

人大附中 2023~2024 学年度第一学期高一年级数学期中练习

2023 年 11 月 1 日

制卷人：宁少华 王鼎

审卷人：梁丽平

说明：本试卷分 I 卷和 II 卷，I 卷 18 道题，共 100 分；II 卷 8 道题，共 50 分。

I 卷、II 卷共 26 题，合计 150 分，考试时间 120 分钟。

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。



I 卷（共 18 道题，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置。）

- 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，则 $A \cap B = (\quad)$
 - $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
 - $\{1, 2\}$
 - $\{0, 1, 2\}$
 - $\{-1, 3\}$
- 已知命题 $P: \exists x < 0, x^2 + x \leq -\frac{1}{2}$ ，则 $\neg P$ 是 (\quad)
 - $\forall x \geq 0, x^2 + x > -\frac{1}{2}$
 - $\exists x \geq 0, x^2 + x \leq -\frac{1}{2}$
 - $\forall x < 0, x^2 + x > -\frac{1}{2}$
 - $\exists x < 0, x^2 + x > -\frac{1}{2}$
- 下列函数中，在定义域上单调递减的是 (\quad)
 - $y = x - 1$
 - $y = -|x|$
 - $y = -x^2 - 2x - 1$
 - $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$
- 已知 $x, y \in \mathbf{R}$ ，若 $x^2 + y^2 = 2$ ，则 (\quad)
 - xy 的最大值为 1
 - xy 的最大值为 2
 - xy 的最小值为 1
 - xy 的最小值为 2
- 已知关于 x 的方程 $x^2 - 3x + a = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 ，且 $|x_1 - x_2| = 1$ ，则 a 的值为 (\quad)
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
- 已知函数 $f(x) = x^2 - 1$ ， $g(x) = (x+1)^2$ ，下表列出了 $x = m$ 时各函数的取值，则 (\quad)

x	$f(x)$	$g(x)$	$f[g(x)]$
m	8	4	n

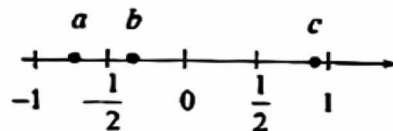
- $m = 3, n = 15$
- $m = -3, n = 15$
- $m = 3, n = 81$
- $m = -3, n = 81$

7. “函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上不是增函数”的一个充要条件是 ()

- A. “存在 $a, b \in [1, 2]$, 使得 $a < b$ 且 $f(a) = f(b)$ ”
- B. “存在 $a, b \in [1, 2]$, 使得 $a < b$ 且 $f(a) \geq f(b)$ ”
- C. “存在 $a \in (1, 2]$, 使得 $f(a) \leq f(1)$ ”
- D. “存在 $a \in (1, 2)$, 使得 $f(a) \geq f(2)$ ”

8. 如图, 数轴上给出了表示实数 a, b, c 的三个点, 下列判断正确的是 ()

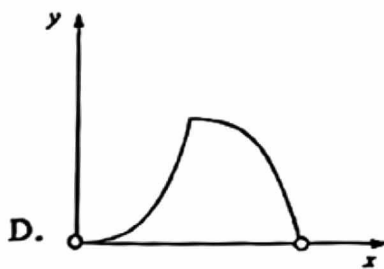
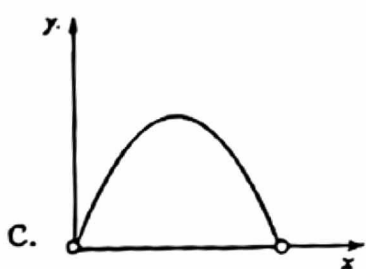
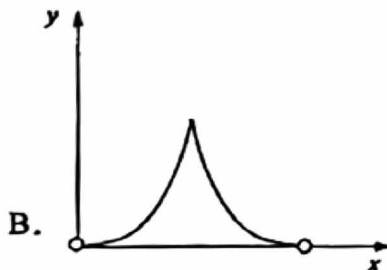
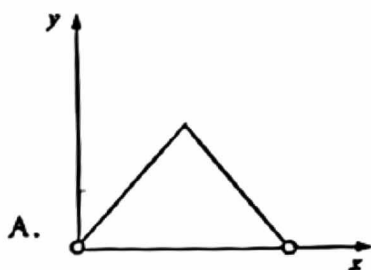
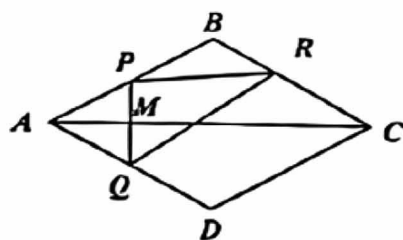
- A. $ab > c$
- B. $abc > \frac{1}{2}$
- C. $c + 2b < a$
- D. $a + c > 2b$



9. 已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ 若对任意 $x \in \mathbb{R}$, 均有 $xf(x) \leq g(x)$, 则函数 $g(x)$ 可以是 ()

- A. $g(x) = \frac{1}{x}$
- B. $g(x) = x$
- C. $g(x) = x$
- D. $g(x) =$

10. 如图, 给定菱形 $ABCD$, 点 P 从 A 出发, 沿 $A-B-C$ 在菱形的边上运动, 运动到 C 停止, 点 P 关于 AC 的对称点为 Q , PQ 与 AC 相交于点 M , R 为菱形 $ABCD$ 边上的动点 (不与 P, Q 重合), 当 $AM = x$ 时, $\triangle PQR$ 面积的最大值为 y , 则 y 关于 x 的函数图象大致是 ()



二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 请将结果填在答题纸上的相应位置.)

11. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ 的定义域是_____.

12. 不等式 $|2x-3| < 3$ 的解集是_____.

13. $A = \{y | y = \sqrt{x}\}$, $B = \{x | x^2 - (a+1)x + a = 0\}$, $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值集合是_____.

14. 若存在 $x \in (0, +\infty)$, 使得 $x^2 - ax + 9 = 0$, 则实数 a 的取值集合是_____.

15. 对集合 A, B , 定义 $A \otimes B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

① 若 $A \otimes B$ 的元素个数为 4, 则 A, B 可以为: $A = \underline{\hspace{2cm}}$, $B = \underline{\hspace{2cm}}$ (写出一组即可)

② 若集合 M 满足: 存在 M 的子集 A, B , 使得 $A \otimes B$ 的元素个数不小于 100, 且对任意 $(a, b) \in A \otimes B$, 均有 $(b, a) \in A \otimes B$, 则集合 M 的元素个数的最小值是_____.

三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 35 分. 解答应写出文字说明过程或演算步骤, 请将答案写在答题纸上的相应位置.)

16. (本小题满分 11 分)

已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, $B = (-\infty, m)$, 其中 $m \in \mathbb{R}$.

(I) 若 $B \subseteq A$, 求 m 的取值集合;

(II) 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 求 m 的取值集合.

17. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $y = -3x + 6$ 与 $y = f(x)$ 的图象相交于点

$A(1, f(1))$, $B(2, f(2))$.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 判断函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并用单调性的定义证明.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 3$.

(I) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 求 a 的值;

(II) 若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 求 $x_1 + x_2$ 的取值范围;

(III) 若当 $x \in [3, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.



II 卷 (共 8 道题, 满分 50 分)

一. 选择题 (本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.)

19. 已知集合 $A = \{x | |x| < 4\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} = (\quad)$

A. $(1, 3)$

B. $[1, 3]$

C. $[-4, 1] \cup [3, 4]$

D. $(-4, 1) \cup (3, 4)$

20. 若 $xy \neq 0$, 则 " $x+y=1$ " 是 " $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 = \frac{1}{xy}$ " 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

21. 若 $x_0^3 + y_0^3 = a$ ($x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$), 则称 (x_0, y_0) 是关于 x, y 的方程 $x^3 + y^3 = a$ 的整数解. 关于该方程, 下列判断错误的是 ()

- A. $\exists a \in \mathbb{Z}$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 有无限组整数解
B. $\exists a \in \mathbb{Z}$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 有且只有两组整数解
C. $\forall a \in \mathbb{Z}$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 至少有一组整数解
D. $\forall a \neq 0$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 至多有有限组整数解

二. 填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将结果填在答题纸上的相应位置.)

22. 函数 $y = |x-1| + |x+1|$ 的最小值为_____.

23. 若 $\forall x \in [a, a+1], \exists y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, 使得 $xy=1$, 则实数 $a =$ _____.

24. 若 (x_0, y_0) 是方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$ 的一组解, 则代数式 $\frac{\sqrt{(x_0-1)^2 + y_0^2}}{|3y_0-1|}$ 的值为_____.

25. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -a, \\ -x^2+a^2, & -a \leq x \leq a, \\ -\sqrt{x}-1, & x > a. \end{cases}$ 给出下列四个结论:

- ① 当 $a=2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增;
② 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 存在最大值;
③ 设 $M(x_1, f(x_1)) (x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2)) (x_2 > a)$, 则 $|MN| > 1$;
④ 若 $y=f(x), y=-x$ 的函数图象恰有三个公共点, 则 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

其中所有正确结论的序号是_____.



三. 解答题 (本大题共 1 小题, 共 12 分. 解答应写出文字说明过程或演算步骤, 请将答案写在答题纸上的相应位置.)

26. (本小题满分 12 分)

对非空数集 T , 给出如下定义.

定义 1: 若 $\forall x, y \in T$, 当 $x+y \neq x-y$ 时, $\{x+y, x-y\} \cap T \neq \emptyset$, 则称 T 为强和差集;

定义 2: 若 $\forall x, y \in T$, 当 $x+y \neq |x-y|$ 时, $\{x+y, |x-y|\} \cap T \neq \emptyset$, 则称 T 为弱和差集.

(I) 分别判断 $\{0, 1\}$ 是否为强和差集, $\{1, 2\}$ 是否是弱和差集, 并说明理由;

(II) 若集合 $A = \{1, a, b\}$ 是弱和差集, 求 A ;

(III) 若强和差集 B 的元素个数为 12, 且 $1 \in B$, 求满足条件的集合 B 的个数.