

2022 北京四中初三 12 月月考

数 学

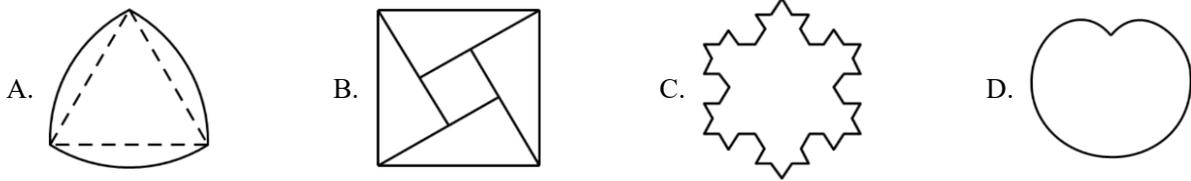


考生须知

- 1.本练习卷共 8 页，共 28 道小题，满分 100 分.练习时间 120 分钟.
- 2.答案一律填写在答题纸上，在练习卷上作答无效.
- 3.选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其它试题用黑色字迹签字笔作答.

一.选择题（共 16 分，每小题 2 分）

1. 下面的图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



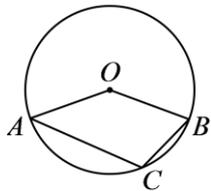
2. 二次函数 $y = -(x-1)^2 + 3$ 的最大值是（ ）

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

3. 点 $A(1, y_1)$ ， $B(3, y_2)$ 是反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 图象上的两点，那么 y_1 ， y_2 的大小关系是（ ）.

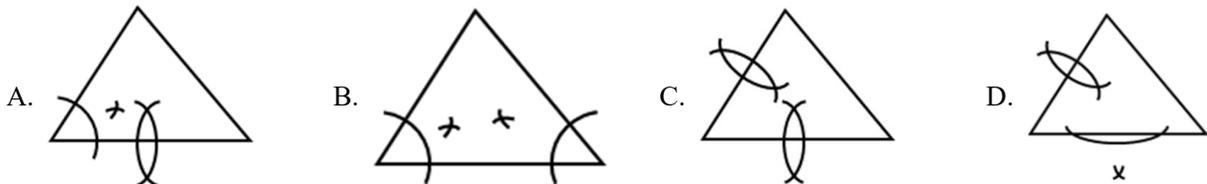
- A. $y_1 > y_2$ B. $y_1 = y_2$ C. $y_1 < y_2$ D. 不能确定

4. 如图，A，B，C 是 $\odot O$ 上的三个点，如果 $\angle AOB = 140^\circ$ ，那么 $\angle ACB$ 的度数为（ ）

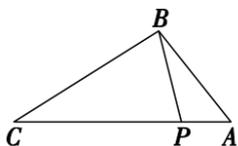


- A. 55° B. 70° C. 110° D. 140°

5. 根据图中圆规作图的痕迹，只用直尺可成功找到三角形内心的是（ ）

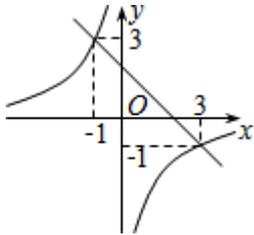


6. 如图，点 P 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上，如果添加一个条件后可以得到 $\triangle ABP \sim \triangle ACB$ ，那么以下添加的条件中，不正确的是（ ）



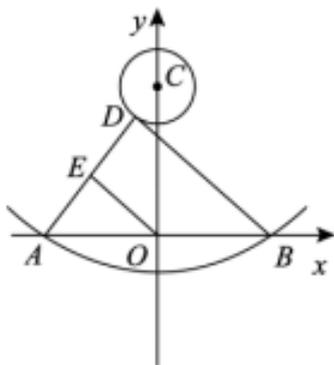
- A. $\angle ABP = \angle C$ B. $\angle APB = \angle ABC$ C. $AB^2 = AP \cdot AC$ D. $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CB}$

7. 一次函数 $y_1 = ax + b (a \neq 0)$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在同一平面直角坐标系 xOy 中的图象如图所示, 当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围是 ()



- A. $-1 < x < 3$ B. $x < -1$ 或 $0 < x < 3$
 C. $x < -1$ 或 $x > 3$ D. $-1 < x < 0$ 或 $x > 3$

8. 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两点, D 是以点 $C(0, 4)$ 为圆心, 1 为半径的圆上的动点, E 是线段 AD 的中点, 连接 OE, BD , 则线段 OE 的最小值是 ()



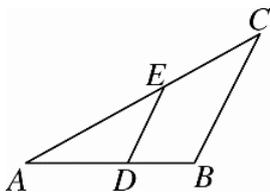
- A. 2 B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

二、填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

9. 已知 $2x = 5y$ $y \neq 0$, 则 $\frac{x}{y} =$ _____.

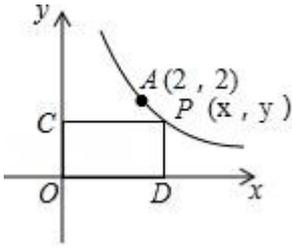
10. 请写出一个开口向下, 并且与 y 轴交于点 $(0, 2)$ 的抛物线的表达式: _____.

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 两点分别在 AB, AC 边上, $DE \parallel BC$, 如果 $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$, 则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为_____.

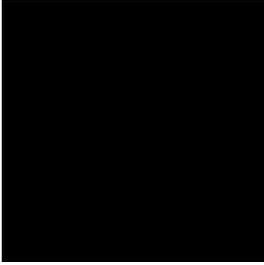


12. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 第一象限内的点 $P(x, y)$ 与点 $A(2, 2)$ 在同一个反比例函数的图

象上， $PC \perp y$ 轴于点 C ， $PD \perp x$ 轴于点 D ，那么矩形 $ODPC$ 的面积等于_____.



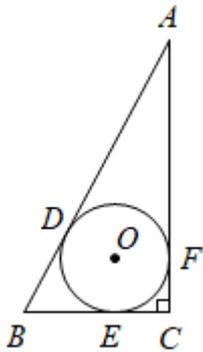
13. 如图等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，若 $\odot O$ 的半径为 1，则阴影部分的面积为_____.



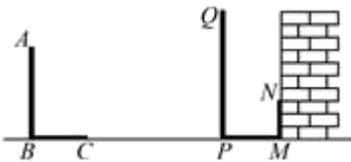
14. 《九章算术》是中国传统数学重要的著作之一，奠定了中国传统数学的基本框架.其中卷九中记载了一个问题：“今有勾八步，股十五步，问勾中容圆径几何？”

其意思是：“如图，今有直角三角形，勾（短直角边 BC ）长为 8 步，股（长直角边 AC ）长为 15 步，问该直角三角形能容纳的圆（内切圆）的直径是多少步？”

根据题意，该内切圆 直径为_____步.



15. 在同一时刻两根木竿在太阳光下的影子如图所示，其中木竿 $AB=2\text{m}$ ，它的影子 $BC=1.5\text{m}$ ，木竿 PQ 的影子有一部分落在了墙上， $PM=1.2\text{m}$ ， $MN=0.8\text{m}$ ，则木竿 PQ 的长度为_____m.



16. 已知双曲线 $y = \frac{5}{x}$ 与直线 $y = kx + b$ 交于点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$.

(1) 若 $x_1 + x_2 = 0$ ，则 $y_1 + y_2 =$ _____;

(2) 若 $x_1 + x_2 > 0$ 时， $y_1 + y_2 > 0$ ，则 k _____ 0， b _____ 0 (填“>”、“=”或“<”).

