2022北京首都师大附中一分校初三12月月考

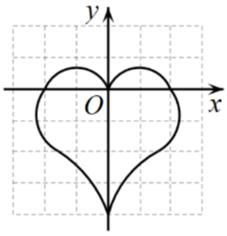
数　　学

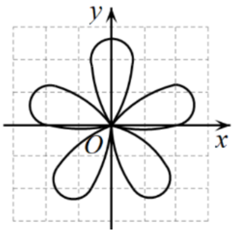
一、选择题

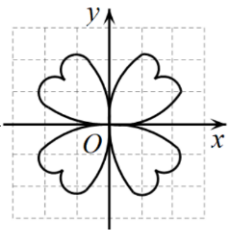
1. 一元二次方程$2x^2+x-5=0$的二次项系数、一次项系数、常数项分别是（　　）

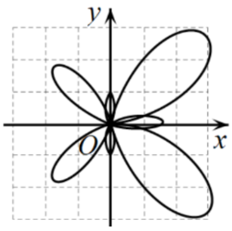
A. 2，1，5　　　　B. 2，1，－5　　　　C. 2，0，－5　　　　D. 2，0，5

2. 下列各曲线是在平面直角坐标系xOy中根据不同的方程绘制而成的，其中是中心对称图形的是（　　）

A. 

B. 

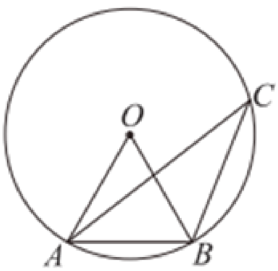
C. 

D. 

3. 二次函数$y=2\left(x-3\right)^2+1$的图象的顶点坐标是（　　）

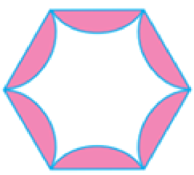
A. $\left(2,3\right)$　　　　B. $\left(2,1\right)$　　　　C. $\left(3,-1\right)$　　　　D. $\left(3,1\right)$

4. 如图，点A，B，C在$\odot O$上，$\triangle OAB$是等边三角形，则$\angle ACB$的大小为（　　）



A. 60°　　　　B. 40°　　　　C. 30°　　　　D. 20°

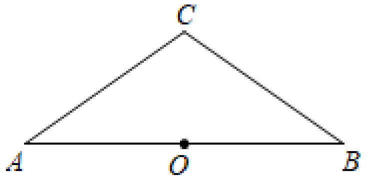
5. 小明将图案绕某点连续旋转若干次，每次旋转相同角度α，设计出一个外轮廓为正六边形的图案（如图），则α可以为（　　）



A. 30°　　　　B. 60°

C. 90°　　　　D. 120°

6. 在△ABC中，$CA=CB$，点 O 为 AB 中点．以点 C 为圆心，CO 长为半径作⊙C，则⊙C 与 AB 的位置关系是（　　）



A. 相交　　　　B. 相切

C. 相离　　　　D. 不确定

7. 下列说法中，正确的是（　　）

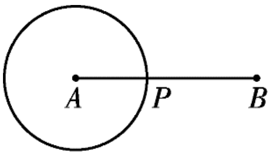
A. “射击运动员射击一次，命中靶心”是必然事件

B. 事件发生的可能性越大，它的概率越接近 1

C. 某种彩票中奖的概率是 1%，因此买 100 张该种彩票就一定会中奖

D. 抛掷一枚图钉，“针尖朝上”的概率可以用列举法求得

8. 如图，线段 $AB=5$，动点 P 以每秒 1 个单位长度的速度从点 A 出发，沿线段 AB 运动至点 B，以点 A 为圆心，线段 AP 长为半径作圆．设点 P 的运动时间为 t，点 P，B 之间的距离为 y，⊙A 的面积为 S，则 y 与 t，S 与 t 满足的函数关系分别是（　　）



