

清华附中高一新生入学分班考试

数学试题

总分：150分

时量：120分钟

第 卷

一. 选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

1. 下列运算正确的是 ()。

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^8 \div a^4 = a^2$ C. $a^3 + a^3 = 2a^6$ D. $(a^3)^2 = a^6$

2. 一元二次方程 $2x^2 - 7x + k = 0$ 的一个根是 $x_1 = 2$, 则另一个根和 k 的值是 ()

A. $x_2 = 1, k = 4$ B. $x_2 = -1, k = -4$ C. $x_2 = \frac{3}{2}, k = 6$ D. $x_2 = -\frac{3}{2}, k = -6$

3. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - kx + 2 = 0$ 中, k 是投掷骰子所得的数字 (1, 2, 3, 4, 5, 6), 则该二次方程有两个不等实数根的概率 $P =$ ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

4. 二次函数 $y = -x^2 - 4x + 2$ 的顶点坐标、对称轴分别是 ()

A. $(-2, 6)$, $x = -2$ B. $(2, 6)$, $x = 2$ C. $(2, 6)$, $x = -2$ D. $(-2, 6)$, $x = 2$

5. 已知关于 x 的方程 $|5x - 4| + a = 0$ 无解, $|4x - 3| + b = 0$ 有两个解, $|3x - 2| + c = 0$ 只有一个解, 则化简

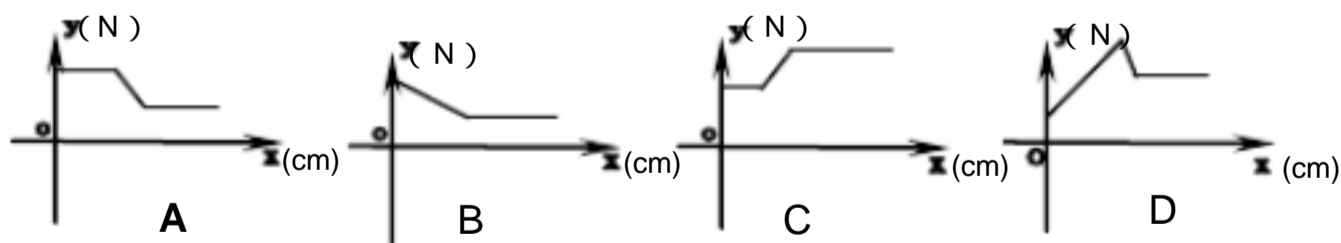
$|a - c| + |c - b| - |a - b|$ 的结果是 ()

A. $2a$ B. $2b$ C. $2c$ D. 0

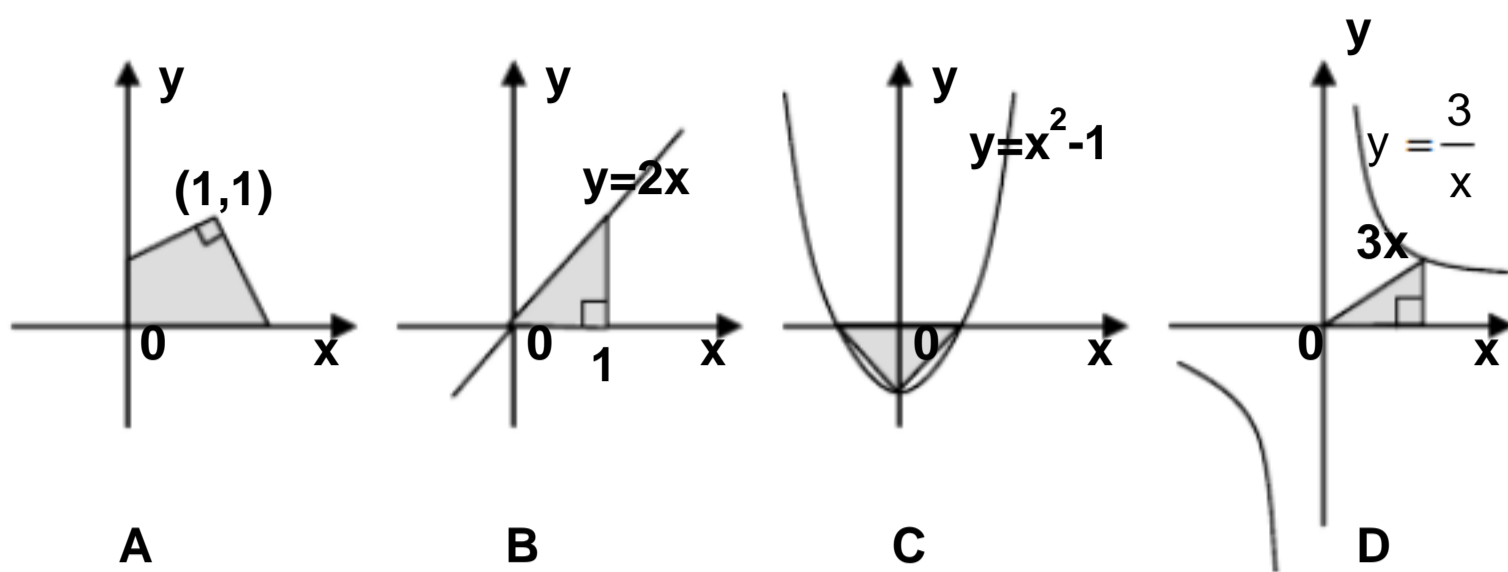
6. 在物理实验课上, 小明用弹簧称将铁块 A 悬于盛有水的水槽中, 然后匀速向上提起, 直至铁块完全露出水面一定高度, 则下图能反映弹簧称的读数 y (单位 N) 与铁块被提起的高度 x (单位 cm) 之间的函数关系的大致图象是 ()



