



2024 北京大兴高三（上）期末

数 学

本试卷共 9 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = \{x | x > 1\}$ ，集合 $A = \{x | x \geq 2\}$ ，则 $C_U A =$

- A. $\{x | 1 < x \leq 2\}$
- B. $\{x | x < 2\}$
- C. $\{x | 1 < x < 2\}$
- D. $\{x | x \leq 1\}$

2. 若复数 z 满足 $i \cdot (z + i) = 1$ ，则复数 z 的虚部是

- A. -2
- B. 2
- C. -1
- D. 0

3. 在 $(x^2 - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为

- A. -15
- B. 15
- C. -20
- D. 20

4. 设向量 a, b ，若 $|a| = 1$ ， $b = (-3, 4)$ ， $b = \lambda a$ ($\lambda > 0$)，则 $a =$

- A. $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$
- B. $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$
- C. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$
- D. $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

5. 已知函数 $f(x) = 2^x - 1$ ，则不等式 $f(x) \leq x$ 的解集为

- A. $(-\infty, 2]$
- B. $[0, 1]$
- C. $[1, +\infty)$
- D. $[1, 2]$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $C = \frac{\pi}{2}$ ”是“ $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$ ”的

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

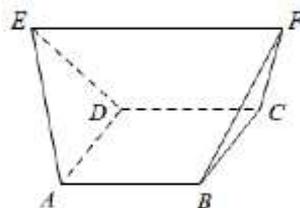
7. 已知定点 $M(1, 3)$ 和抛物线 $C: x^2 = 8y$ ， F 是抛物线 C 的焦点， N 是抛物线 C 上的点，则 $|NF| + |NM|$ 的最小值为

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6

8. 已知 $a > b > 0$ 且 $ab = 10$ ，则下列结论中不正确的是

- A. $\lg a + \lg b > 0$
- B. $\lg a - \lg b > 0$
- C. $\lg a \cdot \lg b < \frac{1}{4}$
- D. $\frac{\lg a}{\lg b} > 1$

9. 木楔在传统木工中运用广泛. 如图，某木楔可视为一个五面体，其中四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $\triangle ADE$ ， $\triangle BCF$ 均为等边三角形， $EF \parallel CD$ ， $EF = 4$ ，则该木楔的体积为





- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$
 C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

10. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，集合 $T = \{t \mid t = \sin a_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 。则

- A. T 不可能有无数个元素
 B. 当且仅当 $d = 0$ 时， T 只有 1 个元素
 C. 当 T 只有 2 个元素时，这 2 个元素的乘积有可能为 $\frac{1}{2}$
 D. 当 $d = \frac{2\pi}{k}$ ， $k \geq 2$ ， $k \in \mathbf{N}^*$ 时， T 最多有 k 个元素，且这 k 个元素的和为 0

第二部分 (非选择题 共 110 分)

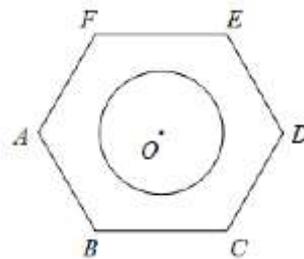
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列， $a_1 = 1$ ， $a_2 \cdot a_4 = 16$ ，则 $a_5 =$ _____。

12. 若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的一条渐近线方程为 $2x - y = 0$ ，则 $b =$ _____。

13. 能够说明“设 a, b, c 是任意实数. 若 $a > b > c$ ，则 $ab > c^2$ ”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为_____。

14. 如图是六角螺母的横截面，其内圈是半径为 1 的圆 O ，外框是以 O 为中心，边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ ，则 O 到线段 AC 的距离为_____；若 P 是圆 O 上的动点，则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的取值范围是_____。



15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，且 $f(x)$ 满足如下性质：(i) 若将 $f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位，则所得的图象关于 y 轴对称；(ii) 若将 $f(x)$ 图象上的所有点的纵坐标不变，横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，再向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位，则所得的图象关于原点对称. 给出下列四个结论：

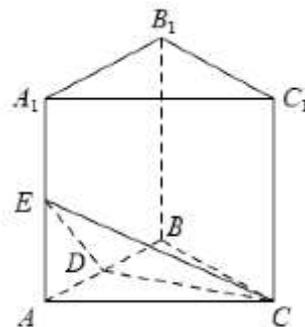
- ① $f(1) = f(3)$ ； ② $f(0) = 0$ ；
 ③ $f(2) + f(4) = 0$ ； ④ $f(-\frac{1}{2})f(\frac{11}{2}) \leq 0$ 。

其中所有正确结论的序号是_____。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. (本小题 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $BB_1 \perp$ 平面 ABC ， $CA = CB = \sqrt{5}$ ， $AA_1 = AB = 2$ ， D, E 分别为 AB, AA_1 的中点。





- (I) 求证: 平面 $CDE \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;
 (II) 求直线 CE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

17. (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $a=1, b=2$.

- (I) 若 $c=2\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
 (II) 在下列三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在, 求 $\angle A$.

条件①: $\angle B=2\angle A$; 条件②: $\angle B+\frac{\pi}{3}=\angle A$; 条件③: $\angle C=2\angle A$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题 13 分)

为了解客户对 A, B 两家快递公司的配送时效和服务满意度情况, 现随机获得了某地区客户对这两家快递公司评价的调查问卷. 已知 A, B 两家公司的调查问卷分别有 120 份和 80 份, 全部数据统计如下:

快递公司		A 快递公司		B 快递公司	
评价分数	项目	配送时效	服务满意度	配送时效	服务满意度
	份数				
	$85 \leq x \leq 95$	29	24	16	12
	$75 \leq x < 85$	47	56	40	48
	$65 \leq x < 75$	44	40	24	20

假设客户对 A, B 两家快递公司的评价相互独立. 用频率估计概率.

- (I) 从该地区选择 A 快递公司的客户中随机抽取 1 人, 估计该客户对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的概率;
 (II) 分别从该地区 A 和 B 快递公司的样本调查问卷中, 各随机抽取 1 份, 记 X 为这 2 份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分的份数, 求 X 的分布列和数学期望;
 (III) 记评价分数 $x \geq 85$ 为“优秀”等级, $75 \leq x < 85$ 为“良好”等级, $65 \leq x < 75$ 为“一般”等级. 已知小王比较看重配送时效的等级, 根据该地区 A, B 两家快递公司配送时效的样本评价分数的等级情况, 你认为小王选择 A, B 哪家快递公司合适? 说明理由.



19. (本小题 15 分)

已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 O 为原点, 过点 $T(4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M, N , 直线 BM 与直线 $x=1$ 相交于点 P , 直线 AN 与 y 轴相交于点 Q . 求证: $\triangle OAQ$ 与 $\triangle OTP$ 的面积之比为定值.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = ax + \ln \frac{1-x}{1+x}$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为 0, 求 a 的值;

(II) 当 $a = 4$ 时, 求 $f(x)$ 的零点个数;

(III) 证明: $0 \leq a \leq 2$ 是 $f(x)$ 为单调函数的充分而不必要条件.

21. (本小题 15 分)

若各项为正的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: 对于 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1}^2 - a_n^2 = d$, 其中 d 为非零常数, 则称数列 $\{a_n\}$ 为 D 数列. 记 $b_n = a_{n+1} - a_n$.

(I) 判断无穷数列 $a_n = \sqrt{n}$ 和 $a_n = 2^n$ 是否是 D 数列, 并说明理由;

(II) 若 $\{a_n\}$ 是 D 数列, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 中存在小于 1 的项;

(III) 若 $\{a_n\}$ 是 D 数列, 证明: 存在正整数 n , 使得 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > 2024$.