A. 正比例函数关系，一次函数关系　　　　B. 一次函数关系，正比例函数关系

C. 一次函数关系， 二次函数关系　　　　D. 正比例函数关系，二次函数关系

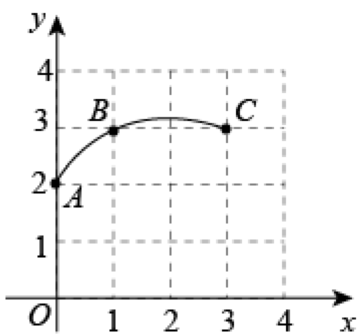
二、填空题

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(4,-7)$ 关于原点的对称点坐标为_______．

10. 若关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是_________．

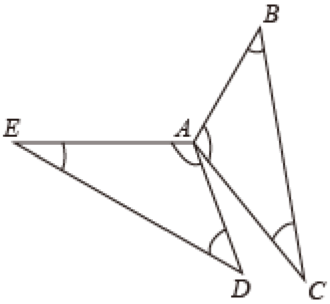
11. 写出一个开口向上，并且与 y 轴交于点（0，2）的抛物线的解析式________________．

12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A， B， C 的横、纵坐标都为整数，过这三个点作一条圆弧，则此圆弧的圆心坐标为_______．

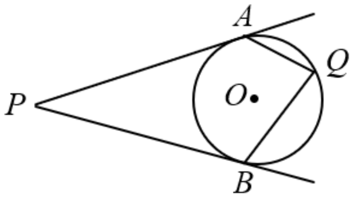


13. 在一个不透明袋子中有3个红球和2个黑球，这些球除颜色外无其他差别．从袋子中随机取出1个球，则取出红球的概率是________．

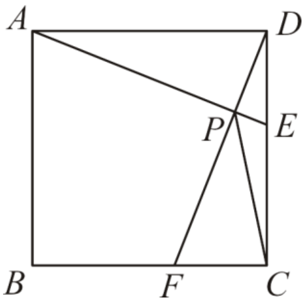
14. 如图，将△　　绕点A顺时针旋转得到$\triangle ADE$，若　　　　，$\angle B=40°$，则$\angle C$的度数为_______．



15. 如图，PA，PB分别切⊙O于点A，B，Q是优弧AB上一点，若$\angle P$=40°，则$\angle Q$的度数是________．



16. 如图，在边长为2的正方形$ABCD$中，　，　分别是边DC，CB上的动点，且始终满足$DE=CF$，　，DF交于点　，连接CP，线段CP长的最小值为______．



三、解答题

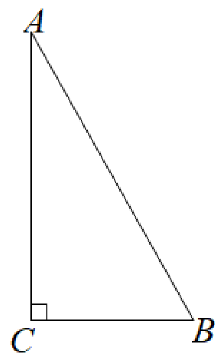
17. 解方程：$x^2-2x-8=0$．

18. 已知　是方程　　　　　的一个根，求代数式　　　　的值．

19. 如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB$=90°，$\angle BAC$=30°，将线段CA绕点C逆时针旋转60°，得到线段CD，连接AD，BD．

（1）依题意补全图形；

（2）若BC=1，求线段BD的长．

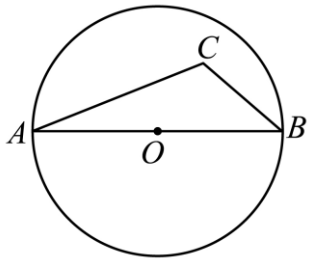


20. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = a(x-3)^2 - 1$ 经过点 $(2,1)$.

（1）求该抛物线的表达式；

（2）将该抛物线向上平移_______个单位后，所得抛物线与 x 轴只有一个公共点.

21. 问题：如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 内，请仅用无刻度的直尺，作出 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高. 小芸解决这个问题时，结合圆以及三角形高线的相关知识，设计了如下作图过程.



作法：如图，

①延长 AC 交 $\odot O$ 于点 D，延长 BC 交 $\odot O$ 于点 E；

②分别连接 AE， BD 并延长相交于点 F ；

③连接 FC 并延长交 AB 于点 H .

所以线段 CH 即为 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高.

（1）根据小芸的作法，补全图形；

（2）完成下面的证明.

证明：∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，点 D， E 在 $\odot O$ 上，

∴ $\angle ADB = \angle AEB =$ ______°.（______________________）（填推理的依据）

∴ $AE \perp BE$， $BD \perp AD$.

