2023 北京昌平一中高三（上）期中

数　学

本试卷分第一部分和第二部分两部分.考生务必将两部分的答案按要求答在答题纸相应题的后面.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 设集合 $A=\{x|x-1>0\}$，集合 $B=\{x|0<x\le 3\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(1,3)$　　B. $(1,3]$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

2. 若复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})\cdot z=2\mathrm{i}$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$（　）

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $1+\mathrm{i}$　　C. $-\mathrm{i}$　　D. $-1+\mathrm{i}$

3. 如果 $a<b<0$，那么下列不等式成立的是（　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $a^2<b^2$　　C. $\frac{a}{b}<1$　　D. $ab>b^2$

4. 下列函数中是增函数的是（　）

A. $f(x)=-x$　　B. $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$　　C. $f(x)=-\frac{1}{x}$　　D. $f(x)=\sqrt{x}$

5. 已知角 α 的终边经过点 $(-3,4)$，则 $\cos(\pi+\alpha)=$（　）

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a=7$，$b=8$，$\cos B=\frac{1}{7}$，则 $\angle A$ 的大小为（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

7. 已知两条不同的直线 l，m 和两个不同的平面 α，β，下列四个命题中正确的是（　）

A. 若 $l\parallel m$，$m\subset\alpha$，则 $l\parallel\alpha$　　B. 若 $l\parallel\alpha$，$m\subset\alpha$，则 $l\parallel m$

C. 若 $\alpha\perp\beta$，$l\subset\alpha$，则 $l\perp\beta$　　D. 若 $l\parallel\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

8. 设点 A，B，C 不共线，则“$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角是锐角”是“$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{BC}\right|$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

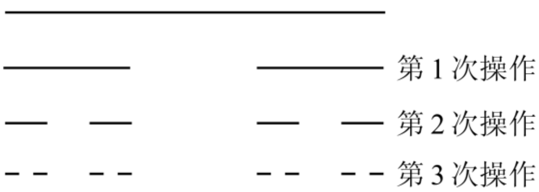
9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d<0$，且 $a_1^2=a_{11}^2$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最大值时的项数 n 的值为

（　）

A. 5　　　　B. 6　　　　C. 5 或 6　　　　D. 6 或 7

10. 我们可以用下面的方法在线段上构造出一个特殊的点集：如图，取一条长度为1的线段，第1次操作，将该线段三等分，去掉中间一段，留下两段；第 2 次操作，将留下的两段分别三等分，各去掉中间一段，留下四段；按照这种规律一直操作下去．若经过 n 次这样的操作后，去掉的所有线段的长度总和大于 $\frac{99}{100}$，则 n 的最小值为（　）

（参考数据：$\lg 2 \approx 0.301$，$\lg 3 \approx 0.477$）



A. 9　　　　B. 10　　　　C. 11　　　　D. 12

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.把答案填在答题卡上.

11. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}=(2,3)$，$\vec{a}-\vec{b}=(-2,1)$，则 $\vec{a}-2\vec{b}=$________.

12. 函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的最小正周期是__________.

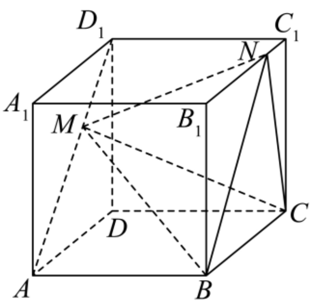
13. 已知不等式 $\frac{2x}{x^2+1} \le a$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立，则实数 a 的最小值是________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+1, x \le 1\\ ax, x>1\end{cases}$.

①当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为__________；

②若 $f(x)$ 恰有两个极值点，则 a 的取值范围是__________.

15. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 上.



给出下列四个结论：

① MN 的最小值为 2；

②四面体 $NMBC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$；

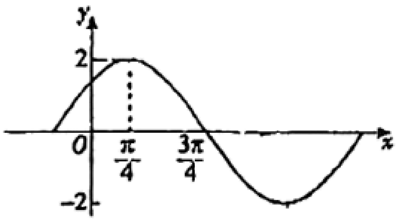
③有且仅有一条直线 MN 与 AD_1 垂直；

④存在点 M ， N ，使 $\triangle MBN$ 为等边三角形.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.解答题应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$ 的部分图象如图所示.



（1）求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，求 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值和最小值.