三、解答题（本题共 68 分）

17. 解下列方程:

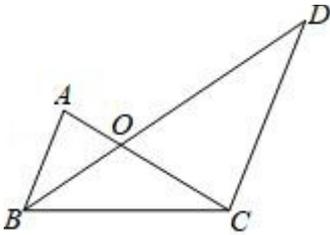
(1) $x^2 + 3x = 0$;

(2) $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

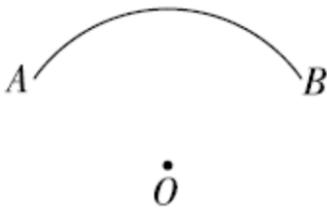
18. 如图, BO 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 延长 BO 至 D 使得 $BC = CD$.

(1) 求证: $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

(2) 若 $AB = 2$, $BC = 4$, $OA = 1$, 求 OC 长.



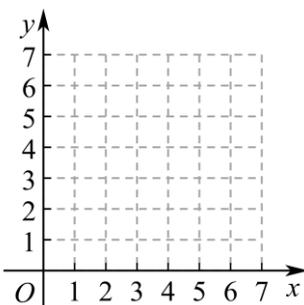
19. 如图, 舞台地面上有一段以点 O 为圆心的 AB , 某同学要站在 AB 的中点 C 的位置上, 于是他想: 只要从点 O 出发, 沿着与弦 AB 垂直的方向走到 AB 上, 就能找到 AB 的中点 C , 老师肯定了他的想法.



(1) 尺规作图: 请按照这位同学的想法, 在图中作出点 C ;

(2) 这位同学确定点 C 为 AB 的中点的依据是_____.

20. 如图, 四边形 $ABCD$ 各顶点的坐标分别为 $A(2,6)$, $B(4,2)$, $C(6,2)$, $D(6,4)$,



(1) 以原点 O 为位似中心, 在第一象限内, 画出四边形 $ABCD$ 的位似图形 $A_1B_1C_1D_1$, 使得对应边长变为原来的 $\frac{1}{2}$;

(2) 请分别写出点 A_1 和 B_1 的坐标: A_1 _____, B_1 _____.

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k + 1)x + k^2 + 2k = 0$ ① 有两个实数根 x_1, x_2 .

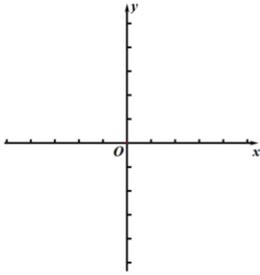
(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 从因式分解法可知, 方程①也可转化为 $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ②. 把方程②的左边展开化成一般形式后, 可以得到方程①两个根的和、积与系数分别有如下关系: $x_1 + x_2 =$ _____, $x_1 \cdot x_2 =$ _____ ; (用含 k

的式子表示)

(3) 是否存在实数 k , 使得 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 16$ 成立? 若存在, 请求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = x + 2$ 与函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图象交于 A, B 两点, 且点 A 的坐标为 $(1, a)$.



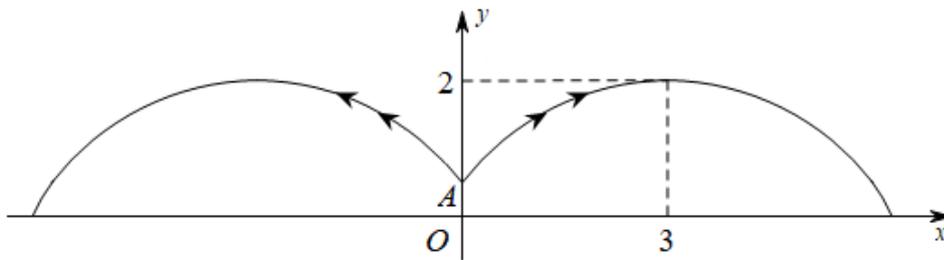
(1) 求 a 和 k 的值;

(2) 已知点 $P(m, 0)$, 过点 P 作平行于 y 轴的直线, 交直线 $y = x + 2$ 于点 C , 交函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象于点 D .

①当 $m = 2$ 时, 求线段 CD 的长;

②若 $PC < PD$, 结合函数的图象, 直接写出 m 的取值范围.

23. 某游乐场的圆形喷水池中心 O 有一喷水管 OA , $OA = 0.5$ 米, 从 A 点向四周喷水, 喷出的水柱为抛物线且形状相同. 如图, 以水平方向为 x 轴, 点 O 为原点建立平面直角坐标系, 点 A 在 y 轴上. 已知在与池中心 O 点水平距离为 3 米时, 水柱达到最高, 此时高度为 2 米.

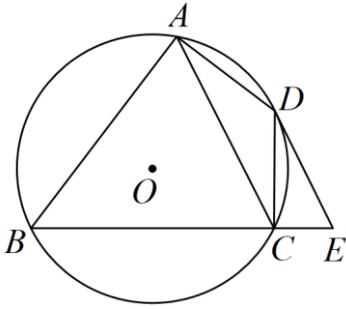


(1) 求水柱所在的抛物线 (第一象限部分) 的函数表达式;

(2) 现重新改建喷泉, 升高喷水管, 使落水点与喷水管距离 7m, 已知喷水管升高后, 喷水管喷出的水柱抛物线形状不变, 且水柱仍在距离原点 3m 处达到最高, 则喷水管 OA 要升高多少?

24. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\angle BAD = 90^\circ$, AC 是对角线. 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 BC 的延长线于点 E .





(1) 求证: $\angle CED = \angle BAC$;

(2) BA 与 CD 的延长线交于点 F , 若 $DE \parallel AC$, $AB = 6$, $AD = 3$, 求 AF 的长.

25. 小岩根据学习函数的经验, 对函数 $y = \frac{6}{|x-2|}$ 的图象与性质进行探究.

下面是小岩的探究过程, 请补充完整:

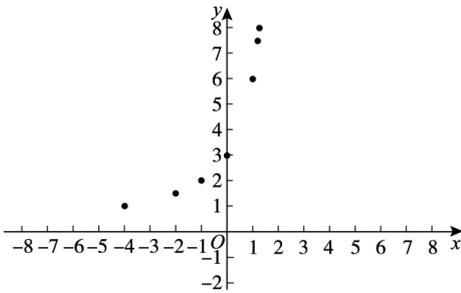
(1) 函数 $y = \frac{6}{|x-2|}$ 的自变量 x 的取值范围是_____;

(2) 取几组 y 与 x 的对应值, 填写在下表中:

x	...	-4	-2	-1	0	1	1.2	1.25	2.75	2.8	3	4	5	6	8	...
y	...	1	1.5	2	3	6	7.5	8	8	7.5	6	m	2	1.5	1	...

则 m 的值为_____;

(3) 如下图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 描出补全后的表中各组对应值所对应的点, 并画出该函数的图象;



(4) 获得性质. 解决问题:

①通过观察、分析、证明, 可知函数 $y = \frac{6}{|x-2|}$ 的图象是轴对称图形, 它的对称轴是_____;

②过点 $P(1, n)$ ($0 < n < 6$) 作直线 $l \parallel x$ 轴, 与函数 $y = \frac{6}{|x-2|}$ 的图象交于点 M, N (点 M 在点 N 的左侧),

则 $PN - PM$ 的值为_____.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $(2, 3)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ ($a > 0$) 上.