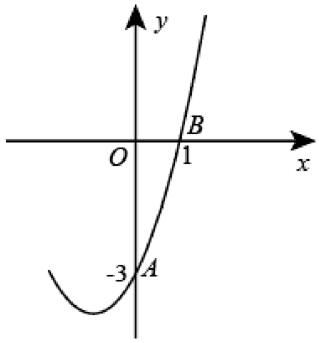
∴ AE， ______是 $\triangle ABC$ 的两条高线.

∴ CH 是 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高.

22. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 的部分图象经过点 $A(0，-3)$，$B(1，0)$.

(1)求该抛物线的解析式；

(2)结合函数图象，直接写出 $y<0$ 时，x 的取值范围.



23. 2021年6月17日，神舟十二号成功发射，标志着我国载人航天踏上新征程．某学校举办航天知识讲座，需要两名引导员，决定从 A，B，C，D 四名志愿者中，通过抽签的方式确定两人．抽签规则：将四名志愿者的名字分别写在四张完全相同且不透明卡片的正面，把四张卡片背面朝上，洗匀后放在桌面上，先从中随机抽取一张卡片，记下名字，再从剩余的三张卡片中随机抽取第二张，记下名字．

（1）“A 志愿者被选中”是______ 事件（填“随机”或“不可能”或“必然”）；

（2）用画树状图或列表的方法求出 A，B 两名志愿者同时被选中的概率．

24. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+5)x+6+2k=0$．

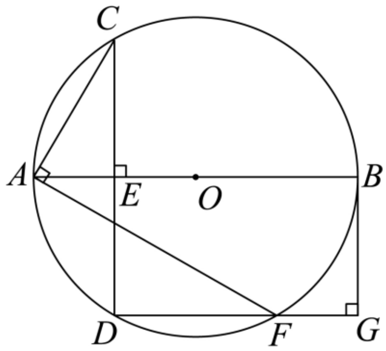
（1）求证：此方程总有两个实数根；

（2）若此方程恰有一个根小于 -1，求 k 的取值范围．

25. 如图，AB 为⊙O 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于 E，连接 AC，过A作 $AF\perp AC$，交⊙O 于点 F，连接 DF，过B作 $BG\perp DF$，交 DF 的延长线于点 G．

（1）求证：BG 是⊙O 的切线；

（2）若 $\angle DFA=30°$，$DF=4$，求 FG 的长．



26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(0,-2)$，$(2,-2)$．

（1）直接写出 c 的值和此抛物线的对称轴；

（2）若此抛物线与直线 $y=-6$ 没有公共点，求 a 的取值范围；

（3）点 (t,y_1)，$(t+1,y_2)$ 在此抛物线上，且当 $-2\le t\le 4$ 时，都有 $|y_2-y_1|<\frac{7}{2}$．直接写出 a 的取值范围．

27. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，过点 C 作射线 CB'，使 $\angle ACB'=\angle ACB$（点 B' 与点B在直线 AC 的异侧），点 D 是射线 CB' 上一个动点（不与点 C 重合），点 E 在线段 BC 上，且 $\angle DAE+\angle ACD=90°$．

（1）如图 1，当点 E 与点 C 重合时，AD 与 CB' 的位置关系是______，若 $BC=a$，则 CD 的长为______；（用含 a 的式子表示）

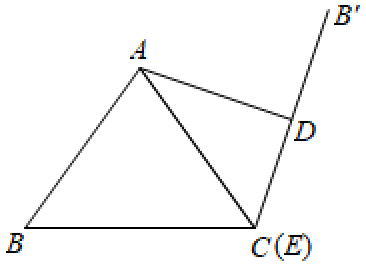


图1

（2）如图 2，当点 E 与点 C 不重合时，连接 DE．

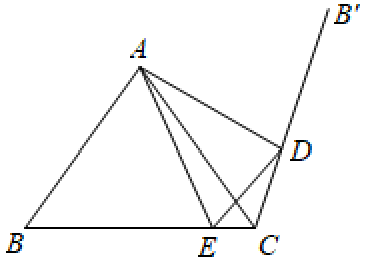


图2

①用等式表示 $\angle BAC$ 与 $\angle DAE$ 之间的数量关系，并证明；

②用等式表示线段 BE，CD，DE 之间的数量关系，并证明．

28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 M 和点 P，给出如下定义：将图形 M 绕点 P 顺时针旋转 $90°$ 得到图形 N，图形 N 称为图形 M 关于点 P 的“垂直图形”. 例如，图1中点 D 为点 C 关于点 P 的“垂直图形”.