第 6 题图



7. 下列图中阴影部分的面积与算式 $|- \frac{3}{4}| + (\frac{1}{2})^2 + 2^{-1}$ 的结果相同的是 ()



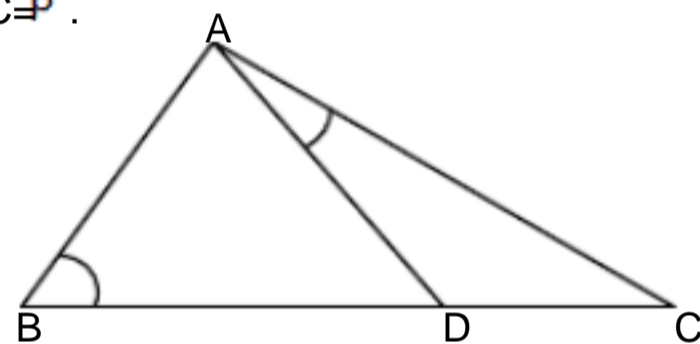
8. 已知四边形 S_1 的两条对角线相等, 但不垂直, 顺次连结 S_1 各边中点得四边形 S_2 , 顺次连结 S_2 各边中点得四边形 S_3 , 以此类推, 则 S_{2006} 为 ()

- A. 是矩形但不是菱形; B. 是菱形但不是矩形;
C. 既是菱形又是矩形; D. 既非矩形又非菱形.

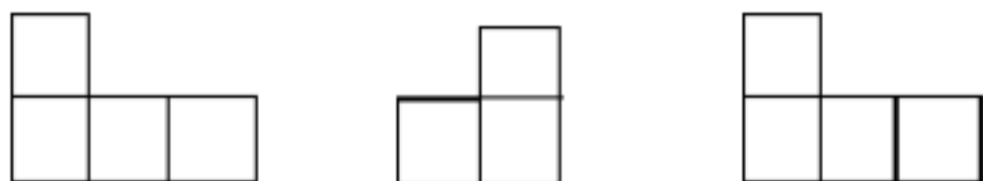
9. 如图, D 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点, $AB=AD$, 记 $\angle CAD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

若 $\alpha = 10^\circ$, 则 β 的度数是

- A. 40° B. 50°
C. 60° D. 不能确定



10. 如图为由一些边长为 1cm 正方体堆积在桌面形成的立方体的三视图, 则该立方体露在外面的部分的表面积是 _____ cm^2 .



正视图

左视图

俯视图

- A. 11 B. 15 C. 18 D. 22

第 卷 (答卷)

二. 填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

11. 函数 $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 _____.

12. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $AC = 10$, $CD = 6$, 则 $\sin B$ 的值为 _____.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = \angle D = 60^\circ$ ， $OA = 2$ ，则 AC 的长为 _____。

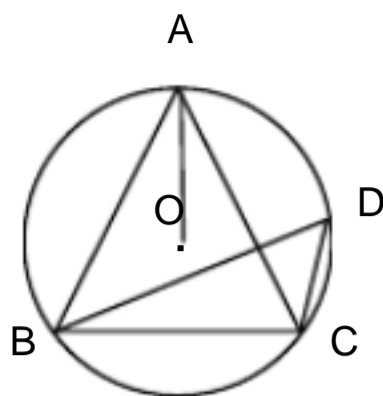
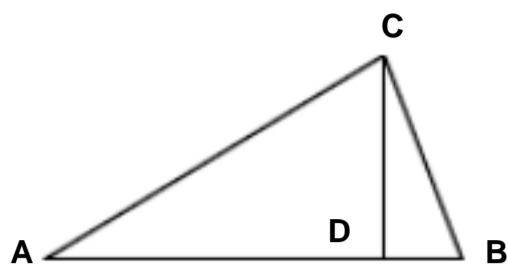


图 4

14. 同室的 4 人各写一张贺年卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡，则 4 张贺年卡不同的拿法有 _____ 种。

15. 对于正数 x ，规定 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ，例如 $f(3) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}$ ， $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$ ，

计算 $f\left(\frac{1}{2006}\right) + f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{1}{2004}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2004) + f(2005) + f(2006) =$ _____。