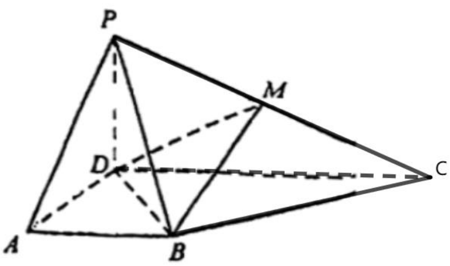
17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ，且 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$.

（1）求角 A 的大小；

（2）再从以下三组条件中选择一组条件作为已知条件，使三角形存在且唯一确定，并求 $\triangle ABC$ 的面积.

第①组条件： $a=\sqrt{19},c=5$；第②组条件： $\cos C=\dfrac{1}{3},c=4\sqrt{2}$ ；第③组条件： AB 边上的高 $h=\sqrt{3},a=3$.注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$， $AD\perp DC$， $AB\parallel DC$， $AB=\dfrac{1}{2}DC$，$PD=AD=1$，M 为棱 PC 的中点.



（1）证明： $BM\parallel$ 平面 PAD；

（2）若 $PC=\sqrt{5}$， $AB=1$，

（i）求二面角 $P-DM-B$ 的余弦值；

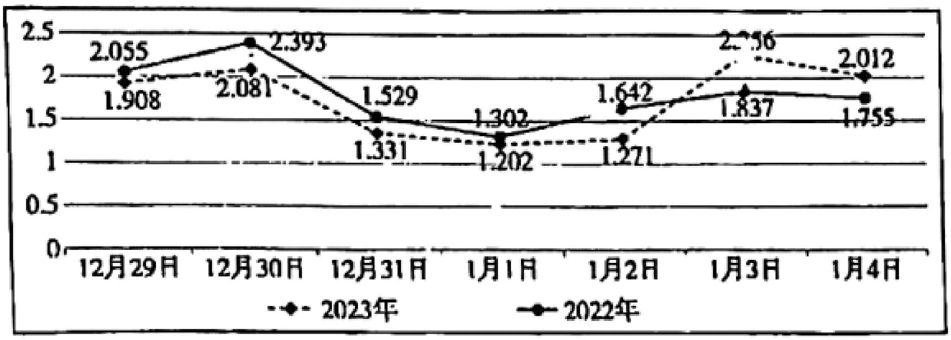
（ii）在线段 PA 上是否存在点 Q ，使得点 Q 到平面 BDM 的距离是 $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$ ？若存在，求出 $\dfrac{PQ}{PA}$ 的值；若不

存在，说明理由.

19. 交通拥堵指数（TPI）是表征交通拥堵程度的客观指标，用 TPI 表示，TPI 越大代表拥堵程度越高.某平台计算 TPI 的公式为：TIP=$\dfrac{\text{实际行程时间}}{\text{畅通行程时间}}$，并按 TPI 的大小将城市道路拥堵程度划分如下表所示的 4 个等级：

TPI	$[1,1.5)$	$[1.5,2)$	$[2,4)$	不低于 4
拥堵等级	畅通	缓行	拥堵	严重拥堵

某市 2023 年元旦及前后共 7 天与 2022 年同期的交通高峰期城市道路 TPI 的统计数据如下图：



（1）从 2022 年元旦及前后共 7 天中任取 1 天，求这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”的概率；

（2）从 2023 年元旦及前后共 7 天中任取 3 天，将这 3 天中交通高峰期城市道路 TPI 比 2022 年同日 TPI 高的天数记为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$；

（3）把 12 月 29 日作为第 1 天，将 2023 年元旦前后共 7 天的交通高峰期城市道路 TPI 依次记为 $a_1,a_2,\cdots,a_7$，将 2022 年同期 TPI 依次记为 $b_1,b_2,\cdots,b_7$，记 $c_i=a_i-b_i\,(i=1,2,\cdots,7)$，$\overline{c}=\dfrac{c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7}{7}$.请直接写出 $\left|c_i-\overline{c}\right|$ 取得最大值时 i 的值.

20. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax+\dfrac{1}{2}x^2$，其中 $a>-1$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

（3）若 $f(x)\geq\dfrac{1}{2}x^2+x+b$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 $b-a$ 的最大值.

