

数学试卷

2019.4

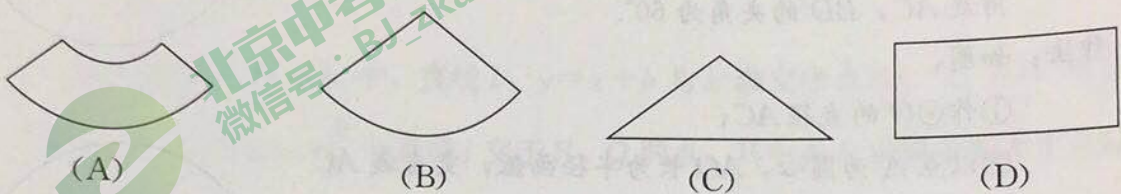
考生须知

1. 本试卷共 8 页,共三道大题,28 道小题,满分 100 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、班级、姓名和学号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上,选择题、作图题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束,将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回。

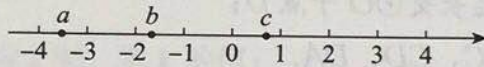
一、选择题 (本题共 16 分,每小题 2 分)

第 1—8 题均有四个选项,符合题意的选项只有一个。

1. 下列图形中,是圆锥的侧面展开图的为



2. 实数 a, b, c 在数轴上的对应点的位置如图所示,则正确的结论是



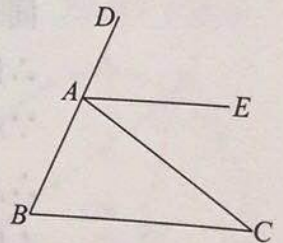
- (A) $a > b$ (B) $a + b > 0$ (C) $ac > 0$ (D) $|a| > |c|$

3. 方程组 $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$ 的解为

- (A) $\begin{cases} x = -1, \\ y = 7 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 3, \\ y = 6 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = -1, \\ y = 2 \end{cases}$

4. 如图,点 D 在 BA 的延长线上, $AE \parallel BC$. 若 $\angle DAC = 100^\circ$, $\angle B = 65^\circ$, 则 $\angle EAC$ 的度数为

- (A) 65° (B) 35°
(C) 30° (D) 40°



5. 广阔无垠的太空中有无数颗恒星,其中离太阳系最近的一颗恒星称为“比邻星”,它距离太阳系约 4.2 光年.光年是天文学中一种计量天体时空距离的长度单位,1 光年约为 9 500 000 000 000 千米,则“比邻星”距离太阳系约为

- (A) 4×10^{13} 千米 (B) 4×10^{12} 千米 (C) 9.5×10^{13} 千米 (D) 9.5×10^{12} 千米

6. 如果 $a^2+3a+1=0$, 那么代数式 $(\frac{a^2+9}{a}+6) \cdot \frac{2a^2}{a+3}$ 的值为

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

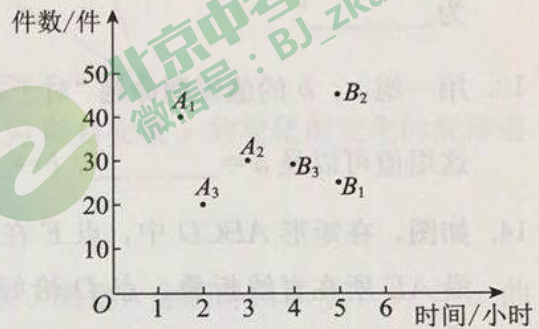
7. 三名快递员某天的工作情况如图所示, 其中点 A_1, A_2, A_3 的横、纵坐标分别表示甲、乙、丙三名快递员上午派送快递所用的时间和件数; 点 B_1, B_2, B_3 的横、纵坐标分别表示甲、乙、丙三名快递员下午派送快递所用的时间和件数.

有如下三个结论:

- ①上午派送快递所用时间最短的是甲;
②下午派送快递件数最多的是丙;
③在这一天中派送快递总件数最多的是乙.

上述结论中, 所有正确结论的序号是

- (A) ①② (B) ①③
(C) ② (D) ②③



8. 中国科学技术馆有“圆与非圆”展品, 涉及了“等宽曲线”的知识. 因为圆的任何一对平行切线的距离总是相等的, 所以圆是“等宽曲线”. 除了圆以外, 还有一些几何图形也是“等宽曲线”, 如勒洛三角形(图1), 它是分别以等边三角形的每个顶点为圆心, 以边长为半径, 在另两个顶点间画一段圆弧, 三段圆弧围成的曲边三角形. 图2是等宽的勒洛三角形和圆.

