

数学 (创新班)

(清华附中初 19 级) 2020.11

一、选择题 (本题共 24 分, 每小题 3 分,)

1. 已知 $A(1,3)$, $B(-2,5)$, 则直线 AB 的斜率为

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

【 】

2. 如图, 在平面直角坐标系 xOy , 四边形 $OABC$ 为正方形, 若点 $B(1,3)$, 则点 C 的坐标为

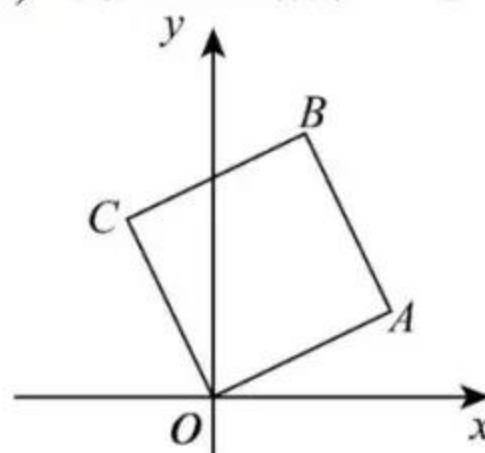
A. $(-1,2)$

B. $(-1, \frac{5}{2})$

C. $(-\frac{3}{2}, 2)$

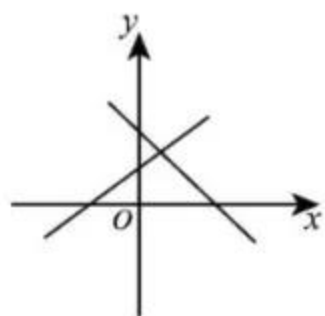
D. $(-1, \frac{3}{2})$

【 】

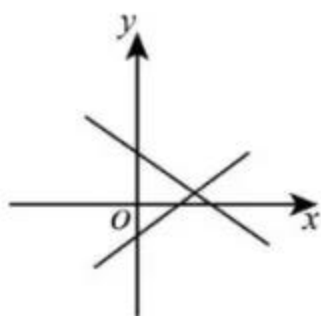


3. 在同一直角坐标系中, 一次函数 $y=kx+b$ 和 $y=bx+k$ 的图形可能正确的是

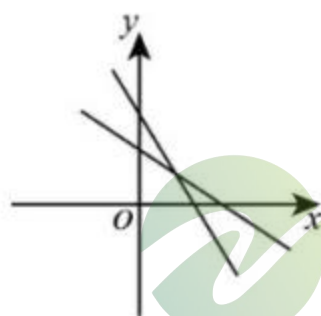
【 】



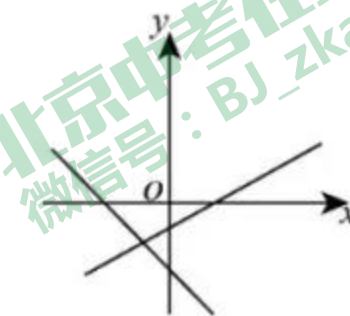
A.



B.



C.



D.

4. 直线经过两个整点 (横纵坐标都为整数的点) 是该直线经过无数个整点的

【 】

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件 【晓观数学公众号】

C. 充分必要条件

D. 既不充分不必要条件

5. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD=DC$, $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, $DE \perp AB$, 若 $BC=2$, $AE=4$,

