考场号______

学 号______

姓 名______

班 级______

密封线

北京市八一学校 2023～2024 学年度第一学期期中试卷

高一 数学 考试时长 90 分钟

一、选择题：本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1．设集合 $A=\{x\,|\,1\le x\le 3\}$，$B=\{x\,|\,0<x<2\}$，则 $A\bigcup B$ 等于 (　　).

(A) $\{x\,|\,1\le x<2\}$　(B) $\{x\,|\,1<x<2\}$　(C) $\{x\,|\,0<x\le 3\}$　(D) $\{x\,|\,1\le x\le 3\}$

2．命题“$\forall x\in R$，都有 $x^2-3x+2>0$”的否定为(　　)

(A) $\exists x\in R$，使得 $x^2-3x+2\le 0$　　(B) $\exists x\in R$，使得 $x^2-3x+2>0$

(C) $\forall x\in R$，都有 $x^2-3x+2\le 0$　　(D) $\exists x\notin R$，使得 $x^2-3x+2\le 0$

3. 下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是(　　).

(A) $y=x$　　(B) $y=|x|$　　(C) $y=-x^2$　　(D) $y=\dfrac{1}{x}$

4. 若函数为 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=2x-1$，则 $f(-1)=$(　　)

(A) -1　　(B) -2　　(C) -3　　(D) -4

5. 若 a、b、c 为实数，则下列命题正确的是(　　).

(A)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$　　(B) 若 $a<b<0$，则 $\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{b}$

(C) 若 $a<b<0$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　(D) 若 $a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$

6. 已知 $a\in R$，则“$a>2$”是“$\dfrac{2}{a}<1$”的(　　).

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=x|x|-2x$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) $f(x)$ 是偶函数，递增区间是 $(0,+\infty)$　　(B) $f(x)$ 是偶函数，递减区间是 $(-\infty,1)$

(C) $f(x)$ 是奇函数，递减区间是 $(-1,1)$　　(D) $f(x)$ 是奇函数，递增区间是 $(-\infty,0)$

8. 为提高生产效率，某公司引进新的生产线投入生产，投入生产后，除去成本，每条生产线生产的产品可获得的利润s（单位：万元）与生产线运转时间t（单位：年，$t\in N^*$）满足二次函数关系：$s=-2t^2+30t-98$，现在要使年平均利润最大，则每条生产线运行的时间t为(　)年.

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

9. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+2, x<1\\ \dfrac{a}{x}, x\geq 1\end{cases}$ 的值域为$\left(0,+\infty\right)$，则实数a的取值范围为(　).

(A) $\left(0,1\right]$　　(B) $(-1,0)$　　(C) $(1,+\infty)$　　(D) $\left[1,+\infty\right)$

10. 对于集合A，称定义域与值域均为A的函数$y=f(x)$为集合A上的等域函数.

若$\exists A=[m,n]$,使$f(x)=a(x-1)^2-2$为A上的等域函数，则负数a的取值范围是(　)

(A) $(-\frac{1}{12},0)$　　(B) $(-\frac{1}{6},-\frac{1}{12})$　　(C) $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{6})$　　(D) $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{4})$

二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分.

11. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$ 的定义域为_________.

12. 若$-2<a<3,1<b<2$，则$a-b$的取值范围是___________.

13. 已知 $f\left(x+1\right)=2x+4$，且 $f\left(a\right)=8$，则a的值是_____________

14.已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+\left(4a-1\right)x, x\leqslant 1\\ (2a+3)x-4a+5, x>1\end{cases}$，若 $f(x)$在R上是增函数，则实数a的取值范围是___________.

15.已知函数 $f(x)=x^2-4x,\quad x\in[a-1,a+1]$，$a\in\mathbf{R}$.

设集合 $M=\{(m,f(n))\mid m,n\in[a-1,a+1]\}$，若 M 中的所有点围成的平面区域的面积为 S，则 S 的最小值为________________.

三、解答题:本大题共 5 小题，共 50 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. （本小题满分 8 分）

设不等式 $|x-1|\le 3$ 的解集为 A，不等式 $\dfrac{x-1}{x+3}<0$ 的解集为 B,

集合 $C=\left\{x\middle|2-m\le x\le 2+m\right\}$.

（I）求 $A\cap B$，$\complement_R B$；

（II）若 $A\cup C=A$，求实数 m 的取值范围.

17. （本小题满分 10 分）

已知关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x+k^2+3=0$ 有两个不相等的实根 x_1,x_2 .

（I）若 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{6}{7}$，求 k 的值;

（II）求 $x_1^2+x_2^2$ 的取值范围.

18. （本小题满分 10 分）

已知关于 x 的不等式 $ax^2+\left(a-1\right)x-1\ge 0$，$a\in R$.

（I）若不等式的解集为 $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$，求实数 a 的值;

（II）若 $a<0$，求不等式的解集.

19. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，当 $x \geqslant 0$ 时有 $f(x)=\dfrac{4x}{x+4}$.