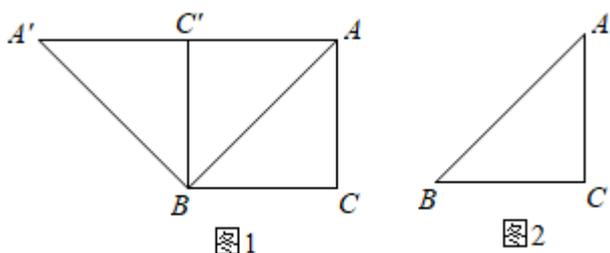
(1) 求该抛物线的对称轴;

(2) 已知 $m > 0$, 当 $1 - 2m \leq x \leq 1 + m$ 时, y 的取值范围是 $2 \leq y \leq 6$, 求 a, m 的值;



(3) 在(2)的条件下, 当 $n-1 \leq x \leq n+1$ 时, 若函数值 y 的最大与最小值的差不超过 4, 直接写出 n 的取值范围.

27. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle ABC=45^\circ$, $AB=\sqrt{2}$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 α ($0^\circ < \alpha \leq 120^\circ$) 得到 $\triangle A'BC'$, 点 A , 点 C 旋转后的对应点分别为点 A' , 点 C' .



(1) 如图 1, 当点 C' 恰好为线段 AA' 的中点时, $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ °, $AA' = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 当线段 AA' 与线段 CC' 有交点时, 记交点为点 D .

①在图 2 中补全图形, 猜想线段 AD 与 $A'D$ 的数量关系并加以证明;

②连接 BD , 请直接写出 BD 的长的取值范围.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和图形 M , 给出如下的定义: 若在图形 M 上存在一点 Q , 使得 P 、 Q 两点间的距离小于或等于 1, 则称 P 为图形 M 的近邻点.

(1) 当 $\odot O$ 的半径为 3 时,

①在点 $P_1(1,0)$, $P_2(1,\sqrt{3})$, $P_3\left(\frac{7}{2},0\right)$ 中, $\odot O$ 的近邻点是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

②点 P 在直线 $y=x$ 上, 若 P 为 $\odot O$ 的近邻点, 求点 P 的横坐标 x_p 的取值范围;

(2) $\odot C$ 的圆心为 $C(t,0)$, 半径为 3, 直线 $y=x+2$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B . 若线段 AB 上的所有点都是 $\odot C$ 的近邻点, 直接写出 t 的取值范围.

参考答案



一.选择题（共16分，每小题2分）

1. 【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称和中心对称的定义及性质直接判断即可.

【详解】解：A选项旋转180度后与原图不重合，不是中心对称图形，故A不符合题意；

B选项不是轴对称图形，故B不符合题意；

C选项旋转180度后与原图重合，是中心对称图形，同时也是轴对称图形，故C选项符合题意；

D选项旋转180度后与原图不重合，不是中心对称图形，故D不符合题意；

故选C.

【点睛】本题考查轴对称和中心对称的判断，解题关键是熟知轴对称和中心对称定义及性质.

2. 【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数的解析式是顶点式，即可得到结论.

【详解】解：二次函数 $y = -(x-1)^2 + 3$ 的最大值是3，

故选：D.

【点睛】本题考查了二次函数的最值. 求二次函数的最大（小）值有三种方法，第一种可由图象直接得出，第二种是配方法，第三种是公式法.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】根据反比例函数图象上点的坐标特征，把A点和B点坐标代入反比例函数解析式可计算出 y_1 , y_2 ，从而可判断它们的大小.

【详解】解：∵A(1, y_1), B(3, y_2) 是反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 图象上的两点，

$$\therefore y_1 = -\frac{6}{1} = -6, \quad y_2 = -\frac{6}{3} = -2,$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

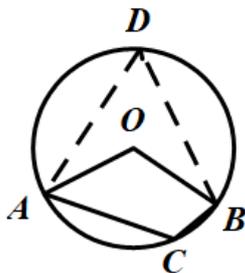
故选：C.

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征：反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 的图象是双曲线，图象上的点 (x, y) 的横纵坐标的积是定值 k ，即 $xy = k$ ；双曲线是关于原点对称的，两个分支上的点也是关于原点对称.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】在弧 AB 上取一点 D，连接 AD, BD，利用圆周角定理可知 $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB$ ，再利用圆内接四边形的性质即可求出 \angle 的度数.



【详解】

如图，在弧 AB 上取一点 D，连接 AD, BD，

$$\text{则 } \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

故选 C

【点睛】本题主要考查圆周角定理及圆内接四边形的性质，掌握圆周角定理及圆内接四边形的性质是解题的关键.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】根据内心的定义判断即可.

【详解】解：A、由作图可知，可作三角形一角平分线与一边的垂直平分线，不能找到三角形内心，故此选项不符合题意；

B、由作图可知，可作三角形两角平分线，找出两角平分线交点，这点就是三角形内心，故此选项符合题意；

C、由作图可知，可作三角形两边垂直平分线，两边垂直平分线交点上三角形外心，不能找到三角形内心，故此选项不符合题意；

D、由作图可知，可作三角形一边垂直平分线和一边的垂线，两垂线交点不是内心，不能找到三角形内心，故此选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查作图-基本作图，三角形的内心等知识，解题的关键是理解内心是三角形的角平分线的交点.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】分别利用相似三角形的判定方法判断得出即可.

【详解】解：A. 当 $\angle A = \angle A$ 时，又 $\because \angle A = \angle A$ ， $\therefore \triangle \sim \triangle$ ，故此选项不符合题意；

B. 当 $\angle A = \angle A$ 时，又 $\because \angle A = \angle A$ ， $\therefore \triangle \sim \triangle$ ，故此选项不符合题意；

C.当 $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AC}$ 时, 又 $\because \angle A = \angle A$, $\therefore \triangle \sim \triangle$, 故此选项不符合题意;

D.无法得到 $\triangle \sim \triangle$, 故此选项符合题意.

故选: D.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定, 正确把握判定方法是解题关键.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】观察图象, 找出一次数函数图象在反比例函数图象上方部分, 根据 A、B 两点坐标即可得答案.

【详解】 \because $y = x + 2$, $y = \frac{3}{x}$,

\therefore 一次函数图象在反比例函数图象上方,

$\therefore A(-1, 3), B(3, -1)$,

\therefore 当 $x < -1$ 或 $0 < x < 3$ 时,

故选: B.

【点睛】本题考查反比例函数与一次函数的交点问题, 正确理解函数图象是解题关键.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】根据抛物线解析式即可得出 A 点与 B 点坐标, 结合题意进一步可以得出 BC 长为 5, 利用三角形中位线性质可知 $OE = \frac{1}{2}BD$, 而 BD 最小值即为 BC 长减去圆的半径, 据此进一步求解即可.

【详解】 $\because y = x^2 - 9$,

\therefore 当 $y = 0$ 时, $0 = x^2 - 9$,

解得: $x = \pm 3$,

$\therefore A$ 点与 B 点坐标分别为: $(-3, 0), (3, 0)$,

即: $AO = BO = 3$,

$\therefore O$ 点为 AB 的中点,

又 \because 圆心 C 坐标为 $(0, 4)$,

$\therefore OC = 4$,

$\therefore BC$ 长度 $= \sqrt{OB^2 + OC^2} = 5$,

$\therefore O$ 点为 AB 的中点, E 点为 AD 的中点,

$\therefore OE$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线,

即: $OE = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore D$ 点是圆上的动点,

由图可知，BD 最小值即为 BC 长减去圆的半径，

∴BD 的最小值为 4，

$$\therefore OE = \frac{1}{2} BD = 2,$$

即 OE 的最小值为 2，

故选：A.

