



高一数学

2024.1

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $M = \{x | x + 2 \geq 0\}$ ， $N = \{x | x - 1 < 0\}$ ，那么 $M \cap N =$

(A) $\{x | -2 \leq x < 1\}$

(B) $\{x | -2 < x \leq 1\}$

(C) $\{x | x \geq -2\}$

(D) $\{x | x < 1\}$

(2) 已知命题 $P: \exists x < 1, x^2 \leq 1$ ，则 $\neg p$ 为

(A) $\forall x \geq 1, x^2 \leq 1$

(B) $\exists x < 1, x^2 > 1$

(C) $\forall x < 1, x^2 > 1$

(D) $\exists x \geq 1, x^2 > 1$

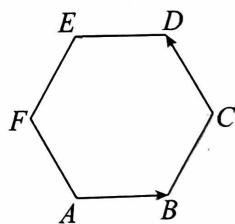
(3) 如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中， $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} =$

(A) $\overrightarrow{BC}$

(B) $\overrightarrow{BF}$

(C) $\overrightarrow{EC}$

(D) $\overrightarrow{BE}$



(4) 若 $a > b$ ，则

(A) $a^3 < b^3$

(B) $|a| > |b|$

(C) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(D) $2^{a-b} > 1$

(5) 已知 $x > 0$ ，则函数 $f(x) = x - 4 + \frac{4}{x}$ 的最小值为

(A) -2

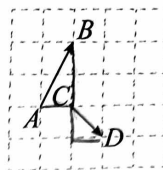
(B) 0

(C) 1

(D) $2\sqrt{2}$



(6) 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示, 若网格中每个小正方形的边长均为 1, 则 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| =$



(A) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$

(B) $\sqrt{5}$

(C) 3

(D) $\sqrt{10}$

(7) 已知 $3^a = 4$, $b = \log_3 \frac{9}{4}$, 则 $a + b =$

(A) 9

(B) 2

(C) $\frac{16}{9}$

(D) -2

(8) 已知集合 $A = \{x \mid |x-1| < 3\}$, $B = \{x \mid x^2 - 3x - 10 < 0\}$, 若 $a \notin A$, 且 $a \in B$, 则 a 的取值范围是

(A) $(-2, 4)$

(B) $(4, 5)$

(C) $[4, 5]$

(D) $[4, 5)$

(9) 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为非零向量, 且 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, 则 “ $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq 3$ ” 是 “存在实数 λ , 使得 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ ” 成立的

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(10) 一种细胞的分裂速度 v (单位: 个/秒) 与其年龄 t (单位: 岁) 的关系可以用下面的分段函数来表示:

$$v(t) = \begin{cases} 0.5t, & 0 \leq t \leq 10, \\ \frac{2a}{b + \log_2 \frac{t}{a}}, & t > 10, \end{cases} \quad \text{其中 } a, b \in \mathbf{R},$$

而且这种细胞从诞生到死亡, 它的分裂速度变化是连续的. 若这种细胞 5 岁和 60 岁的分裂速度相等, 则 $a \approx$

(参考数据: $\log_2 3 \approx 1.585$)

(A) 6.402

(B) 6.462

(C) 6.502

(D) 6.522



第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 函数 $f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x-1}$ 的定义域是_____.

(12) 下面茎叶图记录的是甲、乙两位篮球运动员在最近 5 场比赛中的得分，

甲			乙			
9	7	0	8			
2	1	1	0	1	1	5
	5	2				

则甲得分的中位数是_____，乙得分的方差为_____.

(13) 已知 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 为一组不共线的向量，且向量 $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$ ， $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ ，能使得 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的一组实数 x, y 的值可以为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x - a, & x > 1, \\ x - a, & x \leq 1, \end{cases}$ 若 $a = 0$ ，则 $f(f(2))$ 的值为_____；若 $f(x)$ 有两个零点，则 a 的取值范围是_____.

(15) 记函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，若存在非负实数 k ，对任意的 $x \in D$ ，总有 $|f(x) - f(-x)| \leq k$ ，则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$.