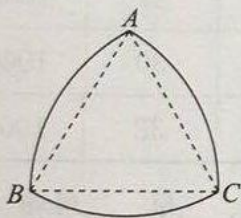


图1

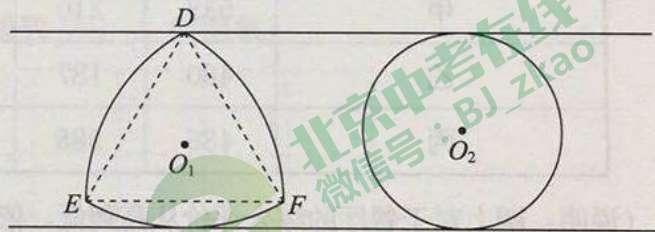


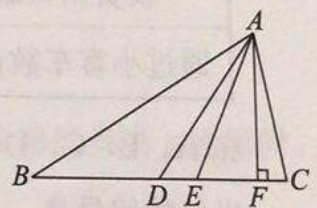
图2

下列说法中错误的是

- (A) 勒洛三角形是轴对称图形
(B) 图1中, 点A到BC上任意一点的距离都相等
(C) 图2中, 勒洛三角形上任意一点到等边三角形DEF的中心 O_1 的距离都相等
(D) 图2中, 勒洛三角形的周长与圆的周长相等

二、填空题(本题共16分, 每小题2分)

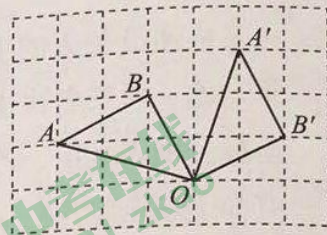
9. 如图, 在线段AD, AE, AF中, $\triangle ABC$ 的高是
线段_____.



10. 若 $\sqrt{x-3}$ 在实数范围内有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

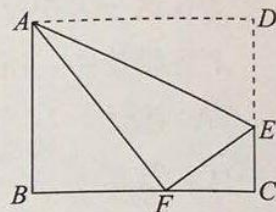
11. 分解因式: $ab^2 - 25a =$ _____.

12. 如图, 点 O, A, B 都在正方形网格的格点上, 将 $\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转后得到 $\triangle OA'B'$, 点 A, B 的对应点 A', B' 也在格点上, 则旋转角 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) 的度数为_____.



13. 用一组 a, b 的值说明命题“对于非零实数 a, b , 若 $a < b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”是错误的, 这组值可以是 $a =$ _____, $b =$ _____.

14. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 CD 上, 将矩形 $ABCD$ 沿 AE 所在直线折叠, 点 D 恰好落在边 BC 上的点 F 处. 若 $DE = 5, FC = 4$, 则 AB 的长为_____.



15. 小芸一家计划去某城市旅行, 需要做自由的攻略, 父母给她分配了一项任务: 借助网络评价选取该城市的一家餐厅用餐. 小芸根据家人的喜好, 选择了甲、乙、丙三家餐厅, 对每家餐厅随机选取了 1000 条网络评价, 统计如下:

评价条数 \ 等级	五星	四星	三星	二星	一星	合计
甲	538	210	96	129	27	1000
乙	460	187	154	169	30	1000
丙	486	388	81	13	32	1000

(说明: 网上对于餐厅的综合评价从高到低, 依次为五星、四星、三星、二星和一星.)

小芸选择在_____ (填“甲”、“乙”或“丙”) 餐厅用餐, 能获得良好用餐体验 (即评价不低于四星) 的可能性最大.

16. 高速公路某收费站出城方向有编号为 A, B, C, D, E 的五个小客车收费出口, 假定各收费出口每 20 分钟通过小客车的数量分别都是不变的. 同时开放其中的某两个收费出口, 这两个出口 20 分钟一共通过的小客车数量记录如下:

收费出口编号	A, B	B, C	C, D	D, E	E, A
通过小客车数量(辆)	260	330	300	360	240

在 A, B, C, D, E 五个收费出口中, 每 20 分钟通过小客车数量最多的一个收费出口的编号是_____.

三、解答题(本题共 68 分,第 17—22 题,每小题 5 分,第 23—26 题,每小题 6 分,第 27, 28 题,每小题 7 分)解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算: $|-5| + \sqrt{12} - 2\sin 60^\circ - (2019 - \pi)^0$.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 4(2x-1) < 3x+1, \\ \frac{3x-8}{5} < x. \end{cases}$$

19. 下面是小东设计的“作圆的一个内接矩形,并使其对角线的夹角为 60° ”的尺规作图过程.

已知: $\odot O$.

