27. 在等边 $\triangle ABC$ 的外侧作直线 AP，$\angle CAP=\alpha$，点 C 关于 AP 的对称点为 D，连接 CD、BD、AD.

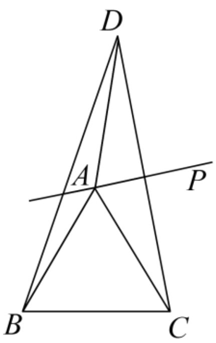


图1

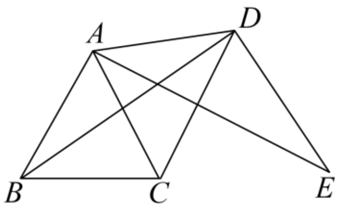


图2

（1）如图 1，若 $\alpha=70°$，直接写出 $\angle BDC$ 的度数；

（2）如图 2，若 $0<\alpha<60°$，过点 D 作 $DE\perp BD$ 交直线 AP 于点 E，求证：$AE=BD$.

参考答案

一、选择题（每题3分，共30分）.

1. 【答案】D

【解析】

【详解】解：A、不是轴对称图形，故不符合题意；

B、有四条对称轴，故不符合题意；

C、不是轴对称图形，故不符合题意；

D、有三条对称轴，故符合题意.

故选：D.

【点睛】本题考查了轴对称图形的识别，熟练掌握轴对称图形的定义是解答本题的关键．一个图形的一部分，以某条直线为对称轴，经过轴对称能与图形的另一部分重合，这样的图形叫做轴对称图形.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】直接利用关于x轴对称的点的坐标特点得出a，b的值，即可得出答案.

【详解】解：∵点$A(3,a)$与$B(b,4)$关于x轴成轴对称，

$\therefore a=-4, b=3,$

$\therefore a+b=3+(-4)=-1.$

故：A.

【点睛】本题主要考查了关于x轴对称的点的坐标特点，关于x轴对称的点的坐标特点是：横坐标相同，纵坐标互为相反数，正确得出对应点横纵坐标的关系是解题关键.

3. 【答案】D

【解析】

【分析】根据全等三角形的判定进行判断，注意看题目中提供了哪些证明全等的要素，要根据已知选择判断方法.

【详解】解：因为证明在$\triangle ABC \cong \triangle EDC$用到的条件是：$CD=BC$，$\angle ABC=\angle EDC=90°$，$\angle ACB=\angle ECD$，

所以用到的是两角及这两角的夹边对应相等即ASA这一方法.

故选：D.

【点睛】此题考查了全等三角形的应用，判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、ASA、AAS、HL，做题时注意选择．注意：AAA、SSA不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角.

4. 【答案】D

【解析】

【详解】解：A、∵$\angle A=36°$，AB=AC，

∴∠C=∠ABC=72°，

∴∠C=2∠A，该选项正确；

B、∵DO 是 AB 垂直平分线，

∴AD=BD，

∴∠A=∠ABD=36°，

∴∠DBC=72°-36°=36°=∠ABD，

∴BD 是∠ABC 的角平分线，该选项正确；

C、由 A、B 选项可以知道△ABC、△BDC、△ADB 是等腰三角形，该选项正确；

D、根据已知不能推出△BCD 的面积和△BOD 面积相等，该选项错误.

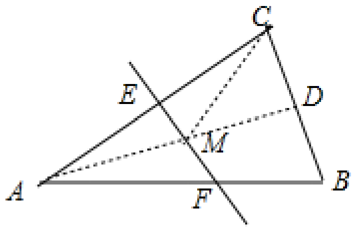
故选 D.

5. 【答案】C

【解析】

【分析】根据对称性和等腰三角形的性质，连接 AD 交 EF 于点 M，此时△CDM 周长最小，进而可求解.

【详解】如图：



连接 AD 交 EF 于点 M，

∵等腰△ABC 的底边 BC 长为 6，

点 D 为 BC 边的中点，

∴AD⊥BC，BD=CD=3，

∵EF 是腰 AC 的垂直平分线，连接 CM，

∴AM=CM，

此时△CDM 的周长为：CM+DM+CD=AM+DM+CD=AD+CD

CD 的长为 3 固定，

∴根据两点之间线段最短，

△CDM 的周长最小.