则四边形 $ABCD$ 的面积为

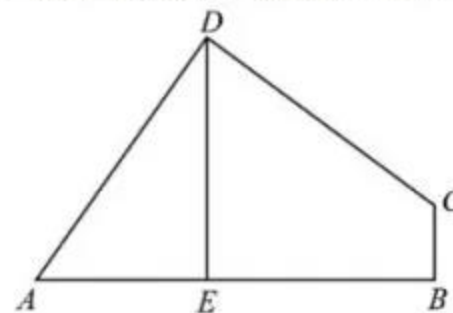
【 】

A. 16

B. 18

C. 25

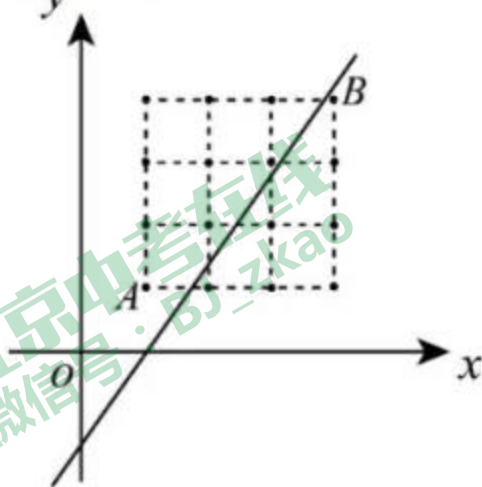
D. 36



6.如图,在平面直角坐标系中有一个 3×3 的正方形网格,其左下角格点 A 的坐标为 $(1,1)$,右上角格点 B 的坐标为 $(4,4)$,若分布在直线 $y = k(x-1)$ 两侧的格点数相同,则 k 的取值可以是 【 】

- A. $\frac{5}{2}$
C. $\frac{7}{4}$

- B. 2
D. $\frac{3}{2}$



7.已知点 $A(1,1)$, $B(3,5)$, 在 x 轴上的点 C ,使得 $AC + BC$ 最小,则点 C 的坐标为 【 】

- A. $\frac{4}{3}$
C. 2

- B. $\frac{5}{3}$
D. $\frac{7}{3}$

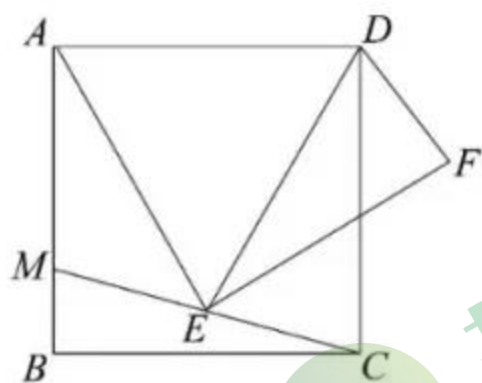
8.如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 M 是 AB 上一动点,【晓观数学公众号】点 E 是 CM 的中点, AE 绕点 E 顺时针旋转 90° 得到 EF ,连接 DE , DF 给出结论:① $DE = DF$; ② $\angle CDF = 45^\circ$; ③ $\frac{AM}{DF} = \sqrt{3}$; ④

若正方形的边长为2,则点 M 在射线 AB 上运动时, CF 有最小值 $\sqrt{2}$ 。其中结论正确的是

【 】

- A.②③④
C.①③④

- B.①②③
D.①②④



二、填空题(本题共24分,每小题3分)

9. 函数 $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x+1} + x^0$ 的定义域为_____。

10. 无论 k 取何值,直线 $y = kx - 2 + 3k$ 总过定点_____。

11. 直线 $ax + y + a - 3 = 0$ 与直线 $(a+2)x + ay - 2 = 0$ 平行,则 a 的值为_____。

12. 直线 $ax + y - 2a + 1 = 0$ 与直线 $(a+2)x - ay + 3 = 0$ 垂直,则 a 的值为_____。

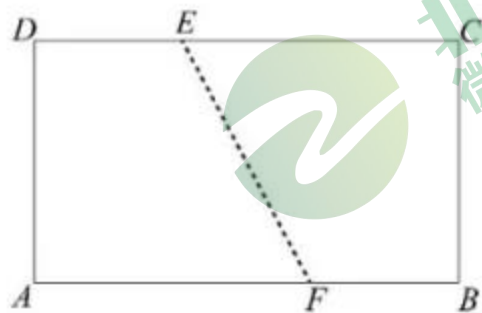


13. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $AD=2$ 。将矩形沿 EF 对折, 使得 A 、 C 重合, 则折痕 EF 的长为_____。

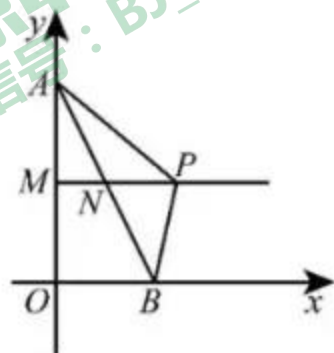
14. 如图, 点 $A(0,8)$, 点 $B(4,0)$, 连结 AB , 【晓观数学公众号】点 M , N 分别是 OA , AB 的中点, 在射线 MN 上有一动点 P , 若 $\triangle ABP$ 是直角三角形, 则点 P 的坐标是_____。

15. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $T(4,2)$ 。 M 、 N 分别是 x 轴与 y 轴正半轴上的动点, 且线段 $MN=4$, P 为 MN 的中点。在线段 MN 的运动过程中, PT 长的最小值为_____。

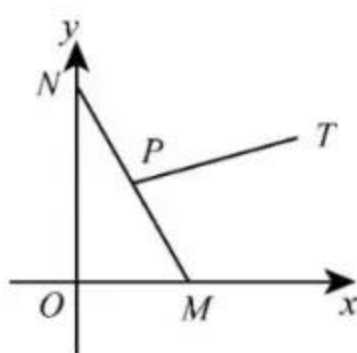
16. 计算机可以帮助我们又快又准地画出函数的图象。用“几何画板”软件画出的函数 $y=x^2(x-3)$ 和 $y=x-3$ 的图象如图所示。根据图象可知方程 $x^2(x-3)=x-3$ 的解的个数为_____；若 m , n 分别为方程 $x^2(x-3)=-5$ 和 $x-3=-5$ 的解, 则 m , n 的大小关系是_____。



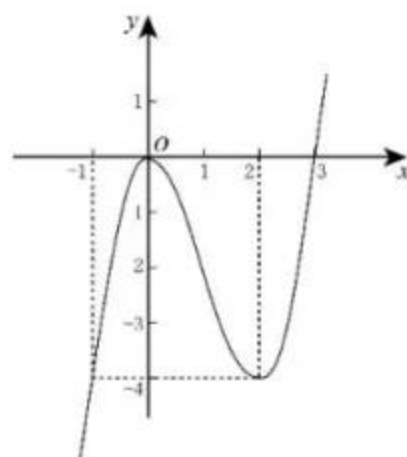
第13题图



第14题图



第15题图



第16题图



三、解答题（本题共 72 分，第 17 题 8 分，第 18 题 20 分，19、20 题每题 6 分，第 21-24 题每题 8 分）

17. 下面是【晓观数学公众号】小明设计的“在一个平行四边形内作菱形”的尺规作图过程。

已知：四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

求作：菱形 $ABEF$ （点 E 在 BC 上，点 F 在 AD 上）。

作法：以 A 为圆心， AB 长为半径作弧，交 AD 于点；

以 B 为圆心， AB 长为半径作弧， BC 交于点；

连接 EF 。

所以四边形 $ABEF$ 为所求作的菱形。

根据小明设计的尺规作图过程，



(1) 使用直尺和圆规，补全图形；（保留作图痕迹）

(2) 完成下面证明。

证明：∵ $AF = AB$ ， $BE = AB$ ，

∴ _____ = _____ （填推理的依据）。

在 $\square ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，

即 $AF \parallel BE$ 。

∴ 四边形 $ABEF$ 为平行四边形。（填推理的依据）。

∵ $AF = AB$ ，

∴ 四边形 $ABEF$ 为菱形（_____）（填推理的依据）。

18. 根据所给条件，分别求出满足下列条件的一次函数解析式：

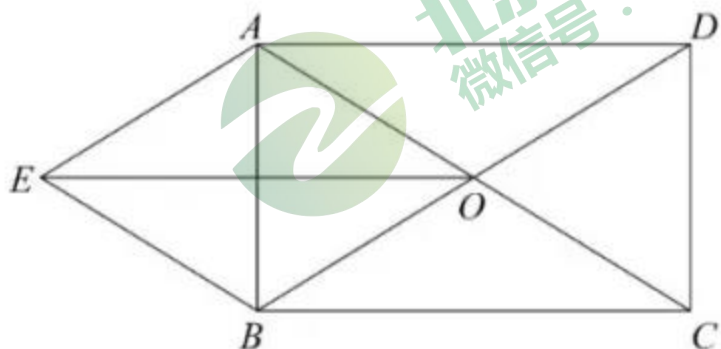
- (1) 经过直线 $y = -x + 1$ 与 x 轴的交点，且平行于直线 $y = 2x + 3$ ；
- (2) 经过直线 $y = 2x + 3$ 与 $y = -3x - 2$ 的交点，且在 y 轴上的截距等于 2；
- (3) 经过直线 $y = 2x - 3$ 上一点 $A(1, n)$ ，且与 $y = 2x - 3$ 、 x 轴围成三角形面积为 1；
- (4) 经过直线 $y = 2x + 4$ 与直线 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ 所成角。