①所有偶函数都具有性质 $P(0)$ ；

② $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 具有性质 $P(1)$ ；

③若 $f(x) = x^2 + x + 1$ ，则一定存在正实数 k ，使得 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$ ；

④已知 $a > 0$ ，若函数 $f(x) = \frac{a}{1+2^x}$ 具有性质 $P(k)$ ，则 $a \in (0, k]$.

其中所有正确结论的序号是_____



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

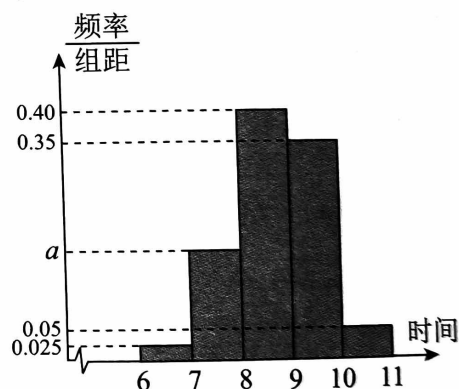
(16) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{|x|+1}{x}$.

- (I) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；
(II) 用函数单调性定义证明：函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数；
(III) 写出函数 $f(x)$ 的值域（结论不要求证明）.

(17) (本小题 13 分)

每年的 3 月 21 日是世界睡眠日，充足的睡眠、均衡的饮食和适当的运动，是国际社会公认的三项健康标准. 某校高一某班学生某天睡眠时间的频率分布直方图如图所示（样本数据分组为 $[6, 7)$, $[7, 8)$, $[8, 9)$, $[9, 10)$, $[10, 11]$ ，单位：小时）.



- (I) 求图中 a 的值，估计该校高一学生该天睡眠时间不小于 9 小时的频率；
(II) 从该校高一学生中随机抽取 2 人，用频率估计概率，计算这两位学生至少有 1 人该天睡眠时间不小于 9 小时的概率.



(18) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，再从条件①、条件②、条件③中选择两个作为已知，使 $f(x)$ 存在并且唯一，并完成下列问题.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 已知函数 $g(x) = f(x) - (m-2)x$ 有两个不同的正数零点 x_1, x_2 .

(i) 求 m 的取值范围;

(ii) 若 $|x_1 - x_2| = 2$ ，求 m 的值.

条件①: $f(0) = 4$;

条件②: $\forall x \in \mathbf{R}, f(1+x) = f(1-x)$;

条件③: $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(1)$.

注: 如果选择多组条件分别解答, 按第一个解答计分.

(19) (本小题 15 分)

2023 年 10 月 17 日至 18 日, 第三届“一带一路”国际合作高峰论坛在北京举行, 成为纪念“一带一路”倡议十周年最隆重的活动. 此次活动主题为“高质量共建‘一带一路’, 携手实现共同发展繁荣”, 而作为“一带一路”重要交通运输的中欧班列越来越繁忙. 下表是从 2018 年到 2022 年, 每年中欧班列运行的列数 (单位: 万列).

年份	2018	2019	2020	2021	2022
运行列数	0.63	0.82	1.24	1.5	1.6

(I) 计算中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数;

(II) 从 2018 年到 2022 年这 5 年中随机选取 2 年, 求这两年运行列数和大于 2.4 (单位: 万列) 的概率;

(III) 设 2018 年, 2019 年, 2020 年运行列数的方差为 s_1^2 , 2020 年, 2021 年, 2022 年运行列数的方差为 s_2^2 , 从 2018 年到 2022 年这 5 年的运行列数的方差为 s_3^2 , 试判断 s_1^2, s_2^2, s_3^2 的大小关系. (结论不要求证明)



(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \log_2(4^x - 8)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的零点;

(II) 求函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = x + 1$ 的图象的交点坐标;

(III) 若函数 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y = 4x + b$ 的下方, 求 b 的取值范围.

(21) (本小题 15 分)

对于函数 $y = f(x)$, 记所有满足 $\forall s > t > 0$, 都有 $f(s) \geq f(t)$ 的函数构成集合 A ; 所有满足 $\forall s, t \in (0, +\infty)$, 都有 $f(s+t) \geq f(s) + f(t)$ 的函数构成集合 B .