【点睛】本题主要考查了抛物线性质与三角形中位线性质的综合运用，熟练掌握相关概念是解题关键.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 【答案】 $\frac{5}{2}$.

【解析】

【分析】根据两内项之积等于两外项之积解答即可.

【详解】∵ $2x = 5y$ ，

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{2},$$

故答案为： $\frac{5}{2}$.

【点睛】本题主要考查了比例的性质，可根据比例的基本性质直接求解.

10. 【答案】 $y = -x^2 - 2x + 2$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】写出一个二次函数，使其二次项系数为负数，常数项为 2 即可.

【详解】解：根据题意得： $y = -x^2 - 2x + 2$ （答案不唯一），

故答案为： $y = -x^2 - 2x + 2$ （答案不唯一）.

【点睛】此题考查了二次函数的性质，熟练掌握二次函数性质是解本题的关键.

11. 【答案】 $\frac{9}{25}$

【解析】

【分析】由 _____，根据相似三角形的判定方法得到 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，然后根据相似三角形面积的比等于相似比的平方求解.

【详解】解：∵ _____，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5},$$

∴ _____，

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

故答案为： $\frac{9}{25}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质：平行于三角形一边的直线与其他两边所截的三角形与原三角形相似；相似三角形对应边的比相等，都等于相似比；相似三角形面积的比等于相似比的平方.

12. **【答案】** 4

【解析】

【分析】 根据点 A 的坐标可得出 k 的值，进而得出矩形 $ODPC$ 的面积.

【详解】 解：设点 $A(2, 2)$ 在反比例函数 $y = -\frac{k}{x}$ 的图象上，可得： $2 = -\frac{k}{2}$ ，

解得： $k = 4$ ，

因为第一象限内的点 $P(x, y)$ 与点 $A(2, 2)$ 在同一个反比例函数的图象上，

所以矩形 $ODPC$ 的面积等于 4，

故答案为 4

【点睛】 此题考查反比例函数系数 k 的几何意义，关键是根据点 A 的坐标可得出 k 的值.

13. **【答案】** $\frac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】 由等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，求得 $\angle AOC = 120^\circ$ ，再根据扇形的面积公式计算即可.

【详解】 解： \because 等边 $\triangle ABC$ ，

$\therefore \angle B = 60^\circ$ ，

\because 等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，

$\therefore \angle AOC = 2\angle B = 120^\circ$ ，

$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{120\pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{3}$ ，

故答案为： $\frac{\pi}{3}$.

【点睛】 本题考查等边三角形的性质，圆周角定理，扇形面积，熟练掌握等边三角形的性质和扇形面积的计算公式是解题的关键.

14. **【答案】** 6

【解析】

【分析】 根据勾股定理求出直角三角形的斜边，根据直角三角形的内切圆的半径的求法确定出内切圆半径，得到直径.

【详解】 解：连接 OD ， OE ， OF ，

$\because \odot O$ 是 $\triangle ABC$ 内接圆，

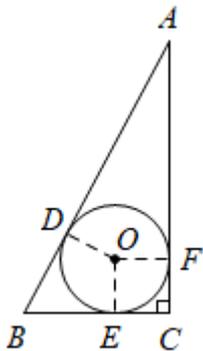
$$\begin{aligned} \therefore OD = OE = OF, \text{ 四边形 } OECF \text{ 是正方形,} \\ \therefore OD = OE = OF = CE = CF, \\ \therefore BE = BD, \quad AD = AF, \\ \therefore CE + CF = CB - BE + AC - AF = BC + AC - AB, \\ \therefore OE = \frac{BC + AC - AB}{2}, \end{aligned}$$

根据勾股定理得：斜边 $AB = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$,

$$\therefore \text{内切圆半径 } OE = \frac{8+15-17}{2} = 3,$$

$$\therefore \text{内切圆直径} = 2OE = 2 \times 3 = 6 \text{ (步)},$$

故答案为：6.



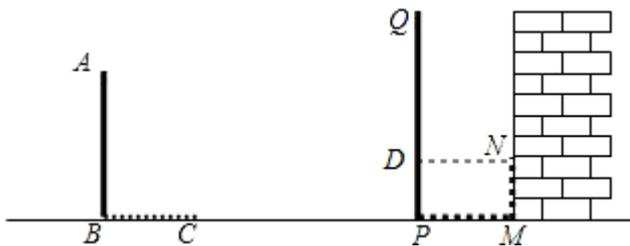
【点睛】 此题考查了三角形的内切圆与内心，掌握 $r = \frac{a+b-c}{2}$ 是解题的关键。中，两直角边分别为为 a 、 b ，斜边为 c ，其内切

15. **【答案】** 2.4

【解析】

【分析】 过 N 点作 $ND \perp PQ$ 于 D，先根据同一时刻物高与影长成正比求出 QD 的影长，再求出 PQ 即可。

【详解】 解：如图，过 N 点作 $ND \perp PQ$ 于 D，



$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{DN}{QD},$$

又 $\because AB=2, BC=1.5, DN=PM=1.2, NM=0.8,$

$$\therefore \frac{1.5}{2} = \frac{1.2}{QD},$$

$$\therefore QD=1.6,$$

$$\therefore PQ=QD+DP=QD+NM=1.6+0.8=2.4 \text{ (m)}.$$

故答案为：2.4.

【点睛】在运用相似三角形的知识解决实际问题时，要能够从实际问题中抽象出简单的数学模型，然后列出相关数据的比例关系式，从而求出结论.

16. 【答案】 ①. 0 ②. ③.

【解析】

【分析】(1) 联立两个函数解析式，整理为： $kx^2+bx-5=0(k \neq 0)$ ，再由根与系数的关系求解 $b=0$ ，从而得到： ， 关于原点对称，从而可得答案；

(2) 由 (1) 的结论，结合 ， 可得： $-\frac{b}{k} > 0$ ，由 $y_1=kx_1+b, y_2=kx_2+b$ ，可得

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=b$ ，结合： ， 可得 $b > 0$ ，从而可得答案.

【详解】解：(1) 由题意得：
$$\begin{cases} y = \frac{5}{x} \\ y = kx + b \end{cases}, \text{ 且 } k \neq 0,$$

$$\therefore \frac{5}{x} = kx + b,$$

$$\therefore kx^2 + bx - 5 = 0,$$

\therefore 两函数的交点为： ， .

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{k},$$

\therefore ，

$$\therefore -\frac{b}{k} = 0,$$

$$\therefore b = 0,$$

\therefore ， 为 $-$ 与 $y = kx(k \neq 0)$ 的交点，

由两函数的交点的性质可得： ， 关于原点对称，

$\therefore y_1, y_2$ 互为相反数，

$$\therefore y_1 + y_2 = 0,$$

故答案为：0.

(2) 由 (1) 得： $kx^2+bx-5=0$,

同理可得： $x_1+x_2=-\frac{b}{k}$,

$$\because y_1 = kx_1 + b, y_2 = kx_2 + b,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2b = k\left(-\frac{b}{k}\right) + 2b = -b + 2b = b,$$

当 $\frac{b}{k} > 0$ 且 $b > 0$ 时, $k < 0$,

$$\therefore -\frac{b}{k} > 0 \text{ 且 } b > 0,$$

$$\therefore k < 0,$$

故答案为: $k < 0$.