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\bullet AD$，

∴$\frac{1}{2}\times 6\bullet AD=36$，

∴AD=12，

∴AD+CD=12+3=15.

故选：C.

【点睛】此题考查最短路线问题、线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质，解题的关键是利用线段垂直

平分线的性质．

6. 【答案】C

【解析】

【分析】由于边长为（m+3）的正方形纸片剪出一个边长为 m 的正方形之后，剩余部分又剪拼成一个矩形（不重叠无缝隙），那么根据正方形的面积公式，可以求出剩余部分的面积，而矩形一边长为 3，利用矩形的面积公式即可求出另一边长．

【详解】设拼成的矩形一边长为 x，

则依题意得：（m+3）^{2}－m^2=3x，

解得，x=（6m+9）÷3=2m+3，

故选：C．

7. 【答案】C

【解析】

分析】根据完全平方公式$\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm 2ab+b^2$进行逐一判断即可．

【详解】解：A、$4a^2-4a-1$不符合题意完全平方式　特点，不符合题意；

B、a^2+2a+4不符合题意完全平方式的特点，不符合题意；

C、$a^2-a+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$，是完全平方式，符合题意；

D、a^2-1不符合题意完全平方式的特点，不符合题意；

故选 C．

【点睛】本题考查的是完全平方式的判断，掌握完全平方公式的特征是解题关键．

8. 【答案】C

【解析】

【详解】选项 A. $2x^2-4x$=2x(x-2) .

选项 B. $x^2+x+\frac{1}{4}$=(x+$\frac{1}{2}$)^2.

选项 C. x^2+9y^2 ,不能分.

选项 D. $1-m^2$=(1-m)(1+m).

故选 C.

9. 【答案】A

【解析】

【分析】将已知的两个方程相减，求得 m+n 的值，再将所求代数式分解成完全平方式，再整体代入计算．

【详解】∵ $m^2=3n+a$， $n^2=3m+a$，

∴ $m^2-n^2=3n-3m$，

∴ $\left(m+n\right)\left(m-n\right)+3m-n=0$，

$\therefore \left(m-n\right)\left(m+n+3\right)=0$，

$\because m\neq n$，

$\therefore m+n+3=0$，

$\therefore m+n=-3$，

$\therefore m^2+2mn+n^2=(m+n)^2=(-3)^2=9$，

故选：A.

【点睛】本题主要考查了求代数式的值，因式分解的应用，平方差公式、完全平方公式的应用，关键是由已知求得 m+n 的值.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】由旋转的性质可得 $BC=BP=BA$，由等腰三角形的性质和三角形内角和定理可求 $\angle BPC+\angle BPA=135°=\angle CPA$，由外角的性质可求 $\angle PAH=135°-90°=45°$，即可求解.

【详解】解：∵将 BC 绕点 B 顺时针旋转 θ（0°＜θ＜90°），得到 BP，

$\therefore BC=BP=BA$，

$\therefore \angle BCP=\angle BPC$，$\angle BPA=\angle BAP$，

$\because \angle CBP+\angle BCP+\angle BPC=180°$，$\angle ABP+\angle BAP+\angle BPA=180°$，$\angle ABP+\angle CBP=90°$，

$\therefore \angle BPC+\angle BPA=135°=\angle CPA$，

$\because \angle CPA=\angle AHC+\angle PAH=135°$，

$\therefore \angle PAH=135°-90°=45°$，

$\therefore \angle PAH$ 的度数是定值，

故选：C.

【点睛】本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，三角形的外角性质，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键.

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）.

11. 【答案】74

【解析】

【分析】根据高的定义求出 $\angle BDC$，根据直角三角形两锐角互余求出 $\angle C$，根据等腰三角形的性质求出 $\angle ABC$，根据三角形的内角和定理求出即可.