三. 解答题 (共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

16. (1) 解不等式组：
$$\begin{cases} \frac{2x-4}{3} > 1 - \frac{5-x}{2} \\ 2(x+1) - 6 \leq x \end{cases}$$
，并把解集在数轴上表示出来。

(2) 先化简，再求值：已知 $x = \sqrt{2} + 1$ ，求 $\left(\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x^2-2x+1}\right) \div \frac{1}{x}$ 的值。

17. (本小题满分 10 分)

如图, 等腰三角形 ABC 中, $AB=AC$, 以 AC 为直径作圆, 交 AB 于 D , 交 BC 于 E ,

(1) 求证: $EC=ED$

(2) 已知: $AB=5, BC=6$, 求 CD 长。

18. (本小题满分 12 分) 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2k+1)x + 4(k - \frac{1}{2}) = 0$.

求证: 无论 k 取何值, 这个方程总有实数根;

若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=4$, 另两边的长 b, c 恰好是这个方程的两个根, 求三角形 ABC 的周长.

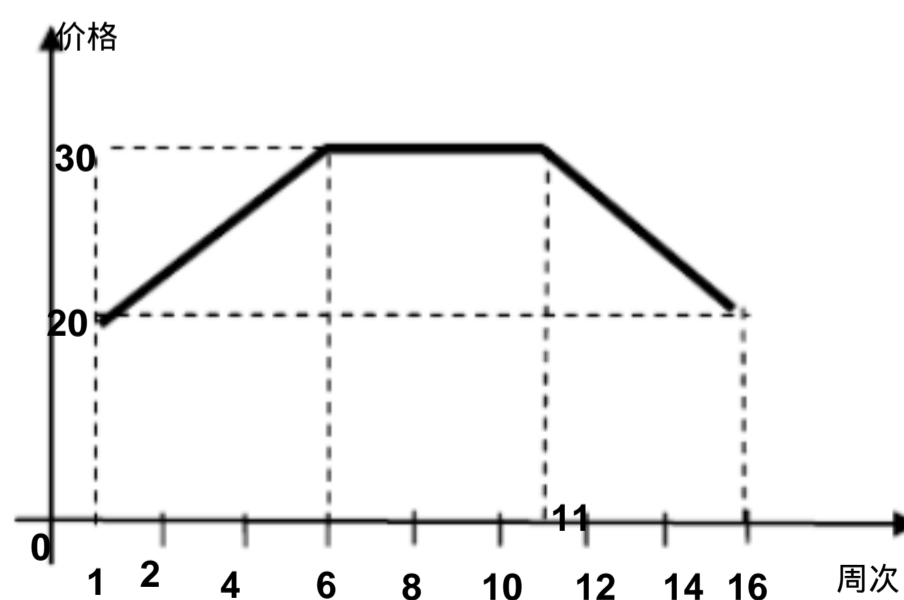
19. (本小题满分 14 分)

在芦淞服装批发市场, 某种品牌的时装当季节将来临时, 价格呈上升趋势, 设这种时装开始时定价为 20 元/件 (第 1 周价格), 并且每周价格上涨, 如图示, 从第 6 周开始到第 11 周保持 30 元/件的价格平稳销售; 从第 12 周开始, 当季节即将过去时, 每周下跌, 直到第 16 周周末, 该服装不再销售。

求销售价格 y (元/件) 与周次 x 之间的函数关系式;

若这种时装每件进价 Z (元/件) 与周次 x 次之间的关系为 $Z = -0.125(x-8)^2 + 12$ ($1 \leq x \leq 16$),

且 x 为整数, 试问该服装第几周出售时, 每件销售利润最大? 最大利润为多少?



20. (本小题满分 14分)

已知抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2 + 3mx + 18m^2 - m$ 与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ ($x_1 < x_2$) 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, b)$, O 为原点.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $m > \frac{1}{18}$ 且 $OA+OB=3OC$ 求抛物线的解析式及 A , B , C 的坐标.

(3) 在 (2) 的情形下, 点 P , Q 分别从 A , O 两点同时出发以相同的速度沿 AB , OC 向 B , C 运动, 联结 PQ 与 BC 交于 M , 设 $AP=k$, 问是否存在 k , 使以 P , B , M 为顶点的三角形与 ABC 相似. 若存在, 求所有的 k 值, 若不存在说明理由.

21. (本小题满分 14分) 若干个 1 与 2 排成一行: $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, \dots$, 规则是: 第 1 个数是 1, 第 2 个数是 2, 第 3 个数是 1, 一般地, 先写一行 1, 再在第 k 个 1 与第 $k+1$ 个 1 之间插入

k 个 2 ($k=1, 2, 3, \dots$). 试问: (1) 第 2006 个数是 1 还是 2?

(2) 前 2006 个数的和是多少? 前 2006 个数的平方和是多少?

(3) 前 2006 个数两两乘积的和是多少?