【点睛】 本题考查的是一次函数与反比例函数的交点问题, 一次函数与反比例函数的图像与性质, 同时考查了一元二次方程的根与系数的关系, 不等式的性质, 掌握以上知识是解题的关键.

三、解答题 (本题共 68 分)

17. 【答案】 (1) $x_1 = 0, x_2 = -3$

$$(2) x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$$

【解析】

【分析】 (1) 利用因式分解法求解即可;

(2) 利用公式法求解即可.

【小问 1 详解】

解:

$$x(x+3) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x + 3 = 0$$

$$\text{解得: } x_1 = 0, x_2 = -3$$

【小问 2 详解】

解:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 12 = 13 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程, 能选择适当的方法解方程是解此题的关键, 解一元二次方程的方法有直接开平方法, 公式法, 配方法, 因式分解法等.

18. 【答案】 (1) 答案见解析; (2) 2.

【解析】

【详解】 试题分析: 由 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线得 $\angle ABO = \angle OBC$, 再由 $BC = CD$ 得 $\angle OBC = \angle ODC$,

所以 $\angle ABO = \angle ODC$ ，又 $\angle AOB = \angle COD$ ，从而 $\triangle AOB \sim \triangle COD$ ；

(2) 根据 $\triangle AOB \sim \triangle COD$ 可求出结果.

试题解析：(1) 证明：∵ BO 是 $\triangle ABC$ 的角平分线

$$\therefore \angle ABO = \angle OBC$$

$$\because BC=CD$$

$$\therefore \angle OBC = \angle ODC$$

$$\therefore \angle ABO = \angle ODC$$

$$\text{又} \because \angle AOB = \angle COD$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD$$

$$(2) \because \triangle AOB \sim \triangle COD$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}$$

$$\text{又} \because AB=2, BC=4, OA=1, BC=CD$$

$$\therefore OC=2$$

19. 【答案】(1) 见解析 (2) 垂径定理

【解析】

【分析】(1) 用过一点作已知直线的垂线的方法，画出 AB 的垂线，与 的交点即为 C 点；

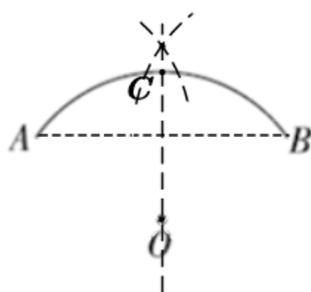
(2) 根据题意，满足垂径定理的条件，及“垂直于弦的直径”，由此可得该直线平分这条弦所对的弧.

【小问 1 详解】

如图，以 A 、 B 为圆心，相同的长度（大于 $\frac{1}{2}AB$ ）为半径画弧相交于一点连接这一点和圆心 O ，这条连线

即为 AB 的垂线，与 的交点即为点 C

∴ 点 C 的位置即为图中所示



【小问 2 详解】

由垂径定理“垂直于弦的直径平分弦，并且平分这条弦所对的两条弧”可知，直径在过圆心点 O 的直线上，且 $OC \perp AB$ ，∴ OC 平分线段 AB 且平分

故答案为：垂径定理

【点睛】本题考查了尺规作图和垂径定理，掌握基本尺规作图的方法和垂径定理的“知二得三”是解决本题的关键.

20. 【答案】(1) 见解析 (2) (1,3), (2,1)

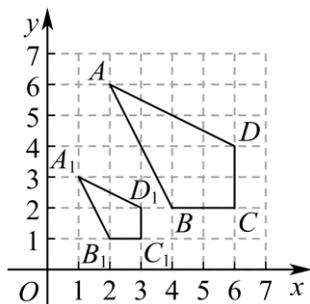
【解析】

【分析】(1) 根据位似变换的定义可知点 A 、 B 、 C 、 D 的横纵坐标都变为原来的 $\frac{1}{2}$ ，即为对应点的坐标，作出变换后的对应点，再顺次连接即可得；

(2) 根据 (1) 中所作的图形即可写出.

【小问 1 详解】

解：如图所示，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 即为所求.



【小问 2 详解】

由 (1) 可得 $A_1(1,3)$, $B_1(2,1)$,

故答案为: (1,3), (2,1).

【点睛】本题主要考查作图—位似变换，解题的关键是掌握位似变换的定义和性质，并据此得出变换后的对应点.

21. 【答案】(1) $k < \frac{1}{4}$

(2) $2k+1$; k^2+2k

(3) $k = -3$

【解析】

【分析】(1) 根据一元二次方程的定义和判别式的意义得到

$\Delta = b^2 - 4ac = [-(2k+1)]^2 - 4 \times 1(k^2 + 2k) > 0$ ，然后解该不等式即可求得 k 的取值范围；

(2) 将方程①也可转化为 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ ②，再把方程②的左边展开，得 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ 与方程①比较可得出答案；

(3) 根据 (2) 得 $x_1 + x_2 = 2k + 1$, $x_1x_2 = k^2 + 2k$ ，再代入 $x_1^2 + x_2^2 = 10$ 中求解即可.

【小问 1 详解】

解：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2k = 0$ 有两个实数根，

∴ $\Delta = b^2 - 4ac = [-(2k+1)]^2 - 4 \times 1(k^2 + 2k) > 0$,

化简整理，得 $1 - 4k > 0$,

解得： $k < \frac{1}{4}$ ；

【小问 2 详解】

解：∵关于 x 的一元二次方程

①有两个实数根，

∴ ②.

$$\therefore x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0,$$

比较①②得： $x_1 + x_2 = 2k + 1$ ， $x_1x_2 = k^2 + 2k$ ，

故答案为： $2k + 1, k^2 + 2k$ ；

【小问 3 详解】

解：∵

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 16,$$

由 (2) 得 $x_1 + x_2 = 2k + 1$ ， $x_1x_2 = k^2 + 2k$ ，

$$\therefore (2k + 1)^2 - 3(k^2 + 2k) = 16,$$

整理，得 $k^2 - 2k - 15 = 0$

解得： $k_1 = 5$ ， $k_2 = -3$ ，

又由 (1) 知 $k < \frac{1}{4}$ ，

$$\therefore k = -3.$$

∴存在，当 $k = -3$ 时，使得 成立.

【点睛】 本题考查一元二次方程根的判别式，探究一元二次方程根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

22. **【答案】** (1) $a = 3$ ， $k = 3$

(2) ①-；② $0 < m < 1$ 或 $-3 < m < 0$

【解析】

【分析】 (1) 先把点 A 坐标代入一次函数解析式求出 a 的值进而求出 A 的坐标，再把 A 的坐标代入反比例函数解析式求出 k 的值即可；

(2) ①将点 P 坐标分别代入直线解析式和反比例函数解析式，可求出点 C ，点 D 的坐标，即可求出 CD 的长；②根据图象法即可求解.

【小问 1 详解】

解：∵ $A(1, a)$ 在直线 的图象上，

$$\therefore a = 1 + 2 = 3,$$

∴点A的坐标为(1,3),

∴A(1,3)在函数 $y = kx$ 的图象上,

∴ $k = 1 \times 3 = 3$;

【小问2详解】

解: ①将 $x = 2$ 代入 $y = 3x$, 得: $y = 4$,

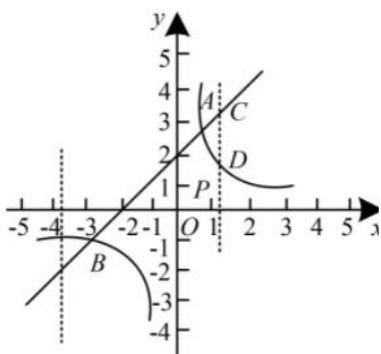
∴点C坐标为(2,4),

将 $x = 2$ 代入 $y = \frac{3}{x}$, 得: $y = \frac{3}{2}$,

∴点D坐标为 $(2, \frac{3}{2})$,

∴ $CD = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$;

②如图,



∴直线 $y = 3x$ 与反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象交于A, B两点,

∴点A坐标为(1,3), 点B坐标为(-3,-1),

∴由图象可知, 当 $0 < m < 1$ 或 $-3 < m < 0$ 时, $y = 3x > \frac{3}{x}$.