【详解】解：∵ BD 是 $\triangle ABC$ 的高，

$\therefore \angle BDC=90°$，

$\because \angle DBC=37°$，

$\therefore \angle C=90°-\angle DBC=53°$，

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle C=53°$，

$\therefore \angle A=180°-\angle ABC-\angle C=180°-53°-53°=74°$.

故答案为：74．

【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质，三角形的高的定义，直角三角形的性质，三角形的内角和定理的理解和掌握，能综合运用这些性质进行计算是解此题的关键．

12.【答案】6

【解析】

【分析】根据$4^x=2^{2x}$得到$2x=x+6$，解方程即可得到答案．

【详解】解：∵$4^x=2^{x+6}$，

∴$\left(2^2\right)^x=2^{x+6}$，

∴$2^{2x}=2^{x+6}$，

∴$2x=x+6$，

解得$x=6$，

故答案为：6．

【点睛】本题主要考查了幂的乘方的逆运算，正确得到$4^x=2^{2x}$推出$2x=x+6$是解题的关键．

13. 【答案】$a+c=2b$

【解析】

【分析】由完全平方公式和平方差公式可得$(a+c-2b)(a+8b-c)=0$，再由$a+b>c$，即可求a，b，c之间满足的等量关系．

【详解】解：∵$a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$，

∴$\left(a^2+6ab+9b^2\right)-\left(c^2-10bc+25b^2\right)=0$

∴$(a+3b)^2-(c-5b)^2=0$，

∴$(a+3b+c-5b)(a+3b-c+5b)=0$，

∴$(a+c-2b)(a+8b-c)=0$，

∵$a+b>c$，

∴$a+8b-c>0$，

∴$a+c-2b=0$，

即$a+c=2b$．

故答案为：$a+c=2b$．

【点睛】本题主要考查了因式分解的应用、三角形两边之和大于第三边，熟练运用完全平方公式，平方差公式分解因式，是解题的关键．

14. 【答案】62

【解析】

【分析】根据角平分线的定义可得$\angle ABO=\angle OBC$，根据两直线平行，内错角相等可得$\angle OBC=BOM$，从而得到$\angle ABO=\angle BOM$，根据等角对等边可得$BM=OM$，同理可得$CN=ON$，然后求出$\triangle AMN$的周

长为 $AB+AC$，代入数据进行计算即可得解．

【详解】解：$\because OB$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABO=\angle OBC$，

$\because MN \parallel BC$，

$\therefore \angle OBC=BOM$，

$\therefore \angle ABO=\angle BOM$，

$\therefore BM=OM$，

同理可得 $CN=ON$，

$\therefore \triangle AMN$ 的周长 $=AM+MO+ON+AN=AM+BM+CN+AN=AB+AC=38+24=62$，

故答案为：62．

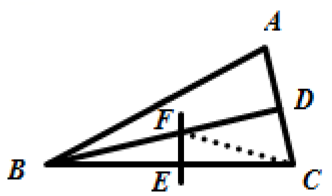
【点睛】本题考查了等腰三角形的判定，主要利用了等角对等边的性质，两直线平行，内错角相等的性质，熟记性质是解题的关键．

15. 【答案】6.

【解析】

【分析】连接 FC，根据等腰三角形的性质即可得：$\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=15°$，$BD\perp AC$，$AD=CD$，然后根据垂直平分线的性质可得：$FB=FC=6$，根据等边对等角可得：$\angle FCB=\angle FBC=15°$，再利用三角形的外角的性质求出 $\angle DFC=30°$，根据 $30°$ 所对的直角边是斜边的一半即可求出 DC，从而求出 AC.

【详解】解：连接 FC



$\because AB=BC, \angle ABC=30°$，$BD$ 平分 $\angle ABC$

$\therefore \angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=15°$，$BD\perp AC$，$AD=CD$

$\because EF$ 垂直平分 BC

$\therefore FB=FC=6$

$\therefore \angle FCB=\angle FBC=15°$

$\therefore \angle DFC=\angle FCB+\angle FBC=30°$

$\therefore CD=\frac{1}{2}FC=3$

$\therefore AC=AD+CD=6$

故答案为 6.