21. 已知 n 为正整数，数列 X：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，记 $S(X)=x_1+x_2+\cdots+x_n$．对于数列 X，总有 $x_k\in\{0,1\}$，$k=1,2,\cdots,n$，则称数列 X 为 n 项 0-1 数列．若数列 A：$a_1,a_2,\cdots,a_n$，B：$b_1,b_2,\cdots,b_n$，均为 n 项 0-1 数列，定义数列 $A*B$：$m_1,m_2,\cdots,m_n$，其中 $m_k=1-\left|a_k-b_k\right|$，$k=1,2,\cdots,n$．

（1）已知数列 A：1，0，1，B：0，1，1，直接写出 $S\left(A^*A\right)$ 和 $S\left(A^*B\right)$ 的值；

（2）若数列 A，B 均为 n 项 0-1 数列，证明：$S\left(\left(A*B\right)*A\right)=S\left(B\right)$；

（3）对于任意给定的正整数 n，是否存在 n 项 0-1 数列 A，B，C，使得 $S\left(A*B\right)+S\left(A*C\right)+S\left(B*C\right)=2n$，并说明理由

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】C

【分析】集合的基本运算问题.

【详解】因为 $A=\{x|x-1>0\}$，所以 $A=\{x|x>1\}$，

且 $B=\{x|0<x\le 3\}$，所以 $A\cup B=\{x|x>0\}=(0,+\infty)$.

故选：C

2.【答案】A

【分析】由 $(1+\mathrm{i})\cdot z=2\mathrm{i}$ 知 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，运用复数的除法即可求出 z，根据共轭复数的概念即可求解.

【详解】因为 $(1+\mathrm{i})\cdot z=2\mathrm{i}$，所以 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{2+2\mathrm{i}}{2}=1+\mathrm{i}$，

所以 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$.

故选：A

3.【答案】D

【分析】根据不等式的性质即可逐一判断.

【详解】由 $a<b<0$ 可得：$0>\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0\Rightarrow a^2>b^2,\dfrac{a}{b}>1$，故 A，B，C 错误，$ab-b^2=b(a-b)>0\Rightarrow ab>b^2$，故 D 正确.

故选：D

4.【答案】D

【分析】利用基本函数的单调性，逐项判断即得.

【详解】对于 A，函数 $f(x)=-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，A 不是；

对于 B，函数 $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，B 不是；

对于 C，函数 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，该函数在定义域上不单调，C 不是；

对于 D，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，D 是.

故选：D

5.【答案】C

【分析】根据给定条件，利用三角函数定义、结合诱导公式计算即得.

【详解】由角α的终边经过点$\left(-3,4\right)$，得该点到原点距离$r=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$，$\cos\alpha=\frac{-3}{r}=-\frac{3}{5}$，

所以$\cos\left(\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

故选：C

6.【答案】B

【分析】利用正弦定理结合三角形的特点计算即可.

【详解】因为在$\triangle ABC$中，A、$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$\cos B=\frac{1}{7}\Rightarrow\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

由正弦定理可知$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$，

又$a<b\Rightarrow A<B$，所以$A=\frac{2\pi}{3}$不成立.

故选：B

7.【答案】D

【分析】根据直线与平面内直线平行，判断直线与平面的关系可判断 A，由线面平行的性质可判断 B，由平面垂直的性质可判断 C，根据线面平行的性质及面面垂直的判定判断 D.

【详解】若$l\parallel m$，$m\subset\alpha$，则$l\parallel\alpha$或$l\subset\alpha$，故 A 错误；

若$l\parallel\alpha$，$m\subset\alpha$，则$l\parallel m$或l,m为异面直线，故 B 错误；

若$\alpha\perp\beta$，$l\subset\alpha$，则$l\perp\beta$或$l\parallel\beta$或l与β斜交，故 C 错误；

若$l\parallel\alpha$，则α内必有一直线l'满足$l'\parallel l$，又$l\perp\beta$，所以$l'\perp\beta$，又$l'\subset\alpha$，所以$\alpha\perp\beta$，故 D 正确.

故选：D

8.【答案】C

【分析】根据向量的运算结合充要条件分析判断.

【详解】设$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为θ，

当$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{BC}\right|$时，因为$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|$，

可得$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，

整理得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，即$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\theta>0$，则$\cos\theta>0$，

且点A,B,C不共线，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角；

当$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角时，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\theta>0$，

所以$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，可得$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|$，

即$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{BC}\right|$；

所以“$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{BC}\right|$”是“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角是锐角”的充分必要条件.

故选：C.

9.【答案】C

【分析】

利用等差数列性质得到$a_6=0$，再判断S_5或S_6是最大值.