19. 已知 y_1 与 $x^2 + 1$ 成正比例, y_2 与 $x - 1$ 成正比例, $y = y_1 + y_2$ 。当 $x = 1$ 时, $y = 4$; 当 $x = -2$ 时, $y = 7$ 。
求 y 关于 x 的函数解析式。

20. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 交于点 O , 以 AD , OD 为邻边作【晓观数学公众号】平行四边形 $ADOE$, 连接 BE 。

- (1) 求证: 四边形 $ADOE$ 是菱形;
- (2) 若 $\angle EAO + \angle DCO = 180^\circ$, $DC = 2$, 求四边形 $ADOE$ 的面积。



21. 有这样一个问题：探究函数 $y = \frac{6}{|x-2|}$ 的图象与性质并解决问题。

小明根据学习函数的经验，对问题进行了探究。

下面是小明的探究过程，请补充完整：

(1) 函数 $y = \frac{6}{|x-2|}$ 的自变量 x 的取值范围是：

(2) 取几组 y 与 x 的对应值，填写在下表中。则 m 的值为。

x	...	-4	-2	-1	0	1	1.2	1.25	2.75	2.8	3	4	5	6	8	...
y	...	1	1.5	2	3	6	7.5	8	8	7.5	6	3	m	1.5	1	...

(3) 如图，在平面直角坐标系中，描出补全后的表中各组对应值所对应的点，并画出该函数的图象；

(4) 获得性质，解决问题：

通过观察、分析、证明，可知函数 $y = \frac{6}{|x-2|}$

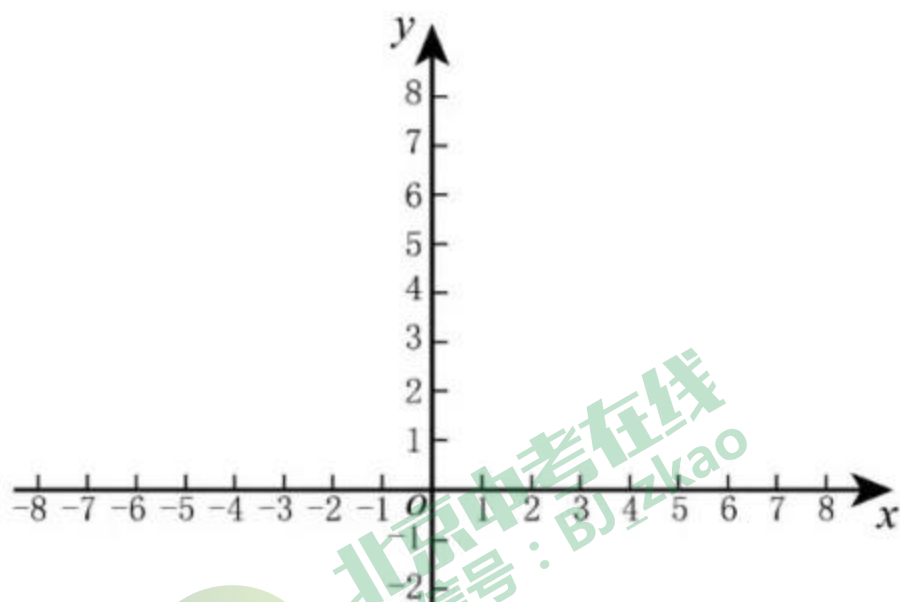
的图象是轴对称图形，它的对称轴是_____；

它的另一个性质是_____。

过点 $P(-1, n)$ ($0 < n < 2$) 作直线 $l \parallel x$ 轴，与函数

$y = \frac{6}{|x-2|}$ 的图象交于点 M, N (点 M 在

点 N 的左侧)，则 $PN - PM$ 的值为_____。



22. 已知直线 $y = kx + 1$ 、直线 $x = k$ 、 $y = k$ 两两分别交于点 A, B, C 。

(1) 若 $k = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 在坐标平面内，横、纵坐标都是整数的点成为整点。【晓观数学公众号】记线段 AB, BC, CA 围成的区域 (不含边界) 为 Ω 。