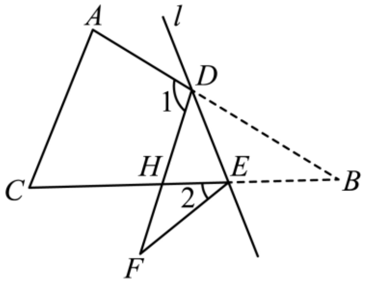
【点睛】此题考查的是等腰三角形的性质、垂直平分线的性质和直角三角形的性质，掌握等边对等角、三线合一、线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等和 $30°$ 所对的直角边是斜边的一半是解决此题的关键.

16. 【答案】80

【解析】

【分析】由折叠的性质得到$\angle F=\angle B$，再利用外角性质即可求出所求角的度数.

【详解】解：如图，设DF与CE交于点H，



由折叠的性质得：$\angle F=\angle B=40^\circ$，

根据外角性质得：$\angle 1=\angle DHB+\angle B$，$\angle DHB=\angle 2+\angle F$，

$\therefore \angle 1=\angle 2+\angle F+\angle B=\angle 2+2\angle B=\angle 2+80^\circ$，即$\angle 1-\angle 2=80^\circ$.

故答案是：80.

【点睛】本题主要考查了折叠的性质，三角形内角和定理，熟练掌握三角形内角和定理求解角的度数是解决问题的关键.

17.【答案】①②③④

【解析】

【分析】根据平行线的性质和等腰三角形的判定与性质可得到$BD=CD, AD\perp BC$，故②③正确；通过$\triangle CDE\cong\triangle BDF$，得到$DE=DF, CE=BF$，故①④正确.

【详解】解：$\because BF\parallel AC$，

$\therefore \angle C=\angle CBF$，

$\because BC$平分$\angle ABF$，

$\therefore \angle ABC=\angle CBF$，

$\therefore \angle C=\angle ABC$，

$\therefore AB=AC$，

$\because AD$是$\triangle ABC$的角平分线，

$\therefore BD=CD$，$AD\perp BC$，故②③正确，

在$\triangle CDE$与$\triangle DBF$中，

$$\begin{cases}\angle C=\angle CBF\\ CD=BD\\ \angle EDC=\angle BDF\end{cases},$$

$\therefore \triangle CDE\cong\triangle BDF\left(ASA\right)$，

$\therefore DE=DF, CE=BF$，故①正确；

$\because AE=2BF$，

∴ $AB=AC=3BF$，故④正确；

故答案为：①②③④.

【点睛】本题利用了等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质、平行线的性质求解，是一道综合性的题目.

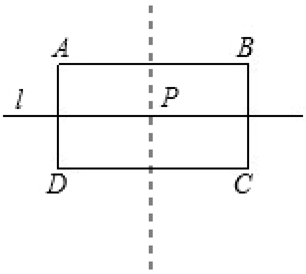
18. 【答案】5

【解析】

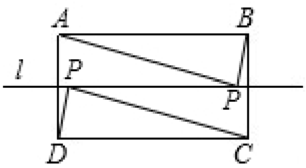
【分析】利用分类讨论的思想，此题共可找到 5 个符合条件的点：一是作 AB 或 DC 的垂直平分线交 l 于 P；二是在长方形内部在 l 上作点 P，使 PA=AB，PD=DC，同理，在 l 上作点 P，使 PC=DC，AB=PB；三是如图，在长方形外 l 上作点 P，使 AB=BP，DC=PC，

同理，在长方形外 l 上作点 P，使 AP=AB，PD=DC.

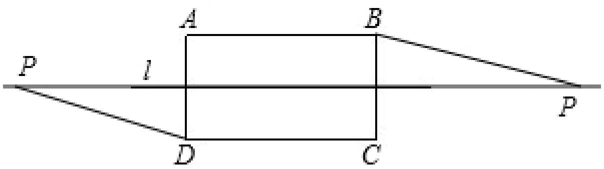
【详解】如图，作 *AB* 或 *DC* 的垂直平分线交 *l* 于 *P*，



如图，在 *l* 上作点 *P*，使 *PA=AB*，同理，在 *l* 上作点 *P*，使 *PC=DC*，



如图，在长方形外 *l* 上作点 *P*，使 *AB=BP*，同理，在长方形外 *l* 上作点 *P*，使 *PD=DC*，



故答案为:5.