【详解】由$a_1^2=a_{11}^2$，可得$\left(a_1+a_{11}\right)\left(a_1-a_{11}\right)=0$，

因为$d<0$，所以$a_1-a_{11}\neq 0$，所以$a_1+a_{11}=0$，又$a_1+a_{11}=0$，所以$a_6=0$.

因为$d<0$，所以$\left\{a_n\right\}$是递减数列，所以$a_1>a_2>\cdots>a_5>a_6=0>a_7>a_8>\cdots$，显然前5项和或前6项和最大，

故选：C.

【点睛】本题考查了等差数列的性质，S_n的最大值，将S_n的最大值转化为$\left\{a_n\right\}$中项的正负是解题的关键，属于中档题.

10.【答案】D

【分析】根据变化规律可知每次去掉的线段长度成等比数列，利用等比数列求和公式可求得第n次后，去掉的线段长度总和为$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$，由$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n>\frac{99}{100}$，结合对数运算可解不等式求得$n>11.4$，由此可得结果.

【详解】第1次操作，去掉的线段长度为$\frac{1}{3}$；第2次操作，去掉的线段长度为$\frac{2}{9}$；第3次操作，去掉的线段长度为$\frac{4}{27}$，依次类推，可知第n次操作去掉的线段长度为$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，

即每次去掉的线段长度成等比数列，

$\therefore$第n次后，去掉的线段长度总和为$\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

由$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n>\frac{99}{100}$得：$\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{1}{100}$，

$\therefore n>\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{100}=-\dfrac{\lg 100}{\lg\frac{2}{3}}=-\dfrac{2}{\lg 2-\lg 3}\approx-\dfrac{2}{0.301-0.477}\approx 11.4$，

$\therefore n$的最小值为12.

故选：D.

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.把答案填在答题卡上.

11.【答案】$\left(-4,0\right)$

【分析】首先计算出$\vec{a}$，$\vec{b}$，再进行线性运算即可.

【详解】因为$\vec{a}+\vec{b}=\left(2,3\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(-2,1\right)$，

两式相加得$2\vec{a}=\left(0,4\right)$，即$\vec{\boldsymbol{a}}=\ 0,2\ $，$\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{a}=\left(2,1\right)$

所以$\vec{a}-2\vec{b}=\left(-4,0\right)$，

故答案为：$\left(-4,0\right)$.

12.【答案】$\frac{\pi}{2}$.

【分析】将所给的函数利用降幂公式进行恒等变形，然后求解其最小正周期即可.

【详解】函数$f\left(x\right)=\sin^2 2x=\frac{1-cos4x}{2}$，周期为$\frac{\pi}{2}$

【点睛】本题主要考查二倍角的三角函数公式、三角函数的最小正周期公式，属于基础题.

13.【答案】1

【分析】利用基本不等式，结合分类讨论的思想，可得答案.

【详解】当$x>0$时，$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\le\frac{2}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}}=1$，当且仅当$x=1$时，等号成立；

当$x\le0$时，显然$\frac{2x}{x^2+1}\le0$.

综上所述，$a\ge1$.

故答案为：1.

14.【答案】 ①. 2 ②. $\left(0,2\right)$

【分析】①验证分段处函数值可知$f\left(x\right)$为连续函数，由单调性可确定$x=\frac{1}{2}$和$x=1$是$f\left(x\right)$的极值点，由此可得极值点个数；

②验证分段处函数值可知$f\left(x\right)$为连续函数，根据一次函数和二次函数单调性可确定$x=1$和$x=\frac{a}{2}$必为$f\left(x\right)$的两个极值点，得到$\frac{a}{2}<1$；根据二次函数的单调性，结合极值点定义可知$f\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，即$a>0$；由此可得a的范围.

【详解】①当 $a=1$ 时， $f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2+x+1, x\le 1\\ x, x>1\end{cases}$ ；

$\because f(1)=1$ ，$\therefore f\quad x$ 为连续函数；

$\because f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 和 $x=1$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，即 $f\left(x\right)$ 的极值点个数为 2 ；

②$\because f\left(1\right)=a$ ，$\therefore f\quad x$ 为连续函数，

$\because f\left(x\right)=ax\left(x>1\right)$ 为单调函数，$\therefore f\quad x$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上无极值点；

又 $f\left(x\right)=-x^2+ax+1$ 在 $\left(-\infty,1\right)$ 上至多有一个极值点，

$\therefore x=1$ 和 $x=\frac{a}{2}$ 必为 $f\left(x\right)$ 的两个极值点，$\therefore\frac{a}{2}<1$，解得：$a<2$，

又 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\frac{a}{2},1\right)$ 上单调递减，$\therefore f\quad x$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，$\therefore a>0$；

综上所述：实数 a 的取值范围为 $\left(0,2\right)$.