(I) 分别判断下列函数是否为集合 B 中的元素, 并说明理由,

① $f(x) = 2x + 1$; ② $f(x) = x^2$;

(II) 若 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+a)$ ($a \geq 0$) 是集合 B 中的元素, 求 a 的最小值;

(III) 若 $g(x) = xf(x)$, 求证: $f(x) \in A$ 是 $g(x) \in B$ 的充分不必要条件.



17. (本小题 13 分)

解: (I) 因为 $(0.025 + a + 0.40 + 0.35 + 0.05) \times 1 = 1$, 3 分

所以 $a = 0.175$ 5 分

该校高一学生该天睡眠时间不少于 9 小时的频率为:

$(0.35 + 0.05) \times 1 = 0.40$ 7 分

(II) 由题知, 该校高一学生该天睡眠时间为 $[6, 7), [7, 8), [8, 9), [9, 10), [10, 11)$ 小时的频率分别为 $0.025 \times 1 = 0.025$, $0.175 \times 1 = 0.175$, $0.40 \times 1 = 0.40$, $0.35 \times 1 = 0.35$, $0.05 \times 1 = 0.05$, 用频率估计概率, 该校高一学生该天睡眠时间为 $[6, 7), [7, 8), [8, 9), [9, 10), [10, 11)$ 小时的概率分别为 0.025 , 0.175 , 0.40 , 0.35 , 0.05 .

记从该校高一学生中随机抽取 2 人, 这两位学生至少有一人该天睡眠时间不小于 9 小时为事件 A , 8 分

则 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - 0.4)^2 = 1 - 0.6^2 = 0.64$ 13 分

18. (本小题 14 分)

解: 选择条件①②: 1 分

(I) 由①得 $f(0) = b = 4$, 2 分

由②得 $f(x)$ 的对称轴为 $x = 1$, 3 分

所以 $-\frac{a}{2} = 1$, $a = -2$ 4 分

(II) 由 (I) 知 $f(x) = x^2 - 2x + 4$,

所以 $g(x) = f(x) - (m-2)x = (x^2 - 2x + 4) - (m-2)x = x^2 - mx + 4$ 5 分

(i) 因为 $g(x)$ 有两个不同的正数零点 x_1, x_2 ,

所以 $\begin{cases} \Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times 4 = m^2 - 16 > 0, \\ x_1 x_2 = 4 > 0, \\ x_1 + x_2 = m > 0, \end{cases}$ 8 分

即 $\begin{cases} m > 4, \text{ 或 } m < -4, \\ m > 0, \end{cases}$ 9 分

解得 $m > 4$, 10 分

所以 m 的取值范围是 $(4, +\infty)$.

(ii) 因为 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{m^2 - 16} = 2$, 12 分

所以 $m^2 = 20$, 13 分

又因为 $m > 4$, 所以 $m = 2\sqrt{5}$ 14 分



选择条件①③:

(I) 由①得 $f(0) = b = 4$,

由③得 $f(x)$ 的对称轴为 $x = 1$,

所以 $-\frac{a}{2} = 1$, $a = -2$.

(II) 同选择条件①②.

19. (本小题 15 分)

解: (I) 从 2018 年到 2022 年运行列数的平均值为

$$\frac{0.63 + 0.82 + 1.24 + 1.5 + 1.6}{5} = 1.158. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数为 1.158 万列.

(II) 从 2018 年到 2022 年随机选取 2 年, 所有可能的结果有 10 种, 它们是:

(2018, 2019), (2018, 2020), (2018, 2021), (2018, 2022), (2019, 2020), (2019, 2021),
(2019, 2022), (2020, 2021), (2020, 2022), (2021, 2022). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}

用 A 表示“这两年运行列数和大于 2.4 万列”这一事件, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}

则 A 中的结果有 4 个, 它们是 (2019, 2022), (2020, 2021), (2020, 2022), (2021, 2022).
\dots\dots\dots 10 \text{ 分}

所以, 所求的概率 $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}

(III) $s_2^2 < s_1^2 < s_3^2$. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}