求作: 矩形 $ABCD$, 使得矩形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 且其角线 AC, BD 的夹角为 60° .

作法: 如图,

①作 $\odot O$ 的直径 AC ;

②以点 A 为圆心, AO 长为半径画弧, 交直线 AC 上方的圆弧于点 B ;

③连接 BO 并延长交 $\odot O$ 于点 D ;

④连接 AB, BC, CD, DA .

所以四边形 $ABCD$ 就是所求作的矩形.

根据小东设计的尺规作图过程,

(1) 使用直尺和圆规, 补全图形(保留作图痕迹);

(2) 完成下面的证明.

证明: \because 点 A, C 都在 $\odot O$ 上,

$$\therefore OA = OC.$$

同理 $OB = OD$.

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

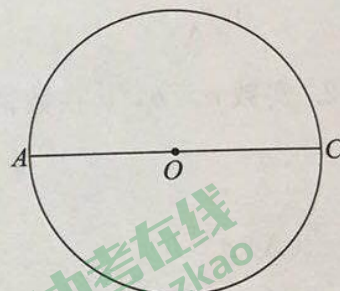
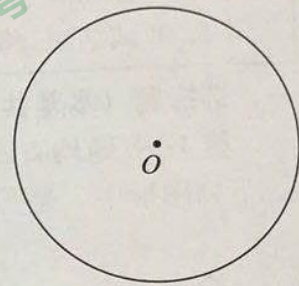
$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ (_____) (填推理的依据).

\therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形.

$$\because AB = \underline{\hspace{2cm}} = BO,$$

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$.

\therefore 四边形 $ABCD$ 是所求作的矩形.

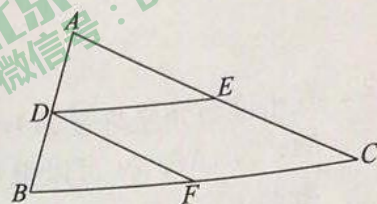


20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$.

- (1) 当 $c = b - 2$ 时, 利用根的判别式判断方程根的情况;
- (2) 若方程有两个相等的非零实数根, 写出一组满足条件的 b, c 的值, 并求此时方程的根.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, 点 D, E, F 分别是 AB, AC, BC 的中点, 连接 DE, DF .

- (1) 求证: 四边形 $DFCE$ 是菱形;
- (2) 若 $\angle A = 75^\circ, AC = 4$, 求菱形 $DFCE$ 的面积.

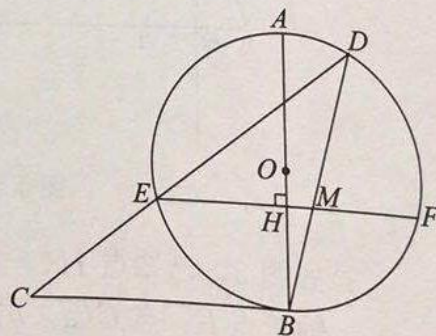


22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y = x + b$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$, 与 y 轴交于点 B . 双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 与直线 l 交于 P, Q 两点, 其中点 P 的纵坐标大于点 Q 的纵坐标.

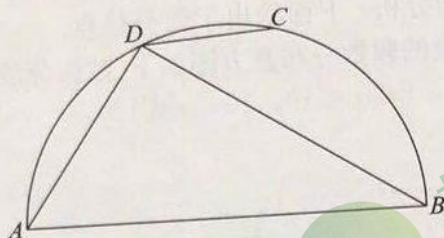
- (1) 求点 B 的坐标;
- (2) 当点 P 的横坐标为 2 时, 求 k 的值;
- (3) 连接 PO , 记 $\triangle POB$ 的面积为 S , 若 $\frac{1}{2} < S < 1$, 结合函数图象, 直接写出 k 的取值范围.

23. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, CB 与 $\odot O$ 相切于点 B . 点 D 在 $\odot O$ 上, 且 $BC = BD$, 连接 CD 交 $\odot O$ 于点 E . 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 H , 交 BD 于点 M , 交 $\odot O$ 于点 F .

- (1) 求证: $\angle MED = \angle MDE$;
- (2) 连接 BE , 若 $ME = 3, MB = 2$, 求 BE 的长.



24. 如图, \widehat{AB} 是直径 AB 所对的半圆弧, C 是 \widehat{AB} 上一定点, D 是 \widehat{AB} 上一动点, 连接 DA, DB, DC . 已知 $AB=5\text{cm}$, 设 D, A 两点间的距离为 $x\text{cm}$, D, B 两点间的距离为 $y_1\text{cm}$, D, C 两点间的距离为 $y_2\text{cm}$.