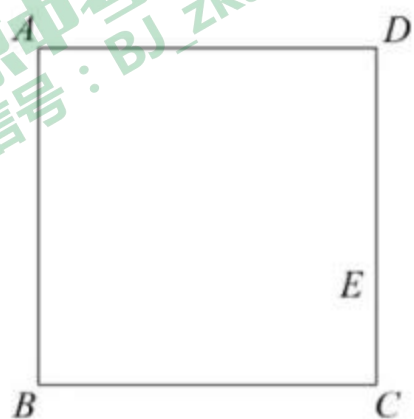
① 当 $k = 2$ 时，结合图象，求 Ω 内整点的个数。

② 若 Ω 内恰有一个整点，直接写出 k 的取值范围。



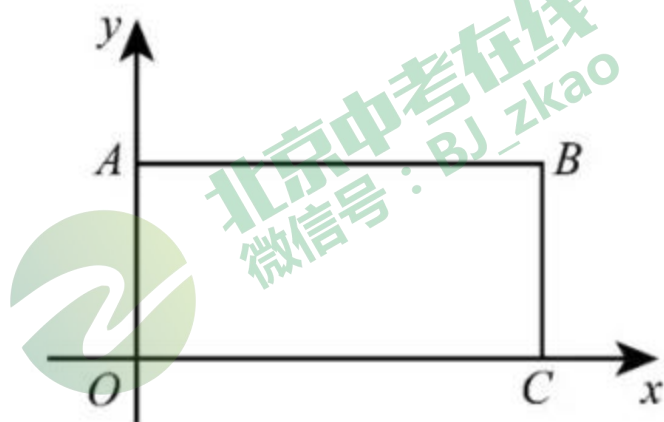
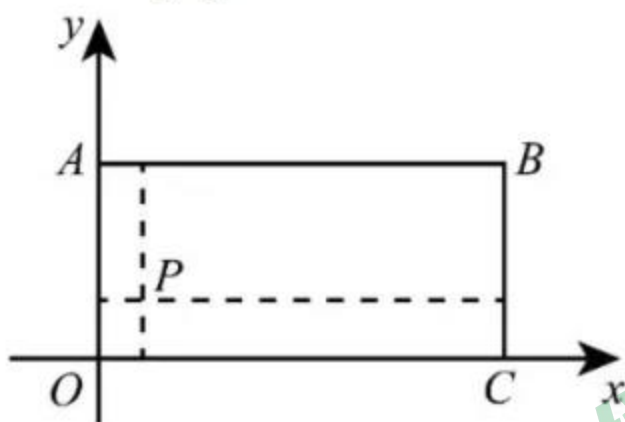
23.如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 M 在边 CD 上,点 N 在正方形 $ABCD$ 外部,且满足 $\angle CMN = 90^\circ$, $CM = MN$ 。连结 AN , CN , 取 AN 中点 E , 连结 BE , AC , 交于点 F 。

- (1) 依题意补全图形; 求证: $BE \perp AC$ 。
- (2) 请探究线段 BE , AD , CN 所满足的等量关系, 并证明你的结论。
- (3) 设 $AB = 1$, 若点 M 沿着线段 CD 从点 C 运动到点 D , 则在该运动过程中, 线段 EN 所扫过的面积为_____ (直接写出答案)



24.在平面直角坐标系 xOy 中, $A(0,4)$, $B(8,4)$, $C(8,0)$ 。 P 为矩形 $ABCO$ 内 (不包括边界) 一点, 过 P 点分别作 x 轴和 y 轴的平行线, 这两条平行线分矩形 $ABCO$ 为四个小矩形, 若这四个小矩形中有一个矩形的周长等于 OA , 则称 P 为矩形 $ABCO$ 的【晓观数学公众号】矩宽点。

例如: 下图中的 $P(\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$ 为矩形 $ABCO$ 的一个矩宽点。



- (1) 在点 $D(1,1)$, $E(4,2)$, $F(\frac{13}{2}, \frac{7}{2})$ 中, 矩形 $ABCO$ 的矩宽点是_____;
- (2) 若 $G(m, \frac{4}{3})$ 为矩形 $ABCO$ 的矩宽点, 求 m 的值;
- (3) 若直线上 $y = k(x-4) - 2$ 存在矩形 $ABCO$ 的矩宽点, 求 k 的取值范围。