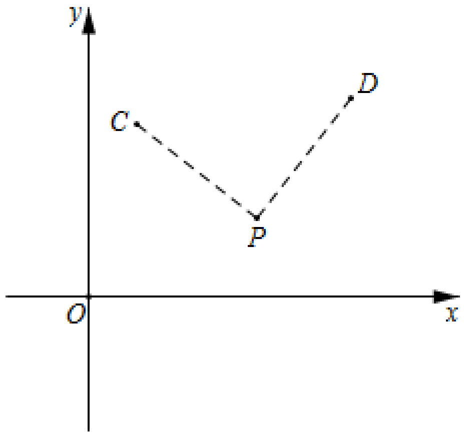
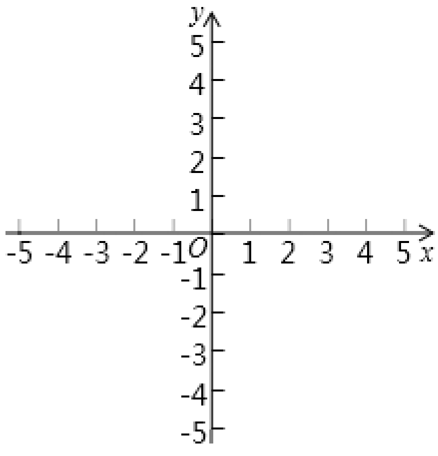


图1



备用图

（1）点 A 关于原点 O 的“垂直图形”为点 B．

① 若点 A 的坐标为 $(0,3)$，则点 B 的坐标为__________；

② 若点 B 的坐标为 $(3,1)$，则点 A 的坐标为__________；

（2）$E(-3,3)$，$F(-2,3)$，$G(a,0)$，线段 EF 关于点 G 的“垂直图形”记为 $E'F'$，点 E 的对应点为 E'，

点 F 的对应点为 F'.

① 求点 E' 的坐标（用含 a 的式子表示）;

② 若 $\odot O$ 的半径为2，$E'F'$ 上任意一点都在 $\odot O$ 内部或圆上，直接写出满足条件的 EE' 的长度的最大值.

参考答案

一、选择题

1. 【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的基本概念，找出一元二次方程的二次项系数，一次项系数，以及常数项即可.

【详解】解：∵一元二次方程 $2x^2+x-5=0$，

∴二次项系数、一次项系数、常数项分别是 2、1、-5，

故选：B.

【点睛】此题考查了一元二次方程的一般形式，一元二次方程的一般形式为 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】中心对称图形的定义：如果把一个图形绕着一个定点旋转180°后，与初始图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心；根据定义对四个选项进行判断即可.

【详解】解：A、不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

B、是旋转对称图形，但不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

C、是中心对称图形，故此选项符合题意；

D、不是中心对称图形，故此选项不符合题意.

故选 C.

【点睛】此题考查了中心对称图形的概念，熟练掌握中心对称图形的概念是解决此题的关键.

3. 【答案】D

【解析】

【分析】直接根据二次函数的顶点式写出顶点坐标即可.

【详解】解：∵抛物线解析式为 $y=2(x-3)^2+1$ ，

∴ 其顶点坐标为(3，1)，

故选 D.

【点睛】本题考查了二次函数顶点式的性质，正确理解知识点是解题的关键.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】由 ΔOAB 为等边三角形，得：$\angle AOB=60°$，再根据圆周角定理，即可求解.

【详解】解：∵ ΔOAB 为等边三角形，

∴$\angle AOB=60°$，

∴$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times60°=30°$.

故选 C.

【点睛】本题主要考查圆周角定理，掌握同弧所对的圆周角是圆心角的一半是解题的关键.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】由题意依据每次旋转相同角度α，旋转了六次，且旋转了六次刚好旋转了一周为 360° 进行分析即可得出答案.