（I）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（II）判断函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上的单调性，并用定义证明；

（III）若关于 x 的不等式 $f\left(2x^2+1\right)>f\left(m\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，求 m 的取值范围.

20. （本小题满分 10 分）

已知集合 $U_n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\mid x_i\in\{0,1\},i=1,2,...,n,n\geq 3\}$，任取 $\alpha=(x_1,x_2,...,x_n)\in U_n$，

$\beta=(y_1,y_2,...,y_n)\in U_n$ 定义 $\alpha*\beta=\max\{x_1,y_1\}+\max\{x_2,y_2\}+...+\max\{x_n,y_n\}$，其中

$\max\left\{a,b\right\}$ 表示 a,b 中的最大值，例如 $\max\left\{1,0\right\}=1,\max\left\{1,1\right\}=1$.

（I）当 n=3 且 $\alpha=\left(0,1,0\right)$ 时，写出满足 $\alpha*\beta=3$ 的所有元素 β；

（II）设 $\alpha,\beta\in U_n$ 满足 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，求 $\alpha*\beta$ 的最大值和最小值；

（III）若 U_n 的子集 S 满足： $\forall\{\alpha,\beta\}\subseteq S$， $\alpha*\beta\geq n$ 成立，求集合 S 中元素个数 m_s 的最大值.

北京市八一学校 2023～2024 学年度第一学期期中试卷

高一 数学 答案

一、选择题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分.

1. C　2. A　3. B　4. A　5. D　6. A　7. C　8. C　9. D　10. A

二、填空题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分.

11. $(-\infty,0)\cup(0,2]$　12. $(-4,2)$　13. 3　14. $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{3}\right]$　15. 2

三、解答题共 5 小题，共 50 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 8 分）

设不等式 $|x-1|\le 3$ 的解集为 A，不等式 $\frac{x-1}{x+3}<0$ 的解集为 B,

集合 $C=\{x|2-m\le x\le 2+m\}$.

（I）求 $A\cap B$，$\complement_R B$；

（II）若 $A\cup C=A$，求实数 m 的取值范围.

解：（I）由 $|x-1|\le 3$ 得 $-3\le x-1\le 3$, 则 $A=\{x|-2\le x\le 4\}$.

由 $\frac{x-1}{x+3}<0$，得 $(x-1)(x+3)<0$，则 $A=\{x|-3<x<1\}$，

$\therefore$ $A\cap B=[-2,1)$，$\complement_R B=(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.　……………………………………4 分

（II）若 $A\cup C=A$，则 $C\subseteq A$.当 $2-m>2+m$, 即 $m<0$ 时，$A=\varnothing$,符合题意.

当 $2-m\le 2+m$ 时，则 $\begin{cases}2-m\ge -2\\ 2+m\le 4\end{cases}$ 解得 $0\le m\le 2$.

所以 m 的取值范围为 $(-\infty,2]$……………………………………8 分

17.（本小题 10 分）

已知关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x+k^2+3=0$ 有两个不相等的实根 x_1,x_2 .

（I）若 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{6}{7}$，求 k 的值；

（II）求 $x_1^2+x_2^2$ 的取值范围.

解：（I）由题意，$\Delta=4(k+1)^2-4\left(k^2+3\right)>0$，解得 $k>1$.

由韦达定理可得：$\begin{cases} x_1+x_2=2(k+1) \\ x_1x_2=k^2+3 \end{cases}$

由$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2(k+1)}{k^2+3}=\frac{6}{7}$，得$3k^2-7k+2=0$，即$(k-2)(3k-1)=0$.

所以$k=2$或$k=\frac{1}{3}$.又因为$k>1$，所以$k=2$……………………………………6 分

（II）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(k+1)^2-2(k^2+3)=2k^2+8k-2$，其中$k>1$.

因为$2k^2+8k-2=2(k+2)^2-10$，所以当$k>1$时，$2(k+2)^2-10>8$

则$x_1^2+x_2^2$的取值范围是$(8,+\infty)$……………………………………10 分

18.（本小题满分 10 分）

已知关于x的不等式$ax^2+(a-1)x-1\geq 0$，$a\in R$.

（I）若不等式的解集为$\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$，求实数$a$的值；

（II）若$a<0$，求不等式的解集.

解：（I）由$ax^2+(a-1)x-1\geq 0$，得$(ax-1)(x+1)\geq 0$，

所以$\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$，得$a=-2$.经检验符合题意.……………………………………4 分

（II）$(ax-1)(x+1)=0$的两根为$\frac{1}{a},-1$，下面分类讨论

当$\frac{1}{a}>-1$，即$a<-1$时，不等式的解集为$\left[-1,\frac{1}{a}\right]$；

当$\frac{1}{a}=-1$，即$a=-1$时，不等式的解集为$\{-1\}$；　　……………………………10 分

当$\frac{1}{a}<-1$，即$-1<a<0$时，不等式的解集为$\left[\frac{1}{a},-1\right]$；

19.（本小题满分 12 分）已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，当$x\geqslant 0$时有$f(x)=\frac{4x}{x+4}$.