故答案为：$\left(0,2\right)$.

【点睛】易错点睛：本题考查函数极值点的定义、根据极值点个数求解参数范围的问题；本题易错的点在于根据极值点个数求解参数范围时，确定 $x=1$ 和 $x=\frac{a}{2}$ 为 $f\left(x\right)$ 的两个极值点后，忽略在极值点左右两侧函数单调性需发生改变，导致丢失 $a>0$ 的范围.

15.【答案】①②④

【分析】对于①，利用直线之间的距离即可求解；对于②，以 M 为顶点，$\triangle NBC$ 为底面即可求解；对于③，利用直线的垂直关系即可判断；对于④，利用空间坐标即可求解.

【详解】对于①，由于 M 在 AD_1 上运动，N 在 B_1C_1 上运动，所以 $\left|MN\right|$ 的最小值就是两条直线之间距离 $\left|D_1C_1\right|$，而 $\left|D_1C_1\right|=2$，所以 MN 的最小值为 2；

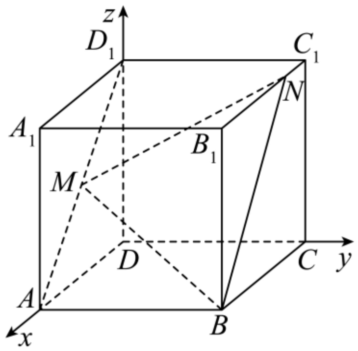
对于②，$V_{M-BNC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BNC}\cdot\left|D_1C_1\right|=\frac{2}{3}\cdot S_{\triangle BNC}$，而 $S_{\triangle BNC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，所以四面体 $NMBC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$；

对于③，由题意可知，当 M 与 D_1 重合，N 与 C_1 重合时，$D_1C_1\perp AD_1$，又根据正方体性质可知，$AD_1\perp A_1B_1CD$，所以当 M 为 AD_1 中点，N 与 B_1 重合时，此时 $MN\perp AD_1$，故与 AD_1 垂直的 MN 不唯一，③错误；

对于④，当 $\triangle MBN$ 为等边三角形时，$BM=BN$，则此时 $AM=B_1N$.所以只需要 BM 与 BN 的夹角能等

于 $\frac{\pi}{3}$ 即可.

以 D 为原点，DA、DC、DD_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如下图，



设 $AM=B_1N=n$，则由题意可得 $M\left(2-\frac{n}{\sqrt{2}},0,\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$，$B(2,2,0)$，$N(2-n,2,2)$，则可得

$\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{n}{\sqrt{2}},-2,\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$，$\overrightarrow{BN}=(-n,0,2)$，则 $\cos\angle MBN=\frac{1}{2}=\left|\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BN}\right|}\right|=\left|\frac{\frac{n^2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}n}{n^2+4}\right|$，整理可得

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)n^2-2n+2\sqrt{2}=0$，该方程看成关于 n 的二次函数，

$\Delta=4-4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}-4>0$，所以存在 n 使得 $\triangle MBN$ 为等边三角形.

故答案为：①②④

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.解答题应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) 最大值为 1，最小值为 $-\frac{1}{2}$.

【分析】(1) 根据函数图象得到 $\frac{T}{4}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，求得周期，进而得到 ω，再根据点 $\left(\frac{\pi}{4},2\right)$ 在函数图象上求解;

(2) 由 (1) 得到 $g(x)=\cos2x$，再根据 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 求解.

【小问 1 详解】

解：由图象知：$\frac{T}{4}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，则 $T=2\pi$，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$，则 $f(x)=2\sin(x+\varphi)$，

因为点$\left(\frac{\pi}{4},2\right)$在函数图象上，

所以$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=1$，则$\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

解得$\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$，又$0<\varphi<\pi$，

所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$，则$f\left(x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$；

【小问 2 详解】

由（1）知：$g\left(x\right)=f\left(x\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$，

因为$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，所以$2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$\cos 2x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

所以$g\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$上的最大值为 1，最小值为$-\frac{1}{2}$.