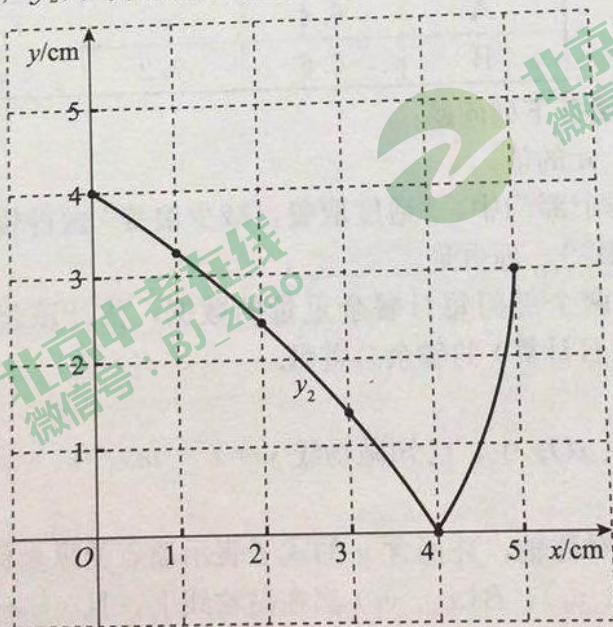
小腾根据学习函数的经验, 分别对函数 y_1, y_2 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究.

下面是小腾的探究过程, 请补充完整:

- (1) 按照下表中自变量 x 的值进行取点、画图、测量, 分别得到了 y_1, y_2 与 x 的几组对应值;

x/cm	0	1	2	3	4	5
y_1/cm	5	4.9		4	3	0
y_2/cm	4	3.32	2.47	1.4	0	3

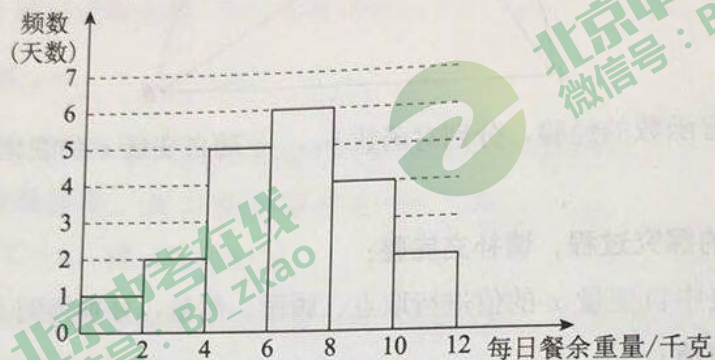
- (2) 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 描出补全后的表中各组数值所对应的点 $(x, y_1), (x, y_2)$, 并画出函数 y_1, y_2 的图象;



- (3) 结合函数图象, 解决问题: 连接 BC , 当 $\triangle BCD$ 是以 CD 为腰的等腰三角形时, DA 的长度约为 _____ cm .

25. 某公司的午餐采用自助的形式，并倡导员工“适度取餐，减少浪费”。该公司共有10个部门，且各部门的人数相同。为了解午餐的浪费情况，从这10个部门中随机抽取了A, B两个部门，进行了连续四周(20个工作日)的调查，得到这两个部门每天午餐浪费饭菜的重量，以下简称“每日餐余重量”(单位：千克)，并对这些数据进行了整理、描述和分析。下面给出了部分信息。

a. A部门每日餐余重量的频数分布直方图如下(数据分成6组： $0 \leq x < 2$, $2 \leq x < 4$, $4 \leq x < 6$, $6 \leq x < 8$, $8 \leq x < 10$, $10 \leq x \leq 12$):



b. A部门每日餐余重量在 $6 \leq x < 8$ 这一组的是:

6.1 6.6 7.0 7.0 7.0 7.8

c. B部门每日餐余重量如下:

1.4 2.8 6.9 7.8 1.9 9.7 3.1 4.6 6.9 10.8

6.9 2.6 7.5 6.9 9.5 7.8 8.4 8.3 9.4 8.8

d. A, B两个部门这20个工作日每日餐余重量的平均数、中位数、众数如下:

部门	平均数	中位数	众数
A	6.4	m	7.0
B	6.6	7.2	n

根据以上信息，回答下列问题:

(1) 写出表中 m, n 的值;

(2) 在A, B这两个部门中，“适度取餐，减少浪费”做得较好的部门是_____ (填“A”或“B”)，理由是_____;

(3) 结合A, B这两个部门每日餐余重量的数据，估计该公司(10个部门)一年(按240个工作日计算)的餐余总重量。

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = x^2 - mx + n$.