20. (本小题 15 分)

解: (I) 令 $\log_2(4^x - 8) = 0$, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}

所以 $4^x - 8 = 1$, 即 $4^x = 9$, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}

所以 $x = \log_4 9 = \log_2 3$, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}

所以 $f(x)$ 零点为 $\log_2 3$. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}

(II) 令 $f(x) = g(x)$, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}

即 $\log_2(4^x - 8) = x + 1$,

所以 $4^x - 8 = 2^{x+1}$,

整理得 $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}

$(2^x - 4)(2^x + 2) = 0$,

所以 $2^x = 4$, $x = 2$.

所以函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 图象的交点坐标为 (2, 3). \dots\dots\dots 9 \text{ 分}



(III) 由 $4^x - 8 > 0$ 得 $x > \log_4 8 = \frac{3}{2}$.

..... 10 分

由题意, $f(x) < 4x + b$ 在 $x \in (\frac{3}{2}, +\infty)$ 恒成立,

即 $\log_2(4^x - 8) < 4x + b$ 在 $x \in (\frac{3}{2}, +\infty)$ 恒成立.

..... 12 分

所以 $4^x - 8 < 2^{4x+b} = (4^x)^2 \cdot 2^b$ 在 $x \in (\frac{3}{2}, +\infty)$ 恒成立.

令 $4^x = t \in (8, +\infty)$,

则 $t - 8 < t^2 \cdot 2^b$,

所以 $2^b > -8(\frac{1}{t})^2 + \frac{1}{t}$.

因为 $\frac{1}{t} \in (0, \frac{1}{8})$,

所以 $-8(\frac{1}{t})^2 + \frac{1}{t} \in (0, \frac{1}{32}]$,

所以 $2^b > \frac{1}{32}$, $b > -5$.

所以 b 的取值范围为 $(-5, +\infty)$.

..... 15 分

21. (本小题 15 分)

解: (I) ①不是.

当 $s = t = 1$ 时, $f(s+t) = f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$,

$f(s) + f(t) = 3 + 3 = 6 > f(s+t)$,

所以 $f(x) = 2x + 1$ 不是集合 B 中的元素.

..... 2 分

②是.

$\forall s, t \in (0, +\infty)$, $f(s+t) - f(s) - f(t) = (s+t)^2 - s^2 - t^2 = 2st > 0$,

所以 $f(x) = x^2$ 是集合 B 中的元素.

..... 4 分

(II) 当 $a = 1$ 时, $\forall s, t \in (0, +\infty)$, $f(s+t) = \log_{\frac{1}{2}}(s+t+1)$,

$f(s) + f(t) = \log_{\frac{1}{2}}(s+1) + \log_{\frac{1}{2}}(t+1) = \log_{\frac{1}{2}}(s+1)(t+1)$.

因为 $(s+1)(t+1) - (s+t+1) = st > 0$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f(s+t) \geq f(s) + f(t)$, 即 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \in B$.



若 $0 \leq a < 1$, 令 $s = t = \frac{1-a}{2} > 0$,

则 $(s+t+a) - (s+a)(t+a) = 1 - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 > 0$,

又 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(s+t) < f(s) + f(t)$, 因此, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+a) \notin B$

综上, a 的最小值为 1.

..... 10 分

(III) 因为 $f(x) \in A$, 所以 $\forall s, t \in (0, +\infty)$, $s+t > s$, $f(s+t) \geq f(s)$,

进而 $sf(s+t) \geq sf(s)$,

同理, $tf(s+t) \geq tf(t)$, 相加得 $(s+t)f(s+t) \geq sf(s) + tf(t)$,

即 $xf(x) \in B$.

..... 12 分

设 $g(x) = [x]$.

$\forall s, t \in (0, +\infty)$, $[s] + [t] \leq [s+t]$,

所以 $g(x) = [x] \in B$.

此时, $f(x) = \frac{[x]}{x}$.

当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 因此 $f(x) = \frac{[x]}{x} \notin A$.

..... 15 分

综上, $f(x) \in A$ 是 $g(x) \in B$ 的充分不必要条件.