【点睛】考查等腰三角形的判定与性质，注意分类讨论思想在解题中的应用.

三、解答题

19. 【答案】（1）$(x+2)(x-2)$

（2）$3(a-1)^2$

（3）$(a-3)(m-2)$

（4）$(2x-3)(x-1)$

（5）$ab(a+b)^2$

（6）$(x+2)^2(x-2)^2$

【解析】

【分析】（1）用平方差公式分解因式即可；

（2）先提公因式，再用完全平方公式分解因式即可；

（3）用提公因式法分解因式即可；

（4）用十字相乘法分解因式即可；

（5）先提公因式，然后用完全平方公式分解因式即可；

（6）先将$\left(x^2-3\right)$看作一个整体，用完全平方公式分解因式，然后再用平方差公式分解因式即可．

【小问 1 详解】

解：x^2-4

$=x^2-2^2$

$=(x+2)(x-2)$；

【小问 2 详解】

解：$3a^2-6a+3$

$=3\left(a^2-2a+1\right)$

$=3(a-1)^2$；

【小问 3 详解】

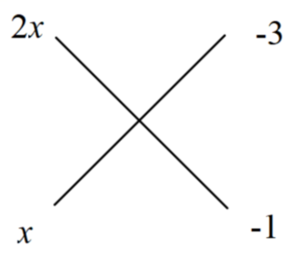
解：$m(a-3)+2(3-a)$

$=m(a-3)-2(a-3)$

$=(a-3)(m-2)$；

【小问 4 详解】

解：$2x^2-5x+3$



$\because 2x\cdot(-1)+x\cdot(-3)=-2x-3x=-5x$，

$\therefore 2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)$；

【小问 5 详解】

解：$a^3b+2a^2b^2+ab^3$

$=ab\left(a^2+2ab+b^2\right)$

$=ab(a+b)^2$；

【小问 6 详解】

解：$\left(x^2-3\right)^2-2\left(x^2-3\right)+1$

$=\left(x^2-3-1\right)^2$

$=\left(x^2-4\right)^2$

$=\left[(x+2)(x-2)\right]^2$

$=(x+2)^2(x-2)^2$.

【点睛】本题主要考查了因式分解，解题的关键是熟练掌握完全平方公式$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$，平方差公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

20. 【答案】PB；线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等；PA；QA；等边；C；$30°$.

【解析】

【分析】根据线段垂直平分线的性质可得$PA=PB$，$QC=QA$，证明$\triangle APQ$是等边三角形，可得$\angle AQP=60°$，然后根据三角形外角的性质可得答案.

【详解】证明：∵P、Q两点分别是边AB和AC的垂直平分线与BC的交点，

∴$PA=PB$，$QC=QA$.（线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等），

∵$BP=PQ=QC$，

∴在$\triangle APQ$中，$PQ=PA=QA$（等量代换），

∴$\triangle APQ$是等边三角形.

∴$\angle AQP=60°$，

∵在$\triangle AQC$中，$QC=QA$，

∴$\angle C=\angle QAC$.

又∵$\angle AQP$是$\triangle AQC$的外角，

∴$\angle AQP=\angle QAC+\angle C=60°$.（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和）

∴$\angle C=30°$.

故答案为：PB；线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等；PA；QA；等边；C；$30°$.

【点睛】本题考查了线段垂直平分线的性质，等边三角形的判定和性质，等腰三角形的性质以及三角形外角的性质，解题的关键是掌握线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等.

21.【答案】（1）证明见解析；（2）$\triangle ADE$、$\triangle BAE$、$\triangle BDF$、$\triangle CAD$.

