2024 北京房山高三（上）期末

数　　学

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回，试卷自行保存。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合 $A=\{-2,0,1,2\}$，$B=\{x|1-x>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{-2,0\}$　　D. $\{-2,0,1,2\}$

2.在复平面内，若复数 z 对应的点为 $(-1,1)$，则 $(-1-\mathrm{i})z=$（　　）

A. 2　　B. $2\mathrm{i}$　　C. $-2\mathrm{i}$　　D. -2

3.已知向量 $\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(m,1)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 m 的值为（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

4.$\left(x^3+\frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式中的常数项是（　　）

A. -32　　B. 32　　C. -23　　D. 23

5.已知 a，b 为非零实数，且 $a>b$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　C. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$　　D. $\frac{1}{ab^2}>\frac{1}{a^2b}$

6.已知直线 l：$y=2x+b$ 与圆 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 相切，则实数 $b=$（　　）

A. 1 或 9　　B. -1 或 9　　C. -1 或 -9　　D. 1 或 -9

7.已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)-f(x)=0$，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，对于实数 a，b，则“$a^2<b^2$”是“$f(a)>f(b)$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8.保护环境功在当代，利在千秋，良好的生态环境既是自然财富，也是经济财富，关系社会发展的潜力和后劲.某工厂将生产产生的废气经过过滤后排放，已知过滤过程中的污染物的残留数量 P（单位：毫米/升）与过滤时间 t（单位：小时）之间的函数关系为 $P=P_0\cdot \mathrm{e}^{-kt}(t\geq 0)$，其中 k 为常数，$k>0$，P_0 为原污染物数量.该工厂某次过滤废气时，若前 9 个小时废气中的污染物恰好被过滤掉 80%，那么再继续过滤 3

小时，废气中污染物的残留量约为原污染物的（参考数据：$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.585$）（　　）

A. 12%　　　　B. 10%　　　　C. 9%　　　　D. 6%

9.已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为双曲线 C 左支上一动点，Q 为双曲线 C 的渐近线上一动点，且 $|PQ|+|PF_2|$ 最小时，PF_1 与双曲线 C 的另一条渐近线平行，则双曲线 C 的方程可能是（　　）

A. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　　　B. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　　　C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　　　　D. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

10.数学家祖冲之曾给出圆周率 π 的两个近似值："约率" $\frac{22}{7}$ 与"密率" $\frac{355}{113}$.它们可用"调日法"得到：称小于 3.1415926 的近似值为弱率，大于 3.1415927 的近似值为强率.由于 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{4}{1}$，取 3 为弱率，4 为强率，计算得 $a_1=\frac{3+4}{1+1}=\frac{7}{2}$，故 a_1 为强率，与上一次的弱率 3 计算得 $a_2=\frac{3+7}{1+2}=\frac{10}{3}$，故 a_2 为强率，继续计算，….若某次得到的近似值为强率，与上一次的弱率继续计算得到新的近似值；若某次得到的近似值为弱率，与上一次的强率继续计算得到新的近似值，依此类推.已知 $a_m=\frac{25}{8}$，则 $m=$（　　）

A. 8　　　　B. 7　　　　C. 6　　　　D. 5

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.函数 $y=\ln(1-2x)+\frac{2}{x}$ 的定义域是__________.

12.记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$，则 $a_n=$__________.

13.在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b-\frac{\sqrt{2}}{2}c=a\cos C$，则 $\angle A=$__________.

14.已知平面直角坐标系中，动点 M 到 $F(0,-2)$ 的距离比 M 到 x 轴的距离大 2，则 M 的轨迹方程是__________.

15.如图，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 B_1C 上的动点.给出下列结论：

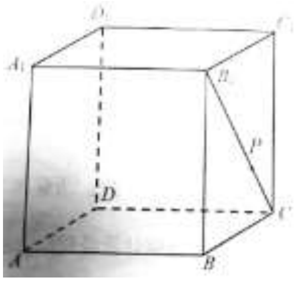
① $AP\perp BD_1$；

② $AP//$ 平面 A_1C_1D；

③直线 AP 与直线 A_1D_1 所成角的范围是 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$；

④点 P 到平面 A_1C_1D 的距离是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

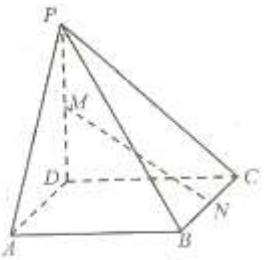
其中所有正确结论的序号是__________.



