

北京市第八十中学 2023~2024 学年第一学期期中考试

高一数学 学科

2023 年 11 月

班级_____ 姓名_____ 考号_____

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

提示: 试卷答案请一律填涂或书写在答题卡上, 在试卷上作答无效。

在答题卡上, 选择题用 2B 铅笔作答, 其他试题用黑色签字笔作答。

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题求的一项。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ (A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 下列说法正确的是 ()

A. 函数的定义域和值域可以是空集

B. 函数的定义域和值域一定是数集

C. 函数值域中每一个数在定义域中一定只有一个数与之对应

D. 函数的定义域和值域确定后, 函数的对应关系也就确定了

3. 已知函数 $f(x) = \frac{3}{x}$, 则 $f(\frac{1}{a}) =$ ()A. 0 B. $\frac{1}{a}$ C. a D. $3a$

4. 下列运算结果中正确的是 ()

A. $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$ B. $(-a^2)^3 = a^6$ C. $\sqrt[3]{a^8} = a$ D. $\sqrt[3]{(-\pi)^5} = -\pi$ 5. 下列函数是在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减的偶函数的是 (A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x^2$ C. $y = x^3$ D. $y = x$ 6. 若 $a > b$, 则下列正确的是 ()A. $ac^2 > bc^2$ B. $a^2 > b^2$ C. $b - c < a - c$ D. $\frac{b}{a} < \frac{b+1}{a+1}$ 7. 已知 $x \in \mathbb{R}$, 条件 $p: 0 < x < 1$, 条件 $q: \frac{1}{x} \geq a (a > 0)$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数围是 ()A. $0 < a \leq 1$ B. $a \leq 1$ C. $a \geq 1$ D. $a > 0$

8. 若 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, $c = (-2)^3$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

9. 著名的狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 则 $D(D(x)) = ()$

A. 0 B. 1 C. $\begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ D. $\begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

10. 设集合 A 是集合 N^* 的子集, 对于 $i \in N^*$, 定义 $\varphi_i(A) = \begin{cases} 1, i \in A \\ 0, i \notin A \end{cases}$, 给出下列三个结论: ①存在 N^* 的

两个不同子集 A, B , 使得任意 $i \in N^*$ 都满足 $\varphi_i(A \cap B) = 0$ 且 $\varphi_i(A \cup B) = 1$; ②任取 N^* 的两个不同子集

A, B , 对任意 $i \in N^*$ 都有 $\varphi_i(A \cap B) = \varphi_i(A) \cdot \varphi_i(B)$; ③任取 N^* 的两个不同子集 A, B , 对任意 $i \in N^*$ 都

有 $\varphi_i(A \cup B) = \varphi_i(A) + \varphi_i(B)$; 其中, 所有正确结论的序号是 ()

A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

二、填空题共5小题, 每小题5分, 共25分。

11. 函数 $f(x) = \sqrt{3x-2} + (x-4)^0$ 的定义域为 _____

12. 函数 $y = x^a - 2$ (a 为常数) 的图象过定点 _____

13. 若命题“ $\exists x_0 \in [-1, 2], x_0 - a > 0$ ”为假命题, 则实数 a 的取值范围是 _____

14. 函数 $y = x + \frac{5}{x+1}$ ($x \geq 2$) 取得最小值时的 x 值为 _____.

15. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 1, x > 0 \end{cases}$, 当 $x \in (a, 2)$ 时, $f(x)$ 有最大值, 则实数 a 的最小值为 _____

三、解答题共6小题, 共85分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

16. (本小题13分) 设全集为 R , 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | a - 1 < x < 2a + 3\}$

(1) 若 $a = -1$, 求 $(C_R A) \cap B$;

(2) 当 $a = 0$ 时, 是否满足 $A \cup B = R$? 说明理由;

(3) 在① $A \cup B = A$ ② $A \cap B = B$ ③ $(C_R A) \cap B = \emptyset$ 这三个条件中任选一个作为已知条件, 求实数 a 的取

值范围.

注: 如果选择条件①、②、③分别解答, 按第一个解答计分.

17. (本小题 14 分) 已知函数 $f(x) = ax + \frac{2}{x}$ ($a \in \mathbb{R}$), 且 $f(-2) = 1$.

(1) 用单调性定义证明 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

(2) 若 $f(x) \leq t^2 + t - 5$ 对 $\forall x \in [1, +\infty)$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围.

18. (本小题 14 分) 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(2, \frac{1}{4})$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的值域;

(2) 求使得不等式 $f(x^2 - x) > 1$ 成立的实数 x 的取值范围.

19. (本小题 15 分) 设 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 若不等式 $y \geq -2$ 对一切实数 x 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 解关于 x 的不等式 $ax^2 + (1-a)x - 1 < 0$ ($a \in \mathbb{R}$).

20. (本小题 15 分)

2022 中国国际智能产业博览会于 8 月 22~24 日在重庆隆重举办, 主题延续“智能化: 为经济赋能, 为生活添彩”, 某企业遵循国家发展战略目标, 进一步优化内部结构, 深入拓展大数据智能化建设, 据悉, 该企业研发部原有 80 人, 年人均投入 a ($a > 0$) 万元, 现把研发部人员分成两类: 技术人员和研发人员, 其中技术人员有 x 名 ($x \in \mathbb{N}^*$ 且 $45 \leq x \leq 75$), 调整后, 研发人员的年人均投入增加 $4x\%$, 技术人员的年人均投入为 $a\left(m - \frac{2x}{25}\right)$ (其中 $m \in \mathbb{R}$ 且 $m > 0$) 万元.

(1) 要使调整后的研发人员的年总投入不低于调整前的 80 人的年总投入, 则优化结构调整后的技术人员 x 的取值范围是多少?

(2) 若研发部新招聘 1 名员工, 原来的研发部人员调整策略不变, 且同时满足下列两个条件: ① 技术人员的年人均投入始终不减少; ② 调整后研发人员的年总投入始终不低于调整后技术人员的年总投入. 请分析是否存在满足上述条件的正实数 m , 若存在, 则求出 m 的值; 若不存在, 则说明理由.

21. (本小题 14 分) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 对于 A 的一个子集 S , 若存在不大于 n 的正整数 m , 使

得对 S 中的任意一对元素 s_1, s_2 , 都有 $|s_1 - s_2| \neq m$, 则称 S 具有性质 P .

(1) 当 $n = 5$ 时, 试判断集合 $B = \{x \in A \mid x > 4\}$ 和 $C = \{x \in A \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}^*\}$ 是否具有性质 P ? 并说明理由.

(2) 当 $n = 1010$ 时, 若集合 S 具有性质 P .

① 集合 $T = \{2021 - x \mid x \in S\}$ 是否一定具有性质 P ? 并说明理由: