



# 第 39 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题

2022 年 10 月 29 日上午 9:00-12:00

一、(40 分) 如图 1a, 一段抛物线形状的刚形金属丝固定在竖直平面内, 抛物线方程为  $y = ax^2$  ( $y$  轴竖直向上,  $a$  为待定常量); 一长度为  $2l$  的匀质刚性细杆的两端 A、B 各有一个小圆孔, 两圆孔都套在金属丝上。圆孔和金属丝之间非常光滑, 摩擦力非常小, 在问题 (1)、(2) 和 (3) 中可忽略。若给细杆一个冲量, 使其运动; 经过足够长的时间, 细杆静止于平衡位置, 此时细杆和水平方向之间的夹角  $\theta = 30^\circ$ 。已知重力加速度大小为  $g$ 。

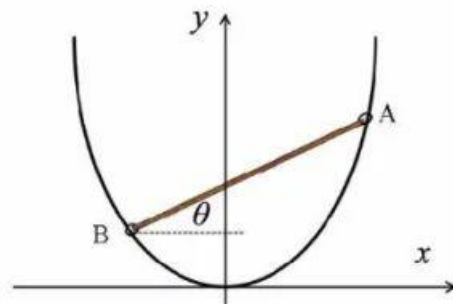


图 1a

- (1) 求待定常量  $a$ ;
- (2) 若杆在上述平衡位置附近小幅振动, 求振动的频率;
- (3) 细杆静止在上述平衡位置。现有一只小白鼠, 从静止开始由杆底端沿杆往上爬。在爬杆的过程中, 细杆始终保持静止; 假设小白鼠可视为质点, 且小白鼠在杆端不接触金属丝。求小白鼠在时刻  $t$  (以小白鼠开始爬杆的时刻为时刻零点) 沿细杆的位移  $s(t)$ , 小白鼠是否可以爬到细杆顶端? 如果可以, 小白鼠爬到细杆顶端, 最少用时多少?

二、(60 分) 动能为  $K_1$  的粒子 1 (入射粒子) 从无穷远处入射, 与静止的粒子 2 (靶粒子) 发生弹性碰撞, 碰撞后粒子 1 的动能和运动方向都发生了变化。不考虑重力。

(1) 散射后 (无穷远处) 粒子 1 的动能为  $K_1'$ ,  $k = \frac{K_1'}{K_1}$  称为运动学因子。试给出  $k$  的取值范围。

(2) 本问采用牛顿力学理论。

(i) 将散射后粒子 1 的运动方向 (散射方向) 与入射方向之间的夹角 (散射角) 记为  $\theta$ 。将粒子 2 与粒子 1 的质量之比记为  $R$ 。对于任意给定的  $R$ ,  $k$  是  $\theta$  的函数。分别在  $R > 1$ 、 $R = 1$  和  $R < 1$  三种情形下, 导出  $k$  对  $\theta$  的依赖关系  $k(\theta)$ , 并给出  $\theta$  的取值范围。

(ii) 在某些  $R$  取值范围中,  $k$  可能是  $\theta$  的多值函数 (每种函数形式称为  $k$  函数的一个分支)。要确定  $k$  的值, 需要补充描述两粒子相互作用部分细节的参量。采用最简单的硬球模型, 即把发生碰撞的两个粒子都视为表面光滑的匀质刚球, 它们只在碰撞时有相互作用。设两粒子半径之和为  $A$ , 靶粒子 2 的质心到入射粒子 1 中心的速度所在直线的距离为  $b$  (瞄准距离), 如图 2a 所示。试求  $k$  (用  $R$ 、 $A$  和  $b$  表出), 并用“擦边而过”和“对心碰撞”这两种特殊情形来验证可由  $b$  的取值判断同一个  $\theta$  下  $k(\theta)$  所在的分支。求出  $k(\theta)$  各分支所对应的  $b$  的取值范围。

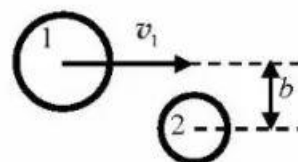


图 2a. 瞄准距离  $b$  的几何示意图

(3) 设两粒子 (可视为质点) 的静止质量均为  $m_0$ 。粒子 1 的入射速度很快, 以至于需要考虑相对论效应。真空中的光速为  $c$ 。

(i) 求散射角为  $\theta$  时的运动学因子  $k(\theta)$ , 并与牛顿力学的结果进行比较。

(ii) 求碰后粒子 1、2 速度之间的夹角  $\alpha$  与  $K_1'$  的关系,  $\alpha$  在何种情况下取极值? 并判断极值的性质 (极大或极小), 给出该极值以及相应的  $\theta$  值。

(注: 解题涉及到需要进行区分的物理量时, 用脚标 1 和 2 区分粒子, 用不加 “'”、加 “'” 分别表示碰撞前、后的物理量。最终表达式中涉及到的三角函数一律采用余弦函数, 且不含半角、倍角表示。)

三、(60 分) 一匀质刚性细圆环半径为  $R$ , 质量为  $M$ , 在水平地面 ( $x$ - $y$  坐标平面) 上滚动。假定摩擦系数足够大, 以至于圆环和地面之间始终无滑动。记  $t$  时刻圆环所在平面与竖直方向 ( $z$  方向) 之间的夹角为  $\theta(t)$ , 圆环所在平

面与地面之间的交线相对于  $x$  方向的夹角为  $\phi(t)$ ，圆环与地面的瞬时接触点的直角坐标为  $(x(t), y(t), 0)$ ，如图 3a 所示。重力加速度大小为  $g$ 。

(1) 描述任意  $t$  时刻圆环空间位置的  $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\phi(t)$  并非完全相互独立，试求出它们及其对时间的一阶导数之间的所有约束条件。

(2) 设圆环做“匀速圆周运动”，圆环与地面的接触点以恒定速率绕  $z$  轴画出一个半径为  $r$  的圆， $\theta(t) = \theta$  ( $\theta$  为常量)， $\phi(t)$  是时间  $t$  的线性函数。在实验室参考系  $\Sigma$  中，不失一般性可设

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

这里  $\omega$  是待求的角速度。在绕  $z$  轴以角速度  $\omega$  匀速旋转的转动参考系  $\Sigma'$  中， $\theta$  和  $\phi$  均为常量，圆环绕垂直于环面的中轴线做定轴转动。在参考系  $\Sigma'$  中，圆环上各质元会“感受”到离心力和科里奥利力的作用。将圆环视为许多微元的集合，求所有微元所受到的离心力的合力  $F_{\text{离心}}$ 、科里奥利力的合力  $F_{\text{科氏}}$  以及相对于圆环质心的离心力的合力矩  $\tau_{\text{离心}}$ 、科里奥利力的合力矩  $\tau_{\text{科氏}}$  (结果可包含尚未求出的  $\omega$ )。

(3) 求 (2) 中的  $\omega$  以及地面对圆环施加的作用力 (结果不得包含  $\omega$ )。

(4) 圆环高速滚动时，圆环可在竖直平面附近摆动而不倒下，具有较好的稳定性，从而圆环质心可近似视为沿直线运动，设该直线沿  $x$  轴方向，质心速度大小约为常量  $V$ ，即质心位置坐标  $x(t) = Vt + \delta x(t)$ ，而  $\delta x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\phi(t)$  均为小量 (注意，它们可能并非是同阶小量)。导出保留到最低阶小量的圆环的运动方程。假设最低阶小量按余弦函数随时间变化，求变化的角频率  $\Omega$ ；并确定保持圆环运动稳定所需的常量  $V$  的最小值  $V_{\text{min}}$ 。

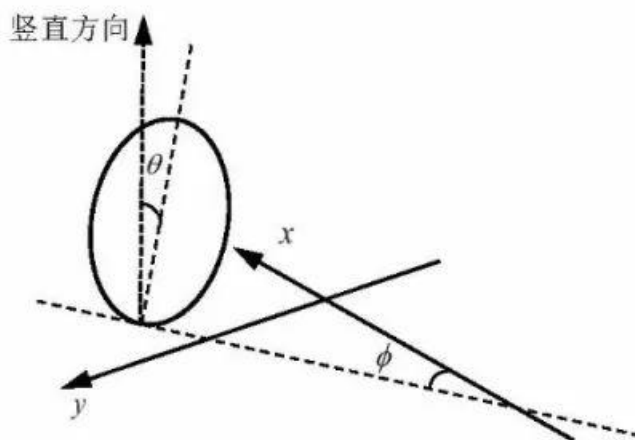


图 3a

四、(60 分) 自由电子激光器是以自由电子束为工作物质，将相对论性电子束的动能转变成相干辐射能的装置，它在科研、生产等领域中都具有重大应用前景。如图 4a，自由电子激光器的基本结构有三个部分：电子束加速器、扭摆器和光学谐振腔；其中扭摆器是自由电子激光器的核心部分，它由沿  $z$  方向按空间周期  $\lambda$  排列的永磁体组成，产生周期性横向静磁场，磁感应强度方向沿  $x$  轴，大小为

$$B = B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)$$

电子束经过加速器加速到预定的速率  $v_0$ ，由弯曲磁体引导，沿  $z$  轴正方向注入扭摆器，高速运动的电子在扭摆器中受到交变磁场的作用做扭摆运动，同时辐射相干电磁波。设  $B_0$  不太强，磁场对电子运动速度的改变量的大小远小于  $v_0$ ，且电子束相干辐射电磁波对电子动能的损耗可忽略不计。电子的静止质量为  $m_e$ ，电子所带电量为  $-e$ 。不计重力。

(1) 建立参考系  $S'(x', y', z')$ ，使  $S'$  相对于实验室参考系  $S(x, y, z)$  沿  $z$  轴正方向以大小为  $v_0$  的速度做匀速直线运动， $x'$  轴和  $x$  轴、 $y'$  轴和  $y$  轴两两相互平行， $z'$  轴和  $z$  轴重合。利用前述近似条件，在参考系  $S'$  中求出电子在  $t'$  时刻的位置坐标  $(x', y', z')$ ，并画出电子运动轨迹示意图。

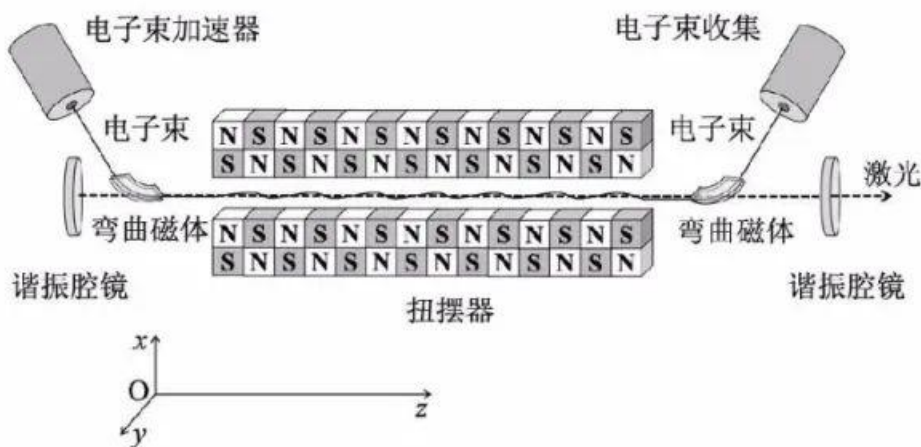


图 4a



(2) 如果扭摆器磁场的空间变化周期  $\Lambda=1\text{mm}$  (可视为准确值), 沿  $z$  轴正方向辐射 X 激光的波长为  $4.00\text{ \AA}$ , 求电子束加速器的加速电压。

已知电子静止质量  $m_e=9.11\times 10^{-31}\text{ kg}$ , 单位电荷量  $e=1.60\times 10^{-19}\text{ C}$ 。

(3) 用波长为  $4.00\text{ \AA}$  的激光作为入射光 (可视为平面波), 如图 4b 所示。在  $x-z$  平面内有等边菱形组成的共面二维晶体, 菱形的边长  $d=8.00\text{ \AA}$ , 两顶角各为  $60^\circ$ 、 $120^\circ$ , 设二维晶体对入射波的散射较弱, 可忽略散射波再次被散射的影响, 试问在  $x-z$  平面内远处可以观察到多少衍射主级峰? 并求相应主级峰方位 (用图 4b 中的  $\theta$  表示)。

已知: 在两惯性参考系  $S'(x',y',z')$ 、 $S(x,y,z)$  中电磁场的变换关系为

$$\begin{cases} E_{x'} = \frac{E_x - v_0 B_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ E_{y'} = \frac{E_y + v_0 B_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ E_{z'} = E_z. \end{cases} \quad \begin{cases} B_{x'} = \frac{B_x + \frac{v_0}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ B_{y'} = \frac{B_y - \frac{v_0}{c^2} E_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ B_{z'} = B_z. \end{cases}$$

式中  $c=3.00\times 10^8\text{ m/s}$  是真空中光速。

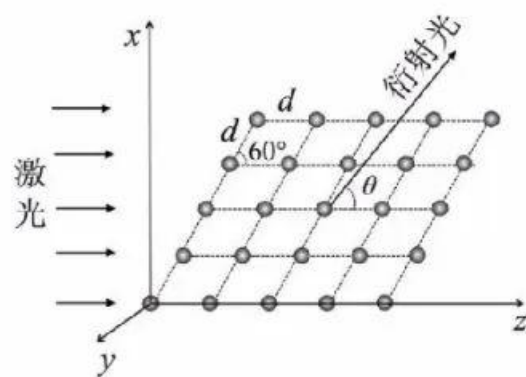


图 4b



五、(50 分) 光在单轴晶体内传播呈现各向异性, 按照偏振状态, 可分为  $o$  光 (寻常光) 和  $e$  光 (非常光)。单轴晶体内有一特定取向, 光沿此方向传播时  $o$  光和  $e$  光的传播速度相同, 传播方向不发生分离, 该方向称为晶体光轴。 $o$  光在晶体内感受到的折射率各向同性, 为  $n_o$ , 波速各向同性为  $v_o=c/n_o$  ( $c$  为真空中的光速);  $e$  光在垂直于光轴的方向传播感受到的折射率为  $n_e$ , 波速为  $v_e=c/n_e$ 。当  $e$  光的传播方向介于平行于和垂直于光轴之间时, 其感受到的折射率随其与光轴的夹角单调变化。对于晶体内点源或惠更斯原理中的次波源, 其发出的光的波前是以光轴为对称轴的旋转椭球面。如图 5a, 建立  $y$  轴与光轴取向重合的直角坐标系, 以下对  $o$  光和  $e$  光传播过程的分析仅限于在  $y-x$  截面内的情形。

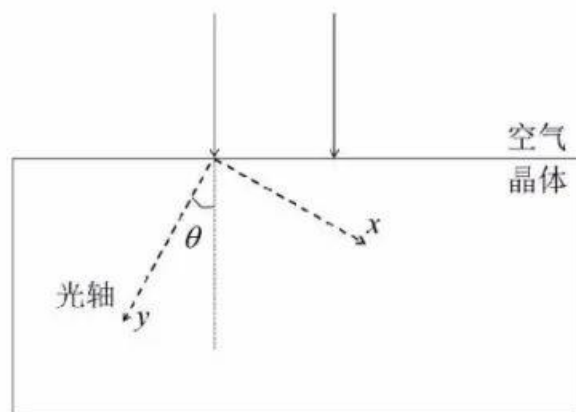


图 5a

(1) 根据惠更斯原理作图。

在图 5a 中, 真空波长为  $\lambda$  的平面光波从空气正入射到晶体表面, 晶体表面法线方向与光轴的夹角为  $\theta$ 。画出在晶体内传播的  $o$  光与  $e$  光的波前。标出分别与  $o$  光、 $e$  光对应的波矢  $k_o$ 、 $k_e$  的方向 (次波等相位面的包络面的法线方向, 即等相位面的传播方向), 以及由惠更斯原理确定的对应光线的传播方向  $N_o$ 、 $N_e$ 。取  $n_o > n_e$ , 将  $o$  光和  $e$  光的传播情况示于同一图中。

(2) 记  $e$  光的光线传播方向  $N_e$  与光轴之间的夹角为  $\xi$ , 导出  $\xi$  和  $\theta$  两个角度的正切之间的关系。

(3) 一种名为 BBO 的单轴晶体的折射率色散曲线方程为 ( $\lambda$  为真空波长, 以  $\mu\text{m}$  为单位):

$$\begin{cases} n_o^2(\lambda) = 2.7359 + \frac{0.01878}{\lambda^2 - 0.01822} - 0.01354\lambda^2 \\ n_e^2(\lambda) = 2.3753 + \frac{0.01224}{\lambda^2 - 0.01667} - 0.01516\lambda^2 \end{cases}$$

分别求真空波长为  $800.0\text{ nm}$  和  $400.0\text{ nm}$  时, BBO 单轴晶体中的  $n_o$  和  $n_e$ 。

(4) 光学晶体的重要作用之一是实现频率转换, 例如光学倍频过程, 它是指两个同频率的基频光子转换为一个频率加倍的倍频光子, 这个过程须满足能量守恒和动量守恒。在晶体中, 波矢为  $k$  的光子的动量也可表示为  $p = \hbar k$ ,