【解析】

【分析】（1） $AB=AC$ 可得 $\angle ABC=\angle ACB$ ，进而利用 SAS 证明 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$ ，即可得出结论；

（2）由已知计算出图形中角的度数，由等角对等边即可得出结论．

【详解】（1）证明：如图 1，

$\because AB=AC$ ，

$\therefore \angle B=\angle C$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle B=\angle C \\ BD=CE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$ （SAS），

$\therefore AD=AE$ ；

（2）顶角为 45°的等腰三角形有以下四个：$\triangle ADE$ 、$\triangle BAE$ 、$\triangle CAD$ 、$\triangle BDF$ ．

证明：$\because \angle C=45°$ ， $AB=AC$ ，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=45°$ ， $\angle ACB=90°$ ，

$\because \angle DAE=45°$ ， $AD=AE$ ，即：$\triangle ADE$ 是等腰三角形， $\angle DAE=45°$ ；

$\therefore \angle ADE=\angle AED=\dfrac{180°-45°}{2}=67.5°$ ，

$\therefore \angle BAD=\angle CAE=67.5°-45°=22.5°$ ，

$\therefore \angle BAE=\angle CAD=22.5°+45°=67.5°$ ，

$\therefore \angle BAE=\angle BEA=\angle CAD=\angle CDA=67.5°$ ，

$\therefore CA=CD$ 、 $AB=AE$ 即：$\triangle BAE$ 、$\triangle CAD$ 是等腰三角形， $\angle ABC=\angle ACB=45°$ ，

$\because BF//AC$

$\therefore \angle DBF=\angle C=45°$， $\angle F=\angle CAD=67.5°$ ，

又 $\because \angle BDF=\angle ADC=67.5°$ ，

$\therefore \angle BDF=\angle F=67.5°$ ，

$\therefore BD=BF$ 、即：$\triangle BDF$ 是等腰三角形， $\angle DBF=45°$ ．

【点睛】本题考察了等腰三角形性质和判定及全等三角形性质和判定，掌握等腰三角形性质和判定是解题关键．

22. 【答案】（1）>；（2）9；（3）9．

【解析】

【分析】（1）根据矩形的面积公式计算即可；

（2）根据矩形和正方形的周长和面积公式即可得到结论；

（3）根据题意列出不等式，然后求解即可得到结论．

【详解】解：（1）图①中长方形的面积 $S_1=(m+7)(m+1)=m^2+8m+7$ ，

图②中长方形的面积 $S_2=(m+4)(m+2)=m^2+6m+8$ ，

$\because S_1-S_2=2m-1$，m 为正整数，

m 最小为 1，

$\therefore 2m-1\geqslant 1>0$，

$\therefore S_1>S_2$；

（2）依题意得，正方形的边长为：$2(m+7+m+1)\div 4=m+4$；

则：$S-S_1=(m+4)^2-(m^2+8m+7)=9$，是一个定值；

（3）由（1）得，$S_1-S_2=2m-1$，

根据某个图形的面积介于S_1、S_2之间（不包括S_1、S_2）并且面积为整数，这样的整数值有且只有 16 个，

$\therefore$当$16<2m-1\leq 17$时，

$\therefore \frac{17}{2}<m\leq 9$，

$\because m$为正整数，

$\therefore m=9$．

【点睛】本题考查了完全平方方公式的几何背景，多项式的乘法，整式的混合运算，一元一次不等式，熟记相关运算法则是解题的关键．

23. 【答案】（1）①见解析；②$75°$

（2）$BA=BD+BE$；理由见解析

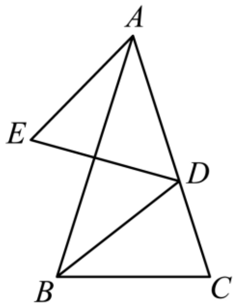
【解析】

【分析】（1）①根据题意直接画出图形；②根据对称性判断出$AB\perp DE$，再判断出$\angle DAE=60°$，进而求出$\angle BAC$，即可得出结论；

（2）先判断出$\angle ADF=\angle EDB$，进而根据SAS判断出$\triangle BDE\cong\triangle FDA$，即可得出结论．