【点睛】 本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题, 待定系数法求解析式, 利用函数图象性质解决问题是本题的关键.

23. **【答案】** (1) $y = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + 2$

(2) $\frac{2}{3}m$

【解析】

【分析】 (1) 由题意得抛物线的顶点坐标为(3,2), 点A(0,0.5), 设抛物线的解析式为 $y = a(x-3)^2 + 2$, 待定系数法求出解析式即可;

(2) 设改造后的抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + 2 + h$ ，将点 $(7,0)$ 代入计算即可.

【小问 1 详解】

解：由题意得抛物线的顶点坐标为 $(3,2)$ ，点 $A(0,0.5)$

设抛物线的解析式为 $y = a(x-3)^2 + 2$ ，将点 A 坐标代入，得 $9a + 2 = 0.5$ ，

解得 $a = -\frac{1}{6}$ ，

\therefore 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + 2$ ；

【小问 2 详解】

设喷水管 要升高 hm ，

则抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + 2 + h$ ，

将 $(7,0)$ 代入，得 $h = \frac{2}{3}$ ，

\therefore 喷水管 要升高 $\frac{2}{3}m$.

【点睛】 此题考查了二次函数的实际应用以及二次函数的性质，理解题意，利用数形结合思想解题是关键.

24. **【答案】** (1) 见解析 (2) $AF = 4$

【解析】

【分析】 (1) 连接 BD ，则 BD 是 $\odot O$ 的直径，因为 DE 是 $\odot O$ 的切线，所以

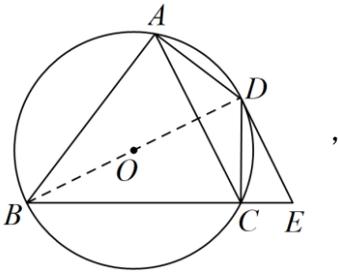
$\angle BDC + \angle CDE = \angle BDE = 90^\circ$ ，再根据四边形 $BCDE$ 内接于 $\odot O$ ，所以 $\angle DCE = 90^\circ$ ，则 $\angle CED + \angle CDE = 90^\circ$ ，从而得到 $\angle CED = \angle BDC$ ，又由圆周角定理知 $\angle BAC = \angle BDC$ ，即可得出结论；

(2) 补画出图，先证明 $BC = AB = 6$ ，再证明 $\triangle DAF \sim \triangle BCF$ ，得 $\frac{AD}{BC} = \frac{AF}{CF}$ ，即 $\frac{3}{6} = \frac{AF}{CF}$ ，则

$CF = 2AF$ ，然后在 $Rt\triangle BCF$ 中，由勾股定理，得 $BF^2 = BC^2 + CF^2$ ，即 $(6 + AF)^2 = 6^2 + (2AF)^2$ ，求解即可.

【小问 1 详解】

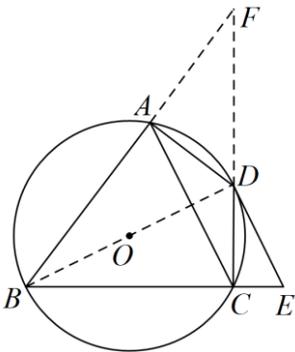
证明：连接 BD ，



∴ $\angle BDC = \angle BAC$,
 ∴ BC 是 $\odot O$ 的直径 ,
 ∴ DE 是 $\odot O$ 的切线 ,
 ∴ $BD \perp DE$,
 ∴ $\angle BDC + \angle CDE = \angle BDE = 90^\circ$,
 ∴ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,
 ∴ $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 90^\circ$,
 ∴ $\angle DCE = 90^\circ$,
 ∴ $\angle CED + \angle CDE = 90^\circ$,
 ∴ $\angle CED = \angle BDC$,
 ∴ $\angle BAC = \angle BDC$,
 ∴ $\angle BAC = \angle CED$;

【小问 2 详解】

解：如图，



∴ $\angle CED = \angle ACB$,
 由 (1) 知 $\angle BAC = \angle CED$,
 ∴ $\angle ACB = \angle BAC$,
 ∴ $BC = AB = 6$,
 ∴ $\angle DAF = \angle BCF = 90^\circ$,
 ∴ $\angle F = \angle F$,

$$\therefore \triangle DAF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{AF}{CF}, \text{ 即 } \frac{3}{6} = \frac{AF}{CF},$$

$$\therefore CF = 2AF,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, 由勾股定理, 得 $BF^2 = BC^2 + CF^2$,

$$\therefore (6 + AF)^2 = 6^2 + (2AF)^2,$$

$$\therefore AF = 4, \text{ 或 } AF = 0 \text{ (不符合题意舍去)},$$

$$\therefore AF = 4.$$

【点睛】 本题考查切线的性质, 圆周角定理的推论, 圆内接四边形的性质, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 本题属圆的综合题目, 熟练掌握相关性质定理是解题的关键.

25. **【答案】** (1) $x \neq 2$;

(2) _____ ;

(3) 见解析; (4) ①直线 $x = 2$; ②2.

【解析】

分析】 (1) 根据分母不等于 0, 求解即可;

(2) 将 $(5, m)$ 代入解析式, 求解即可;

(3) 根据表格描点, 连线画图即可;

(4) ①根据图象直接写出对称轴即可; ②根据 P 点的坐标和直线 _____ 轴, 求出 M 和 N 的横坐标, 计算即可.

【小问 1 详解】

解: 分母不等于 0, 即 $x - 2 \neq 0$,

解得 $x \neq 2$;

故答案为: $x \neq 2$;

【小问 2 详解】

解: 将 $(5, m)$ 代入 _____,

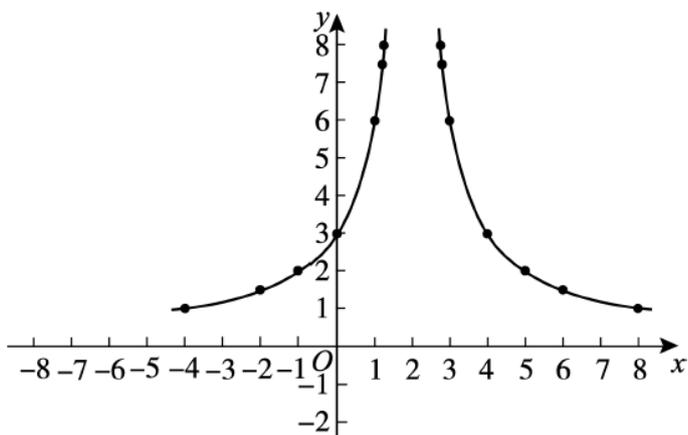
$$\text{得 } m = \frac{6}{|5-2|},$$

解得 _____,

故答案为: _____ ;

【小问 3 详解】

函数图象如下:



【小问 4 详解】

①由图象可得 $y = \frac{6}{|x-2|}$ 的对称轴为：直线 $x = 2$ ；

故答案为：直线 $x = 2$ ；

②∵点 P 的坐标为 $(1, n)$ ，

∴直线 l 的解析式为： $y = n$ ，

∴直线 l 与函数 $y = \frac{6}{|x-2|}$ 的图象交于点 M, N ，

$$\therefore n = \frac{6}{|x-2|}, \text{ 解得 } x_1 = \frac{6}{n} + 2, \quad x_2 = 2 - \frac{6}{n},$$

∵点 M 在点 N 的左侧，

$$\therefore x_M = 2 - \frac{6}{n}, \quad x_N = \frac{6}{n} + 2,$$

$$PN - PM = |x_N - x_P| - |x_M - x_P|$$

$$= \frac{6}{n} + 2 - 1 - \left| 2 - \frac{6}{n} - 1 \right|$$

$$= 1 + \frac{6}{n} - \left(\frac{6}{n} - 1 \right)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2.$$

故答案为：2.