17.【答案】（1）$A=\frac{\pi}{3}$

（2）答案见详解

【分析】（1）结合正弦定理边化角可直接求解；

（2）若选①结合余弦定理求得b不唯一；若选②，由A,C固定可确定B唯一，结合第三角公式求得$\sin B$，再由正弦面积公式即可求解；若选③，由正弦定理可求得$b=2$，结合余弦定理可求得c，再由正弦面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

由$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A\Rightarrow\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，

因为$\sin B\neq 0$，化简得$\tan A=\sqrt{3}$，又$A\in\left(0,\pi\right)$

$A=\frac{\pi}{3}$

【小问 2 详解】

若选①，则$a=\sqrt{19}$，$c=5$，$A=\frac{\pi}{3}$，

由余弦定理可得$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$，代入数据化简得$b=2$或 3，故选①不成立；

若选②，则$\cos C=\frac{1}{3}$，$c=4\sqrt{2}$，$A=\frac{\pi}{3}$，求得$\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，解得$a=3\sqrt{3}$，

由 $\sin B=\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$，

因为 $A=\dfrac{\pi}{3}$， $\cos C=\dfrac{1}{3}$， C 唯一，则 B 唯一，三角形存在且唯一确定，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}=3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$；

若选③，由 AB 边上的高 $h=\sqrt{3}$ 可得 $\sin A=\dfrac{h}{b}$，解得 $b=2$，又 $a=3$，

由余弦定理可得 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$，代值化简得 $c=1+\sqrt{6}$ 或 $1-\sqrt{6}$（舍去），

三角形存在且唯一确定，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\times\left(1+\sqrt{6}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2}$

18.【答案】(1) 证明见详解

(2)(i) $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，(ii) 存在点 Q，$\dfrac{PQ}{PA}=\dfrac{2}{3}$.

【分析】(1) 取 PD 中点 E，可证四边形 $ABME$ 是平行四边形，可得 $BM//AE$，得证；

(2)(i) 建立空间直角坐标系，利用向量法求解，(ii) 假设存在点 Q 到平面 BDM 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$，利用点到面距离的向量法求解即可.

【小问 1 详解】

如图，取 PD 中点 E，连接 ME， AE，

因为 M 是 PC 中点，所以 $ME//DC$， $ME=\dfrac{1}{2}DC$，

又 $AB//DC$， $AB=\dfrac{1}{2}DC$，

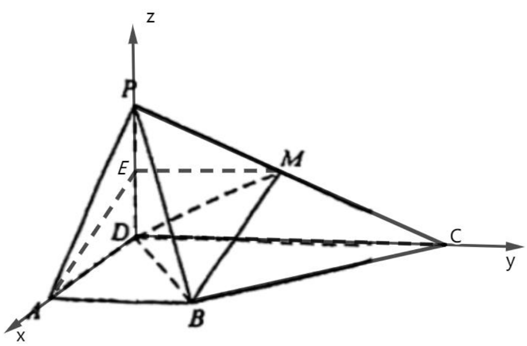
$\therefore ME//AB$， $ME=AB$，

所以四边形 $ABME$ 是平行四边形，

$\therefore BM//AE$，

又 $AE\subset$ 平面 PAD， $BM\not\subset$ 平面 PAD，

$\therefore BM//$ 平面 PAD.



【小问 2 详解】

$\because AB=1$，$\therefore DC=2$，又 $PD=1$，$PC=\sqrt{5}$，

$\therefore PC^2=PD^2+DC^2$，则 $PD\perp DC$，

又平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PDC\cap$ 平面 $ABCD=DC$，

$\therefore PD\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PD\perp AD$，又 $AD\perp DC$，

所以 PD，AD，DC 两两互相垂直，

如图，以点 D 为坐标原点，DA，DC，DP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,1)$，$M\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$，

（i）设平面 BDM 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y=0\\ y+\dfrac{1}{2}z=0\end{cases}$，令 $y=1$，可得 $x=-1$，$z=-2$，

$\therefore \vec{m}=(-1,1,-2)$，

又平面 PDM 的一个法向量为 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，

$\therefore \cos\vec{m},\overrightarrow{DA}=\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\vec{m}||\overrightarrow{DA}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{1+1+4}\times 1}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

所以二面角 $P-DM-B$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

（ii）假设线段 PA 上存在点 Q，使得点 Q 到平面 BDM 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$，

设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$(0\le\lambda\le 1)$，$\therefore \overrightarrow{PQ}=(\lambda,0,-\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PB}=(\lambda,0-\lambda)-(1,1,-1)=(\lambda-1,-1,1-\lambda)$，

由（i）知平面 BDM 的一个法向量为 $\vec{m}=(-1,1,-2)$，

所以点 Q 到平面 BDM 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{BQ}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|}=\dfrac{|\lambda-2|}{\sqrt{6}}$，

则 $\dfrac{|\lambda-2|}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$，解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{10}{3}$，

又 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，所以 $\lambda=\dfrac{2}{3}$，

即存在点Q到平面BDM的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{9}$，且$\frac{PQ}{PA}=\frac{2}{3}$.