【详解】解：因为每次旋转相同角度α，旋转了六次，

且旋转了六次刚好旋转了一周为 360°，

所以每次旋转相同角度α $=360\div6=60^{\circ}$.

故选：B.

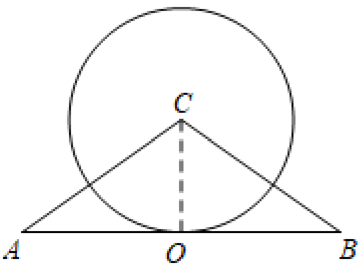
【点睛】本题考查旋转的性质，解题的关键是能够找到旋转中心，从而确定旋转角的度数.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质，三线合一即可得$CO\perp AB$，根据三角形切线的判定即可判断AB是$\odot C$的切线，进而可得$\odot C$ 与AB的位置关系

【详解】解：连接 CO，



$\because CA=CB$，点O为AB中点.

$\therefore CO\perp AB$

$\because CO$为$\odot C$的半径，

$\therefore AB$是$\odot C$ 的切线，

$\therefore\odot C$ 与AB的位置关系是相切

故选 B

【点睛】本题考查了三线合一，切线的判定，直线与圆的位置关系，掌握切线判定定理是解题的关键.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】根据随机事件，必然事件，不可能事件的定义可判断 A，根据随机事件发生的机会大小，估计概率的大小可判断 B，可判断 C，不规则物体的概率只能通过大数次的实验，使频率达到稳定时用频率估计概率可判断 D.

【详解】解："射击运动员射击一次，命中靶心"可能会发生，也可都能不会发生是随机事件不是必然事件，故选项 A 不正确；

事件发生的可能性越大，说明发生的机会越大，它的概率越接近 1，故选项 B 正确；

某种彩票中奖的概率是 1%，因此买 100 张该种彩票每一张彩票中奖的概率都是 1%，可能会中奖，但一定会中奖机会很小，故选项 C 不正确；

图钉是不规则的物体，抛掷一枚图钉，"针尖朝上"的概率只能通过实验，大数次的实验，使频率稳定时，可用频率估计概率，不可以用列举法求得，故选项 D 不正确.

故选择 B.

【点睛】本题考查事件，事件发生的可能性，概率，实验概率，掌握事件，事件发生的可能性，概率，实验概率知识是解题关键.

8. 【答案】C

【解析】

【分析】根据题意分别列出 y 与 t，S 与 t 的函数关系，进而进行判断即可.

【详解】解：根据题意得 $AP=t$， $PB=AB-AP=5-t$，

即 $y=5-t$ $(0\le t\le 5)$，是一次函数；

$\odot A$ 的面积为 $S=\pi\times AP^2=\pi t^2$，即 $S=\pi t^2$ $(0\le t\le 5)$，是二次函数

故选 C

【点睛】本题考查了列函数表达式，一次函数与二次函数的识别，根据题意列出函数表达式是解题的关键.

二、填空题

9. 【答案】(-4，7)

【解析】

【分析】根据两个点关于原点对称时，它们的坐标符号相反，即点 P（x，y）关于原点 O 的对称点是 P'（-x，-y），进而得出答案.

【详解】解：点 $(4,-7)$ 关于原点的对称点坐标为（-4，7），

故答案是：(-4，7).

【点睛】此题主要考查了原点对称点的性质，正确掌握横纵坐标的符号关系是解题关键.

10. 【答案】$m<1$

【解析】

【分析】根据根的判别式求出 $\Delta=(-2)^2-4\times1\times m=4-4m>0$，再求出不等式的解集即可.

【详解】解：∵关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta=(-2)^2-4\times1\times m=4-4m>0$

解得：$m<1$，

故答案为：$m<1$.

【点睛】本题考查了根的判别式和解一元一次不等式，解题的关键是能熟记根的判别式的内容是解此题的关键，注意：已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (a,b,c 为常数，$a\neq0$)，①当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根，②当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根，③当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

11. 【答案】$y=x^2+2$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据题意，写出一个 $a>0,c=2$ 的解析式即可

【详解】解：根据题意，$a>0,c=2$

故 $y=x^2+2$ 符合题意

故答案为：$y=x^2+2$（答案不唯一）

【点睛】本题考查了二次函数各系数与函数图象之间的关系，掌握二次函数的图象的性质是解题的关键.