【点睛】 本题考查了反比例函数的图象和性质，根据题意获取信息是解题关键.

26. 【答案】 (1) 直线 $x = 1$

(2) $a = 1, m = 1$

(3) $0 \leq n \leq 2$

【解析】

【分析】(1) 将点 代入抛物线解析式, 求出 $b = -2a$, 根据对称轴公式求出对称轴即可;

(2) 分别讨论 的取值范围与对称轴的位置, 分别求出不同情况下 y 取最大值与最小值时, 对应的 x 的取值, 进而求出 a 、 m 的值;

(3) 分四种情况, ①当 $n < 0$ 时, ②当 $0 \leq n \leq 1$ 时, ③当 $1 \leq n \leq 2$ 时, ④当 $n > 2$ 时, 分别求出最大值与最小值, 列不等式求出范围即可.

【小问 1 详解】

解: 将点 代入抛物线 ,

$$\therefore 4a + 2b + 3 = 3,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2a}{2a} = 1;$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知, 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$

$$\therefore ,$$

$$\therefore 1 - 2m < m < 1 + m,$$

$\therefore a > 0$, 抛物线的开口向上,

\therefore 当 $x = 1$ 时, 函数值在 上取得最小值 2,

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = a(x-1)^2 + 2,$$

将点 $(0, 3)$ 代入, 得 $a + 2 = 3$,

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore \text{函数解析式为 } y = (x-1)^2 + 2,$$

$$\therefore ,$$

\therefore 当 $1 - 2m < x < 1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 当 $x = 1 - 2m$ 时取得最大值,

当 $1 < x < 1 + m$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x = 1 + m$ 时取得最大值,

\therefore 对称轴为直线 $x = 1$

$\therefore x = 1 - m$ 与 $x = 1 + m$ 的函数值相等,

$$\therefore 1 - 2m < 1 - m$$

\therefore 当 $x = 1 - 2m$ 时的函数值大于当 $x = 1 - m$ 的函数值,

\therefore 当 $x = 1 - 2m$ 时, 函数值在 上取得最大值 6,

$$\therefore (1 - 2m - 1)^2 + 2 = 6,$$

解得 $m = 1$ (负值舍去);

【小问 3 详解】

由 (2) 知, $y = (x-1)^2 + 2$, $a = 1$,

①当 $n < 0$ 时，在对称轴的左侧，

∵二次函数的开口向上，

∴当 $x = n - 1$ 时有最大值，当 $x = n + 1$ 时有最小值，

$$\therefore (n-1-1)^2 + 2 - [(n+1-1)^2 + 2] \leq 4,$$

解得 $n \geq 0$ ，不合题意，舍去；

②当 $0 \leq n \leq 1$ 时，在 中最小值为 2，

当 $x = n - 1$ 时取得最大值，

$$\therefore (n-1-1)^2 + 2 - 2 \leq 4,$$

解得 $0 \leq n \leq 1$ ；

③当 $1 \leq n \leq 2$ 时，在 中最小值为 2，

当 $x = n + 1$ 时取得最大值，

$$\therefore (n+1-1)^2 + 2 - 2 \leq 4,$$

解得 $-2 \leq n \leq 2$ ，

$$\therefore 1 \leq n \leq 2;$$

④当 $n > 2$ 时，在对称轴的右侧，

∵二次函数的开口向上，

∴当 $x = n + 1$ 时有最大值，当 $x = n - 1$ 时有最小值，

$$\therefore [(n+1-1)^2 + 2] - [(n-1-1)^2 + 2] \leq 4,$$

解得 $n \leq 2$ ，不合题意，舍去；

综上， n 的取值范围为 $0 \leq n \leq 2$ 。

【点睛】此题是二次函数的综合题，考查了二次函数的性质，二次函数的最值，解方程组，解不等式，分类讨论，待定系数法，正确进行分类讨论是解题的关键。

27. **【答案】**(1) 90° ，2

(2) ①图见解析； $AD = A'D$ ，证明见解析；② $1 \leq BD \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 由 $AB = A'B$ ， $\angle A'BC' = \angle ABC$ 可知 $\triangle ABA'$ 是等腰三角形，根据 为 的中点，即可求得 $AA' = 2A'C' = 2$ ， $\angle A'BC' = \angle ABC' = 45^\circ$ ，即可求解；

(2) ①根据题意补全图形即可；根据已知条件证明 $\triangle ADE \cong \triangle A'DC'$ 即可得到 $AD = A'D$ ②根据 $\triangle ABA'$ 是等腰三角形和 $AD = A'D$ ，可得到 $BD \perp AA'$ ，平分 $\angle ABA'$ ，进而得到 $\frac{BD}{AB} = \cos \frac{\alpha}{2}$ ，根据 的取值范围即可得到 的取值范围。

【小问 1 详解】

解：∵ $\angle ABC = 45^\circ$ ， $AB = \sqrt{2}$ ，

∴ $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

∴ $AC = BC$ ，

$$AC = BC = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1，$$

∴ $AC^2 + BC^2 = AB^2 = 2$ ，

∴ $AC = BC = 1$ ，

∴ 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 45° 得到 $\triangle A'BC'$ ，

∴ $A'B = AB = \sqrt{2}$ ， $A'C' = AC = 1$ ， $\angle A'BC' = \angle ABC = 45^\circ$ ，

∴ 点 D 恰好为线段 $A'C'$ 的中点，

∴ $AA' = 2A'D = 2$ ， $\angle A'BC' = \angle ABC' = 45^\circ$ ，

∴ $\alpha = \angle A'BA = 90^\circ$ ；

故答案为： 90° ， 2

【小问 2 详解】

解：①补全图形，如下图：

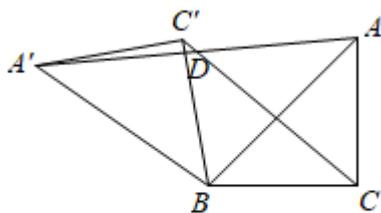


图2

$AD = A'D$ ，证明如下：

如上图，过点 E 作 $A'C'$ 的平行线，交 AC 于点 F ，记 $\angle 1 = \beta$ ，

∴ 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 45° 得到 $\triangle A'BC'$ ，

∴ $\angle A'C'B = \angle ACB = 90^\circ$ ， $A'C' = AC$ ， $BC' = BC$ ，

∴ $\angle 2 = \angle 1 = \beta$ ，

∴ $\angle 3 = \angle ACB - \angle 1 = 90^\circ - \beta$ ， $\angle A'C'D = \angle ACB + \angle 2 = 90^\circ + \beta$ ，