19.【答案】（1）$\frac{2}{7}$；

（2）分布列见解析，$E\left(X\right)=\frac{6}{7}$；

（3）6.

【分析】（1）根据统计数据，求得 7 天中“拥堵”的天数，根据古典概型概率计算公式即可求得结果；

（2）根据统计数据，求得X的取值，再求对应的概率、分布列以及数学期望即可；

（3）求得$c_1,c_2,\cdots,c_7$，$\bar{c}$，再求$\left|c_i-\bar{c}\right|$取得最大值时 i 的值即可.

【小问 1 详解】

根据统计数据可得：2022 年元旦及前后共 7 天中，共有 2 天交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”；

设 7 天中任取 1 天，这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”的概率为P，

则$P=\frac{2}{7}$；

【小问 2 详解】

根据统计数据可得：2023 年元旦及前后共 7 天中，交通高峰期城市道路 TPI 比 2022 年同日 TPI 高的天数共有 2 天；

故$X=0,1,2$，

$P\left(X=0\right)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$；$P\left(X=1\right)=\frac{C_5^2\cdot C_2^1}{C_7^3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$；$P\left(X=2\right)=\frac{C_5^1\cdot C_2^2}{C_7^3}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$；

故X的分布列如下所示：

X	0	1	2
$P\left(X\right)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$E\left(X\right)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$；

【小问 3 详解】

由统计数据可知：

$a_1=1.908,a_2=2.081,a_3=1.331,a_4=1.202,a_5=1.271,a_6=2.256,a_7=2.012$

$b_1=2.055,b_2=2.393,b_3=1.529,b_4=1.302,b_5=1.642,b_6=1.837,b_7=1.755$，

又$c_i=a_i-b_i$，

故$c_1=-0.147,c_2=-0.312,c_3=-0.918,c_4=-0.100,c_5=-0.371,c_6=0.419,c_7=0.257$

$\overline{c}=\frac{c_1+c_2+\cdots+c_7}{7}=\frac{-1.172}{7}\approx-0.167$，

故$\left|c_i-\overline{c}\right|$取得最大值时，$i=6$.

20.【答案】（1）$y=x+1$

（2）极小值为$f\left(0\right)=1$，无极大值.

（3）$1+\frac{1}{\mathrm{e}}$

【分析】（1）由导数的几何意义得出切线方程；

（2）利用导函数求出函数的单调性，进而得出极值；

（3）将不等式恒成立转化成函数$h(x)=\mathrm{e}^x-\left(a+1\right)x-b$的最小值恒成立问题，化简整理可得$b-a\le1-(a+1)\ln(a+1)$，构造函数$F(x)=1-x\ln x(x>0)$并求得其最大值即可得出$b-a$的最大值.

【小问1详解】

当$a=0$时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2,f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x+x$，$f\left(0\right)=1,f'\left(0\right)=1$.

即曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程为$y=x+1$.

【小问2详解】

当$a=1$时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x+\frac{1}{2}x^2$，则$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-1+x$；

令$g(x)=f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-1+x$，则$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^x+1>0$，即$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增；

又易知$f'(0)=0$，所以当$x\le0$时，$f'(x)\le f'(0)=0$，当$x>0$时，$f'(x)>0$；

即函数$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增；

即函数$f\left(x\right)$的极小值为$f\left(0\right)=1$，无极大值.

【小问3详解】

$f\left(x\right)\ge\frac{1}{2}x^2+x+b$对于$x\in\mathbf{R}$恒成立，可得$\mathrm{e}^x-\left(a+1\right)x-b\ge0$在$x\in\mathbf{R}$恒成立；

令$h(x)=\mathrm{e}^x-\left(a+1\right)x-b$，则$h'(x)=\mathrm{e}^x-\left(a+1\right)$，又$a>-1$，

由$h'(x)=\mathrm{e}^x-\left(a+1\right)=0$可解得$x=\ln(a+1)$，

易知当$x<\ln(a+1)$时，$h'(x)<0$，当$x>\ln(a+1)$时，$h'(x)>0$；

所以$h(x)$在$\left(-\infty,\ln(a+1)\right)$上单调递减，在$\left(\ln(a+1),+\infty\right)$上单调递增，