12. 【答案】（2，1）

【解析】

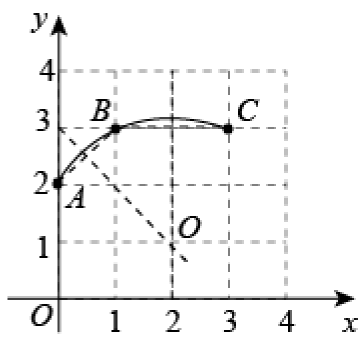
【分析】根据垂径定理的推论：弦的垂直平分线必过圆心，可以作弦 AB 和 BC 的垂直平分线，交点即为圆心.

【详解】解：根据垂径定理的推论：弦的垂直平分线必过圆心，

可以作弦 AB 和 BC 的垂直平分线，交点即为圆心.

如图所示，则圆心是（2，1）.

故答案为（2，1）.



【点睛】本题考查垂径定理的应用，解答此题的关键是熟知垂径定理，即“垂直于弦的直径平分弦”.

13. 【答案】$\frac{3}{5}$##0.6

【解析】

【分析】用列举的方法一一列出可能出现的情况，进而即可求得恰好是红球的概率.

【详解】解：根据题意，可能出现的情况有：

红球；红球；红球；黑球；黑球；

则恰好是红球的概率是$\frac{3}{5}$，

故答案为：$\frac{3}{5}$.

【点睛】本题主要考查了简单概率的计算，通过列举法进行计算是解决本题的关键.

14. 【答案】30 度##30°

【解析】

【分析】先根据旋转的性质求得$\angle CAB$，再运用三角形内角和定理求解即可.

【详解】解：∵将$\triangle ABC$绕点A顺时针旋转得到$\triangle ADE$，$\angle DAE=110^{\circ}$，

$\therefore \angle BAC=\angle DAE=110^{\circ}$，

$\because \angle B=40^{\circ}$，

$\therefore \angle C=180^{\circ}-\angle B-\angle BAC=180^{\circ}-40^{\circ}-110^{\circ}=30^{\circ}$.

故答案为：30°.

【点睛】本题主要考查了旋转的性质、三角形内角和定理等知识点，灵活运用旋转的性质是解答本题的关键.

15. 【答案】70°##70 度

【解析】

【分析】连接OA、OB，根据切线性质可得$\angle OAP=\angle OBP=90^{\circ}$，再根据四边形的内角和为 360°求得$\angle AOB$，然后利用圆周角定理求解即可.

【详解】解：连接OA、OB，

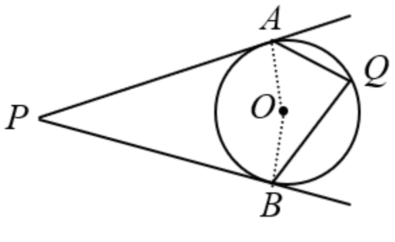
∵PA，PB分别切⊙O于点A，B，

∴$\angle OAP=\angle OBP=90^{\circ}$，又$\angle P=40^{\circ}$，

∴$\angle AOB=360^{\circ}-90^{\circ}-90^{\circ}-40^{\circ}=140^{\circ}$，

∴$\angle Q=\frac{1}{2}\angle AOB=70^{\circ}$，

故答案为：70°.



【点睛】本题考查切线性质、四边形内角和为 360°、圆周角定理，熟练掌握切线性质和圆周角定理是解答的关键.