【小问 1 详解】

解：①根据题意，补全图形，如图所示，



②当点D与点E关于直线AB轴对称时，

$\therefore AB\perp DE$，

$\because \triangle ADE$是等边三角形，

$\therefore \angle DAE=60°$，$AD=AE$，

$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle DAE=30°$，

∵ $AB = AC$，

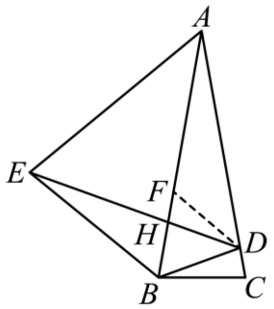
∴ $\angle ACB = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle BAC\right) = 75^\circ$.

故答案为：75°.

【小问 2 详解】

解：$BA = BD + BE$；理由如下：

BA 上取一点 F，使 $BF = BD$，DE 与 AB 的交点记作点 H，如图所示：



∵ $\triangle ADE$ 是等边三角形，

∴ $AD = ED$，$\angle EAD = \angle AED = 60^\circ$，

在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle ACB = 80^\circ$，

∴ $\angle ABC = \angle ACB = 80^\circ$，

∴ $\angle BAC = 180^\circ - \angle ACB - \angle ABC = 20^\circ$，

∴ $\angle BAE = \angle DAE - \angle BAC = 40^\circ$，

在 $\triangle BCD$ 中，$BC = BD$，

∴ $\angle BDC = \angle ACB = 80^\circ$，

∴ $\angle DBC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BDC = 20^\circ$，

∴ $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 60^\circ$，

∵ $BF = BD$，

∴ $\triangle BDF$ 是等边三角形，

∵ $\angle AED = \angle ABD = 60^\circ$，$\angle AHE = \angle BHD$，

∴ $\angle BDE = \angle BAE = 40^\circ$，

∴ $\angle BDF = 60^\circ$，$BD = FD = BF$，

∴ $\angle ADF = 180^\circ - \angle BDC - \angle BDF = 40^\circ$，

∵ $DE = AD$，

∴ $\triangle BDE \cong \triangle FDA(\text{SAS})$，

∴ $FA = BE$，

∴ $BA = BF + FA = BD + BE$.

【点睛】本题主要考查了轴对称的性质，对称性，三角形的内角和定理，等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，作出辅助线，构造出 $\triangle BDE \cong \triangle FDA$，是解本题的关键.

附加题.（2 分＋2 分＋2 分＋4 分）

24. 【答案】①②③

【解析】

【分析】根据题意作图，根据所画图形判定即可解决问题.

【详解】解：如图 1 中，满足 $AM=BN=PC$，

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形

∴$AB=BC=CA$，$\angle A=\angle C=\angle B=60°$

∴$AB-AM=BC-BN=CA-CP$

∴$AP=CN=BM$

又$\angle A=\angle C=\angle B=60°$

∴$\triangle AMP\cong\triangle CNP\cong\triangle BMN$

∴$MP=PN=MN$

∴$\triangle PMN$ 是等边三角形，这样的三角形有无数个.

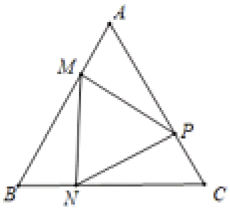


图1

如图 2 中，当 $NM=NP$，$\angle MNP=90°$ 时，$\triangle MNP$ 是等腰直角三角形，这样的三角形有无数个（见图 3）.

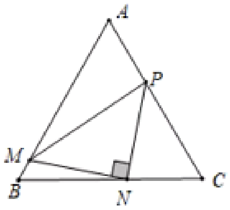


图2

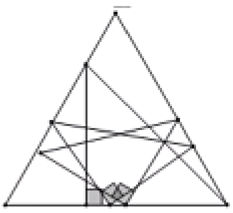


图3

故①②③正确，$\triangle PNM$ 的面积不存在最小值.

故答案为①②③.

【点睛】本题考查等腰三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

25. 【答案】1 或 11

【解析】

【分析】根据因式分解的分组分解法即可求解.