因此$h(x)$在$x=\ln(a+1)$处取得极小值，

也是最小值为$h\left(\ln\left(a+1\right)\right)=\mathrm{e}^{\ln(a+1)}-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b=\left(a+1\right)-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b$；

易知$\left(a+1\right)-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b\ge0$，所以可得$b-a\le1-(a+1)\ln(a+1)$，

令 $F(x)=1-x\ln x(x>0)$，则 $F'(x)=-\ln x-1$，

因此当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$F'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$F'(x)<0$；

所以 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递减；

即 $F(x)\max=F(\frac{1}{\mathrm{e}})=1+\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $b-a\le 1+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

故 $b-a$ 的最大值为 $1+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

【点睛】方法点睛：不等式恒成立问题，一般情况下将不等式化简变形并通过构造函数求得函数在定义域内的最值，再根据题意求解即可得出结论.

21.【答案】（1）$S\left(A^{*}A\right)=3$，$S\left(A^{*}B\right)=1$

（2）见解析　（3）见解析

【分析】（1）根据数列 $A*B$ 的定义分别求出 $A*A$，$A*B$，即可得出答案；

（2）记数列 $A*B$：$c_1,c_2,\cdots,c_n$，数列 $\left(A*B\right)*A$：$d_1,d_2,\cdots,d_n$，分 $a_k=1$ 和 $a_k=0$ 两种情况讨论，从而可得出结论；

（3）分 n 是奇数和偶数两种情况讨论，根据定义分析运算，从而可得出结论.

【小问 1 详解】

解：因为数列 A：1，0，1，B：0，1，1，

所以数列 $A*A$：$1,1,1$，数列 $A*B$：$0,0,1$，

所以 $S\left(A^{*}A\right)=3$，$S\left(A^{*}B\right)=1$；

【小问 2 详解】

证明：对于两个 0-1 数列 A：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 B：$b_1,b_2,\cdots,b_n$，

记数列 $A*B$：$c_1,c_2,\cdots,c_n$，对于 $c_k,\left(k=1,2,\cdots,n\right)$，

若 $a_k=1$，则此时 $\left|a_k-b_k\right|=1-b_k,c_k=1-\left|a_k-b_k\right|=b_k$；

若 $a_k=0$，则此时 $\left|a_k-b_k\right|=b_k,c_k=1-\left|a_k-b_k\right|=1-b_k$，

故对于数列 $\left(A*B\right)*A$：$d_1,d_2,\cdots,d_n$，考虑 d_k 的值 $\left(k=1,2,\cdots,n\right)$：

若 $a_k=1$，则 $d_k=c_k=b_k$；

若 $a_k=0$，则 $d_k=1-c_k=1-\left(1-b_k\right)=b_k$，

所以 $\left(A*B\right)*A$ 与 B 是同一数列，

所以 $S\left(\left(A*B\right)*A\right)=S\left(B\right)$；

【小问 3 详解】

解：若n是奇数，则不存在满足条件的n项0-1数列A，B，C，证明如下：

对于3个n项0-1数列A，B，C，

记$x_i=3-|a_i-b_i|-|b_i-c_i|-|c_i-a_i|,(i=0,1,2,\cdots,n)$，

则$S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)=x_1+x_2+\cdots+x_n$，

当$a_i=b_i=c_i$时，$x_i=3-|a_i-b_i|-|b_i-c_i|-|c_i-a_i|=3$，

当a_i,b_i,c_i中有一个不同于其他两个时，$x_i=3-|a_i-b_i|-|b_i-c_i|-|c_i-a_i|=1$，

所以x_i是奇数，

则$S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)=x_1+x_2+\cdots+x_n$为奇数个奇数之和，仍为奇数，不可能为$2n$；

若n为偶数，即$n=2k\left(k\in\mathrm{N}_+\right)$，

可构造：$A:\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n个}$，$B:\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n个}$，$C:\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k个},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k个}$，

此时数列$A*B$为$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n个}$，数列$A*C$，$B*C$相同，都是$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k个},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k个}$，

所以有$S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)=n+k+k=2n$，

综上所述，当n为偶数时，$S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)$有可能为$2n$，

当n为奇数时，不可能成立.

【点睛】本题考查了数列的新定义，考查了学生的逻辑思维能力，解题的关键在于对新定义的理解，有一定的难度.