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle PAD$ 为等腰三角形，$PD\perp AD$，$PA=2\sqrt{2}$，底面 $ABCD$ 是正方形，M，N 分别为棱 PD，BC 的中点.



（Ⅰ）求证：$MN//$ 平面 PAB；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值.

条件①：$CD\perp PA$；

条件②：$PB=2\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题 13 分）

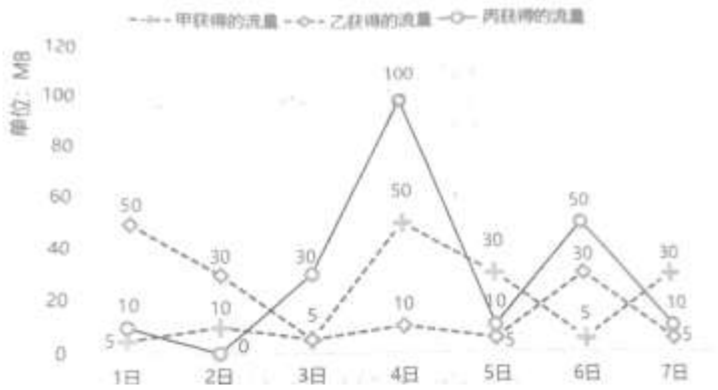
已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象上所有点向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度，所得函数图象关于原点对称.

（Ⅰ）求 φ 的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)-2\cos^2 x+\dfrac{1}{2}$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上有且只有一个零点，求 m 的取值范围.

18.（本小题 13 分）

某移动通讯公司为答谢用户，在其 APP 上设置了签到翻牌子赢流量活动.现收集了甲、乙、丙 3 位该公司用户 2023 年 12 月 1 日至 7 日获得的流量（单位：MB）数据，如图所示.



（Ⅰ）从 2023 年 12 月 1 日至 7 日中任选一天，求该天乙获得流量大于丙获得流量的概率；

（Ⅱ）从 2023 年 12 月 1 日至 7 日中任选两天，设 X 是选出的两天中乙获得流量大于丙获得流量的天数，求 X 的分布列及数学期望 EX；

（Ⅲ）将甲、乙、丙 3 位该公司用户在 2023 年 12 月 1 日至 7 日获得流量的方差分别记为 s_1^2，s_2^2，s_3^2，试比较 s_1^2，s_2^2，s_3^2 的大小（只需写出结论）.

19.（本小题 15 分）

设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，右焦点为 F，已知 $|A_1F|=3$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）已知点 P 是椭圆 C 上的一个动点（不与顶点重合），直线 A_2P 交 y 轴于点 Q，若 $\triangle A_1PQ$ 的面积是 $\triangle A_2FP$ 面积的 4 倍，求直线 A_2P 的方程.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\cdot \mathrm{e}^x$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上只有一个极值点，求 a 的取值范围.

21.（本小题 15 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：$\exists m\in\mathbf{N}^*$，对于 $\forall n\geq n_0\left(n_0\in\mathbf{N}^*\right)$，都有 $\dfrac{a_{n+m}}{a_n}=q$（其中 q 为常数），则称 $\{a_n\}$ 具有性质“$Q\left(m,n_0,q\right)$”.

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$ 具有性质“$Q(4,2,3)$”，且 $a_3=1$，$a_5=2$，$a_6+a_9+a_{11}=20$，求 a_2；

（Ⅱ）若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，$b_2=c_3=4$，$b_1+c_1=c_2$，$a_n=b_n+c_n$，判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质“$Q(2,1,3)$”，并说明理由；

（III）设$\{a_n\}$既具有性质“$Q(i,1,q_1)$”，又具有性质“$Q(j,1,q_2)$”，其中i，$j\in\mathbf{N}^*$，$i<j$，求证：$\{a_n\}$具有性质“$Q\left(j-i,i+1,q_2^{\frac{j-i}{j}}\right)$”．