其中  $h$  为约化普朗克常量。

(4.1) 试表出倍频过程中基频光子波矢  $k_1$  与倍频光子波矢  $k_2$  之间的关系。

(4.2) 利用 BBO 晶体, 将真空波长为 800.0 nm 的光波倍频为真空波长为 400.0 nm 的光波, 基频光和倍频光可各自选为  $o$  光或  $e$  光, 试给出实现此倍频过程的选择方案。

(5) 按照图 5a 的方式设置 BBO 晶体, 使晶体表面法线与光轴夹角为  $\theta$ , 让真空波长为 800.0 nm 的基频光以平面波形式垂直入射到此晶体, 角度  $\theta$  取值多大可以满足动量守恒条件, 从而产生真空波长为 400.0 nm 的倍频光?

(6) 计算 (5) 中  $e$  光波矢  $k_e$  和传播方向  $N_e$  之间的夹角  $\alpha$ 。

六、仅考虑单一组分、单原子分子组成的非相对论性气体。

对上述气体, 若忽略分子的大小以及除碰撞瞬间外分子间的相互作用, 则可用理想气体模型描述; 若考虑到分子的实际大小及其间的非碰撞相互作用, 则理想气体模型不再适用。对此, 范德瓦尔斯构建了范德瓦尔斯模型, 该模型下, 1 mol 气体的状态方程 (称为范德瓦尔斯方程) 为

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$$

其中  $T$ 、 $p$  和  $v$  分别表示气体的温度、压强和体积 (即容器容积),  $R$  是理想气体普适常量,  $a$  和  $b$  是大于零的常量。在稀疏极限 (对于任意给定的  $T$ ,  $v \rightarrow \infty$ ) 下, 该模型退化为理想气体模型。

(1) 试直接给出  $b$  的物理含义 (不必给出分析过程)。设气体分子可视为半径为  $r$  的刚性小球 (按范德瓦尔斯模型, 小球间有微弱的引力), 试估计  $b$  的取值。已知阿伏伽德罗常数为  $N_A$ 。

(2) 直接写出  $N$  mol、体积为  $V$  的范德瓦尔斯气体的状态方程 (表达式中不可出现摩尔体积  $v$ )。

(3) 设气体的定容摩尔热容为  $C_v$ ,  $C_v$  满足

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$$

式中  $\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T$  表示当  $T$  视为常量时  $C_v$  对  $v$  的一阶导数,  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$  表示当  $v$  视为常量时  $p$  对  $T$  的二阶导数, 余类推。

试证明范德瓦尔斯气体的定容摩尔热容  $C_v$  为常量, 并确定此常量。(此常量的具体形式不必代入后续计算)

(4) 已知 1 mol 范德瓦尔斯气体的内能  $u$  为

$$u = C_v T - \frac{a}{v},$$

试导出其摩尔熵  $s(T, v)$  的表达式, 其中可含有待定常量。试给出该气体经历准静态绝热过程的方程 (用  $T$  和  $v$  表出, 表达式中可含有待定常量)。

(5) 1 mol 范德瓦尔斯气体经历如下可逆卡诺循环过程:

过程 I——等温膨胀: 温度为  $T_1$ , 体积由  $v_1$  变为  $v_2$

过程 II——绝热降温: 温度由  $T_1$  降为  $T_2$ , 体积由  $v_2$  变为  $v_3$

过程 III——等温压缩: 温度为  $T_2$ , 体积由  $v_3$  变为  $v_4$

过程 IV——绝热升温: 温度由  $T_2$  升为  $T_1$ , 体积由  $v_4$  变为  $v_1$

试计算该循环过程的吸热量  $Q_1$ 、放热量  $Q_2$  和循环效率  $\eta$  (最终将  $\eta$  表示为仅依赖于  $T_1$  和  $T_2$  的函数)。

(6) 定义等温压缩系数为

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

试推出范德瓦尔斯气体的等温压缩系数  $\kappa_T(T, v)$  的表达式; 以满足条件  $a \ll pv^2$  的范德瓦尔斯气体为例, 求  $\kappa_T$  的取值范围, 并说明其直观物理意义。

提示: 对于二元函数  $y = y(x_1, x_2)$ , 当  $x_1$ 、 $x_2$  各自独立的微小变化分别为  $dx_1$ 、 $dx_2$  时,  $y$  的全微分 ( $y$  的微小变化) 为

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_{x_2} dx_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_{x_1} dx_2$$