【详解】$a^2-ab-ac+bc=11$

$(a^2-ab)-(ac-bc)=11$

$a(a-b)-c(a-b)=11$

$(a-b)(a-c)=11$

∵$a>b$，

∴$a-b>0$，又∵a，b，c 是正整数，

∴$a-b=1$ 或 11，$a-c=11$ 或 1.

故答案为：1 或 11.

【点睛】本题考查了因式分解的应用，解答本题的关键是掌握分组分解法分解因式.

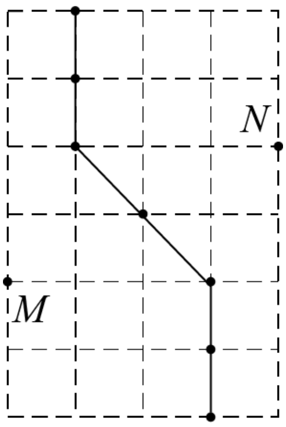
26. 【答案】4，作图见解析

【解析】

【分析】根据 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 两点之间的非常距离的定义解决问题即可. 根据“非常垂直平分线”的定义，画出满足条件的点即可.

【详解】解：由题意：$d(M,N)=4+2=6$，

满足条件的点组成的图形如图所示：



故答案为：6.

【点睛】本题考查作图−应用与设计，$A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 两点之间的非常距离的定义等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

27. 【答案】(1) $\angle BDC$ 的度数为 30°

（2）见解析

【解析】

【分析】(1) 根据对称性和等边三角形的性质即可求解；

（2）根据等边三角形的性质和等腰三角形的性质，轴对称的性质，用 α 表示 $\angle ADB=\angle ABD=60°-\alpha$，

得出$\angle CBD=\angle ABC-\angle ABD=60^\circ-60^\circ-\alpha=\alpha$，证明$\angle CBD=\angle DAE=\alpha$，再利用余角的性质证明$\angle BDC=\angle AED$，最后利用AAS证明$\triangle BDC\cong\triangle AED$即可证明结论.

【小问1详解】

解：∵点C关于AP对称点为D，

$\therefore AD=AC$，$\angle CAP=\angle DAP=70^\circ$，

$\therefore \angle ACD=\angle ADC=\dfrac{180^\circ-70^\circ-70^\circ}{2}=20^\circ$，

$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore AB=AC$，$\angle BAC=60^\circ$，

$\therefore AB=AD$，

$\therefore \angle ABD=\angle ADB$，

$\because \angle BAD=360^\circ-70^\circ-70^\circ-60^\circ=160^\circ$，

$\therefore \angle ADB=\dfrac{180^\circ-160^\circ}{2}=10^\circ$，

$\therefore \angle BDC=\angle ADB+\angle ADC=30^\circ$.

答：$\angle BDC$　度数为30°.

【小问2详解】

证明：∵点C关于AP对称点为D，

$\therefore AD=AC$，$\angle CAP=\angle DAP=\alpha$，$CD\perp AP$，

$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore AB=AC=BC$，$\angle BAC=\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore AD=AC=BC$，

$\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=60^\circ+2\alpha$，

$\because AB=AD$，

$\therefore \angle ADB=\angle ABD=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BAD)=60^\circ-\alpha$，

$\therefore \angle CBD=\angle ABC-\angle ABD=60^\circ-60^\circ-\alpha=\alpha$，

$\therefore \angle CBD=\angle DAE=\alpha$，

$\because DE\perp BD$，

$\therefore \angle BDE=90^\circ$，

$\therefore \angle BDC+\angle CDE=90^\circ$，

$\because CD\perp AP$，

$\therefore \angle CDE+\angle AED=90^\circ$，

$\therefore \angle BDC=\angle AED$，

$\therefore \triangle BDC\cong\triangle AED(\text{AAS})$，

$\therefore BD = AE$.

【点睛】本题主要考查了等边三角形的性质、等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质、对称性，三角形内角和定理，解决本题的关键是熟练掌握三角形全等的判定方法，证明$\triangle BDC \cong \triangle AED$.