（I）求函数$f(x)$的解析式.

（II）判断函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上的单调性，并用定义证明.

（III）若关于x的不等式$f(2x^2+1)>f(m)$解集为$(0,+\infty)$，求m的取值范围.

解：（I）当$x<0$时，$-x>0$.此时$f(-x)=\frac{-4x}{-x+4}=\frac{4x}{x-4}$.

又因为$f(x)$是定义在R上的偶函数，则$f(-x)=f\left(x\right)$.

$\therefore f(x)=\frac{4x}{x-4}$. $f(x)$的解析式为$f(x)=\begin{cases}\frac{4x}{x+4}, & x\ge 0\\ \frac{4x}{x-4}, & x<0\end{cases}$. ……………………………………3 分

（II）证明：任取$x_1,x_2\in\left(-\infty,0\right)$且$x_1<x_2$.,

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{4x_1}{x_1-4}-\frac{4x_2}{x_2-4}=\frac{16\left(x_2-x_1\right)}{(x_1-4)(x_2-4)}$,

因为$x_1<x_2<0$,

所以$x_2-x_1>0$，$x_1-4<0,x_2-4<0$,

则$f(x_1)>f(x_2)$,

故$f(x)$在$\left(-\infty,0\right)$上是减函数；　　　　……………………………………………8 分

（III）由题意可得，　$2x^2+1>|m|$.

当$x>0$时，$2x^2+1>1$.所以$|m|\le 1$. m的取值范围为$\left[-1,1\right]$.

或者分类讨论：

当$m\ge 0$时，$2x^2+1>m$，则$0\le m\le 1$；

当$m<0$时，$2x^2+1>-m$，则$-1\le m<0$；

综上，m的取值范围为$\left[-1,1\right]$. ……………………………………………12 分

20.解：由题意，$\max\left\{x_i,y_i\right\}=\begin{cases}1 & x_i=1\text{或}y_i=1\\ 0 & x_i=y_i=0\end{cases}$，$i=1,2,3\cdots n$.故$\alpha*\beta\le n$.

引理(☆)：$\alpha*\alpha=x_1+x_2+...+x_n=$（$x_i$中的1的个数）,记为$\alpha_n$。

（I）$\beta=\left(1,1,1\right)$或$\beta=\left(1,0,1\right)$.

（II）若$\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，则$\alpha*\beta$的最大值是$n$，最小值是$\frac{n+1}{2}$的整数部分$\left[\frac{n+1}{2}\right]$,

理由如下：

由(☆)知，$n=\alpha_n+\beta_n=\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)+\left(y_1+y_2+\cdots+y_n\right)$.

当 $x_i+y_i=1, i=1,2,3\cdots,n$ 时，满足 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，

并且 $\max\left\{x_i,y_i\right\}=1$，故 $\alpha*\beta=n$

又 $\alpha*\beta\le n$，故 $\alpha*\beta$ 的最大值为 n.

因为整数 $\alpha*\beta\ge\max\{\alpha_n,\beta_n\}\ge\left[\dfrac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right]=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n\text{为偶数}.\\ \dfrac{n+1}{2}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$

n 为偶数时，$x_i=y_i=\begin{cases}0, & i>\dfrac{n}{2}\\ 1, & i\le\dfrac{n}{2}\end{cases}$ 时，$\alpha*\beta=\dfrac{n}{2}$.

n 为奇数时，取 $x_i=\begin{cases}1, & i\le\dfrac{n-1}{2}\\ 0, & i>\dfrac{n-1}{2}\end{cases}$，$y_i=\begin{cases}1, & i\le\dfrac{n+1}{2}\\ 0, & i>\dfrac{n+1}{2}\end{cases}$，$\alpha*\beta=\dfrac{n+1}{2}$.

故 $\alpha*\beta$ 的最大值是 n，最小值是 $\dfrac{n+1}{2}$ 的整数部分 $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$。

（III）$\forall\left\{\alpha,\beta\right\}\subseteq S, \alpha*\beta=n, \alpha=(x_1,x_2,...,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,...,y_n)$，

则 $\forall i\in\{1,2,\cdots n\}, \max\left\{x_i,y_i\right\}=1$，$S$ 中满足 $x_i=0$ 的元素至多有一个。否则 S 中满足第 i 个分量等于 0 的元素存在两个，即有 $\alpha=(x_1,x_2,...,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,...,y_n)$，$x_i=y_i=0$，

则 $\max\left\{x_i,y_i\right\}=0$，$\alpha*\beta<n$ 与已知矛盾。

故 S 中可能有的元素分为以下两种情况：

（1）每个分量都是 1 的，至多存在 1 个，

（2）某个分量是 0 的至多各有 1 个，总计 n 个

所以，$m_S\le n+1$.

当 $S=\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha\in U_n, \alpha_n=n\text{或}n-1\right\}$ 时，满足题意且 $m_S=n+1$，所求最大值为 $n+1$.