∴ $AE \parallel A'C'$ ，

∴ $\angle DAE = \angle C'A'D$ ，

∴ $\angle AED = \angle A'C'D = 90^\circ + \beta$ ，

∴ $\angle 4 = 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - (90^\circ + \beta) = 90^\circ - \beta$ ，

∴ $\angle 3 = \angle 4$ ，

∴ $AE = AC$ ，

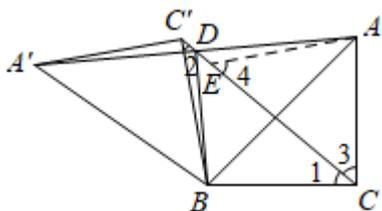
∴ $AE = A'C'$ ，

在 \triangle 和 $\triangle A'D'C'$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle A'DC' \\ \angle AED = \angle A'C'D, \\ AE = A'C' \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'DC'$,

$\therefore AD = A'D$;



②由(1)得 $\triangle ABA'$ 是等腰三角形,

$\therefore AD = A'D$,

\therefore 是 的中线,

$\therefore BD \perp AA'$, 平分 $\angle ABA'$,

$\therefore \angle BDA = 90^\circ, \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABA' = \frac{1}{2} \alpha$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\frac{BD}{AB} = \cos \frac{\alpha}{2}$,

$\therefore BD = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$,

又 \because 线段 AA' 与线段 CC' 有交点时,

由(1)得: 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 最大,

$\therefore 90^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$,

$\therefore 45^\circ \leq \frac{\alpha}{2} \leq 60^\circ$,

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore 1 \leq \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$\therefore 1 \leq BD \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$.

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质, 旋转的性质, 平行线的性质, 勾股定理, 全等三角形的性质与判定, 解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.

28. **【答案】** (1) ① P_2 和 P_3 ; ② $-2\sqrt{2} \leq x_p \leq -\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} \leq x_p \leq 2\sqrt{2}$

$$(2) -4 \leq t \leq -2\sqrt{3} \text{ 或 } 2\sqrt{2} - 2 \leq t \leq 2$$

【解析】

【分析】(1) ①根据相邻点的定义，即可求解；②满足条件的 P 只需在以 O 为圆心，半径为 2 和 4 两圆之间即可，所以 P 横坐标范围是 $-2\sqrt{2} \leq x_p \leq -\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} \leq x_p \leq 2\sqrt{2}$ ；

(2) 根据题意可得线段 上的点应在以点 C 为圆心，以 2 为半径和以 4 为半径的同心圆组成的圆环中，然后分四种情况讨论：当外圆过点 B 时，当内圆经过点 B 时，当内圆与 AB 相切时，切点为点 P ，当外圆经过点 A 时，即可得出。

【小问 1 详解】

解：①∵ \quad ， $\sqrt{\quad}$ ， \quad -

$$\therefore OP_1 = 1, OP_2 = 2, OP_3 = \frac{7}{2},$$

∵ \odot 的半径为 3，

∴ 点 P_1 与 \odot 的最小距离为 \quad ，点 P_2 与 \odot 的最小距离为 1，点 P_3 与 \odot 的最小距离为 -，

∴ \odot 的关联点为 P_2 和 P_3 ；

故答案为： P_2 和 P_3

②∵ 点 P 在直线 \quad 上，且 P 为 \odot 的近邻点，

∴ 当直线 \quad 上的点 P 到原点的距离在 2 到 4 之间时符合题意；

∴ 设点 P 坐标为 $P(x_p, x_p)$ ，

$$\text{当 } OP = 2 \text{ 时， } OP = \sqrt{(x_p - 0)^2 + (x_p - 0)^2} = 2，$$

解得 $x_p = \pm\sqrt{2}$ ，

$$\text{当 } OP = 4 \text{ 时， } OP = \sqrt{(x_p - 0)^2 + (x_p - 0)^2} = 4，$$

解得 $x_p = \pm 2\sqrt{2}$ ，

∴ 点 P 的横坐标的取值范围为 $-2\sqrt{2} \leq x_p \leq -\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} \leq x_p \leq 2\sqrt{2}$ ；

【小问 2 详解】

∵ \quad 与轴、轴的交点分别为 A 、 B 两点，

∴ 令 $y = 0$ 得， $x + 2 = 0$ ，解得 $x = -2$ ，

令得 $x = 0$ 得， $y = 2$ ，

∴ $A(-2, 0), B(0, 2)$ ，

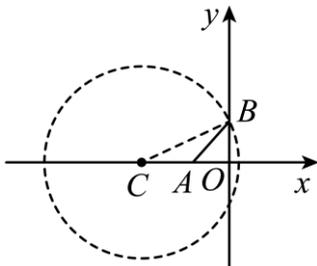
∴ \odot 的圆心为 \quad ，

∴点 A 到点 C 的距离为: $AC = \sqrt{(t+2)^2}$, 点 B 到点 C 的距离为: $BC = \sqrt{t^2 + 4}$,

∴线段 AB 上的所有点都是 $\odot C$ 的关联点,

∴线段 AB 上的点应在以点 C 为圆心, 以 2 为半径和以 4 为半径的同心圆组成的圆环中,

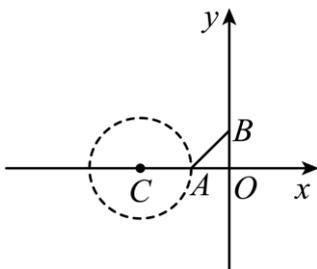
如图, 当外圆过点 B 时, 此时 $BC = 4$,



∴ $OC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

∴ $C(-2\sqrt{3}, 0)$,

当内圆经过点 B 时, 如图:

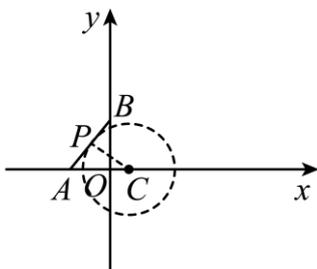


此时 $AC = 2$,

∴ $C(-4, 0)$,

∴点 C 横坐标取值范围: $-4 \leq t \leq -2\sqrt{3}$;

当内圆与 AB 相切时, 切点为点 P , 如图:



此时 $CP = 2$,

∴ $AO = BO = 2$, $\angle AOB = 90^\circ$,

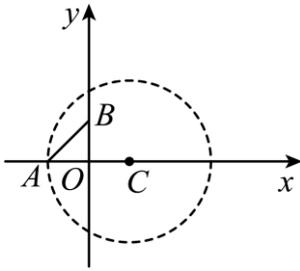
∴ $\angle BAO = 45^\circ$,

∴点 P 为切点, 即 $\angle CPA = 90^\circ$,

∴ $AC = \sqrt{CP^2 + PA^2} = 2\sqrt{2}$,

∴ $C(2\sqrt{2} - 2, 0)$,

当外圆经过点 A 时，如图：



此时 $AC = 4$ ，

$\therefore C(2,0)$ ，

\therefore 点 C 横坐标的取值范围： $2\sqrt{2}-2 \leq t \leq 2$

综上： $-4 \leq t \leq -2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{2}-2 \leq t \leq 2$ 。

【点睛】 本题主要考查了一次函数的性质，勾股定理，直线与圆的位置关系，两点间的距离公式，同心圆等，解题的关键是熟练掌握各个知识点，正确画出图形，进行分类讨论。