(1) 当 $m=2$ 时，

① 求抛物线的对称轴，并用含 n 的式子表示顶点的纵坐标;

② 若点 $A(-2, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 都在抛物线上，且 $y_2 > y_1$ ，则 x_2 的取值范围是_____;

(2) 已知点 $P(-1, 2)$ ，将点 P 向右平移4个单位长度，得到点 Q 。当 $n=3$ 时，若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点，结合函数图象，求 m 的取值范围。

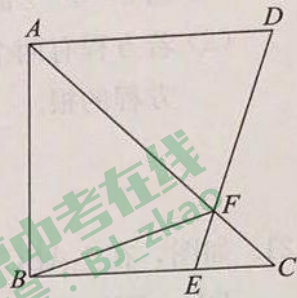
27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $BA=BC$. 将线段 AB 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到线段 AD , E 是边 BC 上的一动点, 连接 DE 交 AC 于点 F , 连接 BF .

(1) 求证: $FB=FD$;

(2) 点 H 在边 BC 上, 且 $BH=CE$, 连接 AH 交 BF 于点 N .

① 判断 AH 与 BF 的位置关系, 并证明你的结论;

② 连接 CN . 若 $AB=2$, 请直接写出线段 CN 长度的最小值.



28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于两个点 P, Q 和图形 W , 如果在图形 W 上存在点 M, N (M, N 可以重合) 使得 $PM=QN$, 那么称点 P 与点 Q 是图形 W 的一对平衡点.

(1) 如图 1, 已知点 $A(0, 3), B(2, 3)$.

① 设点 O 与线段 AB 上一点的距离为 d , 则 d 的最小值是 _____, 最大值是 _____;

② 在 $P_1(\frac{3}{2}, 0), P_2(1, 4), P_3(-3, 0)$ 这三个点中, 与点 O 是线段 AB 的一对平衡点的是 _____;

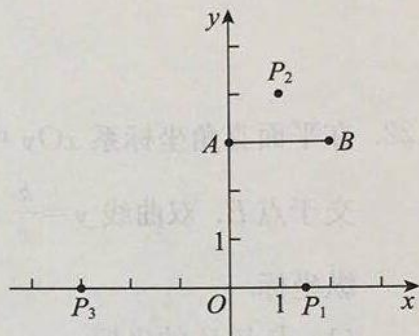


图 1

(2) 如图 2, 已知 $\odot O$ 的半径为 1, 点 D 的坐标为 $(5, 0)$. 若点 $E(x, 2)$ 在第一象限, 且点 D 与点 E 是 $\odot O$ 的一对平衡点, 求 x 的取值范围;

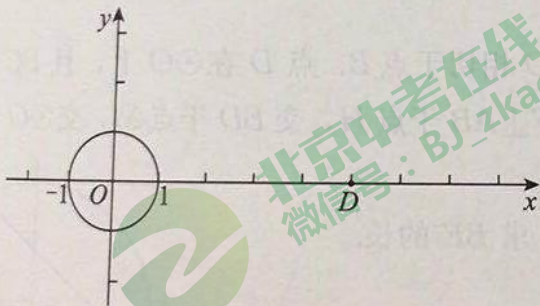


图 2

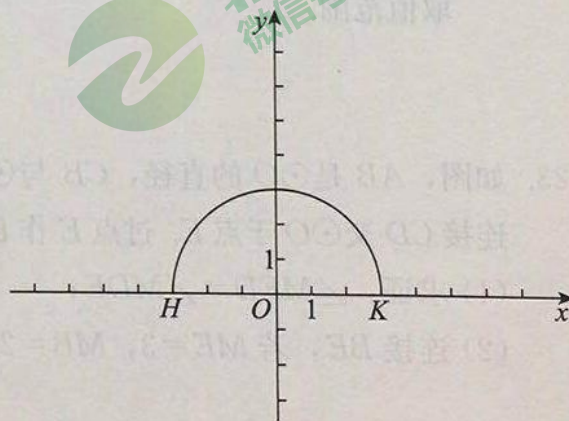


图 3

(3) 如图 3, 已知点 $H(-3, 0)$, 以点 O 为圆心, OH 长为半径画弧交 x 轴的正半轴于点 K . 点 $C(a, b)$ (其中 $b \geq 0$) 是坐标平面内一个动点, 且 $OC=5$, $\odot C$ 是以点 C 为圆心, 半径为 2 的圆. 若 \widehat{HK} 上的任意两个点都是 $\odot C$ 的一对平衡点, 直接写出 b 的取值范围.