16. 【答案】$\sqrt{5}-1$

【解析】

【分析】利用“边角边”证明$\triangle ADE$和$\triangle DCF$全等，根据全等三角形对应角相等可得$\angle DAE=\angle CDF$，然后求出$\angle APD=90°$，从而得出点P的路径是一段以AD为直径的弧，连接AD的中点和C的连线交弧于点P，此时CP的长度最小，然后根据勾股定理求得QC，即可求得CP的长．

【详解】解：$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AD=CD$，$\angle ADE=\angle BCD=90°$，

在$\triangle ADE$和$\triangle DCF$中，

$$\begin{cases} AD=CD \\ \angle ADE=\angle BCD=90° \\ DE=CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle DCF$（SAS）

$\therefore \angle DAE=\angle CDF$，

$\because \angle CDF+\angle ADF=\angle ADC=90°$，

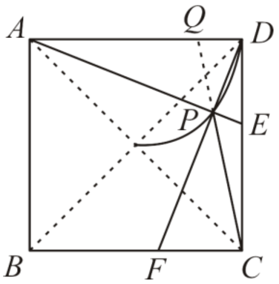
$\therefore \angle ADF+\angle DAE=90°$，

$\therefore \angle APD=90°$，

由于点P在运动中保持$\angle APD=90°$，

$\therefore$点P的路径是一段以AD为直径的弧，

取AD的中点Q，连接QC，此时CP的长度最小，



则$DQ=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times2=1$，

在$Rt\triangle CQD$中，根据勾股定理得，$CQ=\sqrt{CD^2+QD^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

所以，$CP=CQ-QP=\sqrt{5}-1$．

故答案为：$\sqrt{5}-1$．

【点睛】本题考查了正方形的性质，勾股定理，圆周角定理，全等三角形的性质和判定，能综合运用性质进行推理是解此题的关键．

三、解答题

17．【答案】$x_1=4$，$x_2=-2$

【解析】

【分析】利用配方法解方程即可．

【详解】解：方法一：$x^2-2x=8$

$x^2-2x+1^2=8+1^2$

$(x-1)^2=9$

$\therefore x-1=\pm 3$，

即 $x-1=3$ 或 $x-1=-3$

$\therefore x_1=4$，$x_2=-2$.

方法二：$\because a=1$，$b=-2$，$c=-8$

$\therefore b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-8)=36\geq 0$

$\therefore x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{36}}{2\times 1}=\dfrac{2\pm 6}{2}$，

$\therefore x_1=4$，$x_2=-2$.

方法三：$(x-4)(x+2)=0$

$\therefore x-4=0$ 或 $x+2=0$，

$\therefore x_1=4$，$x_2=-2$.

【点睛】本题考查一元二次方程的解法，选择合适的方法是解题的关键.

18. 【答案】6

【解析】

【分析】把 a 代入方程，得出 $2a^2-7a=1$，再整体代入求值即可.

【详解】解：$a(2a-7)+5=2a^2-7a+5$.

$\because a$ 是方程 $2x^2-7x-1=0$ 的根

$\therefore 2a^2-7a-1=0$.

$\therefore 2a^2-7a=1$.

$\therefore$ 原式 $=1+5=6$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解和代数式求值，解题关键是明确方程解的意义，整体代入求值.

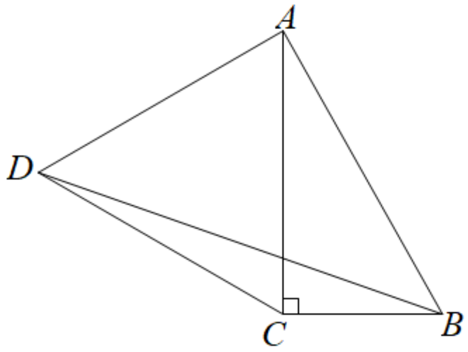
19. 【答案】（1）见解析；（2）$BD=\sqrt{7}$

【解析】

【分析】（1）根据线段旋转的方法，得出 $\angle ACD=60°$，然后连接 AD，BD 即可得；

（2）根据 $30°$ 角的直角三角形的性质和勾股定理可得 $AC=\sqrt{3}$，由旋转的性质可得 $\triangle ACD$ 是等边三角形，再利用勾股定理求解即可.

【详解】解：（1）根据线段旋转方法，$\angle ACD=60°$，如图所示即为所求；



（2）∵ $\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$BC=1$，

∴ $AB=2BC=2$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}$，

∵ 线段 CA 绕点 C 逆时针旋转 60°得到线段 CD，

∴ $CA=CD$ 且 $\angle ACD=60^\circ$，

∴ $\triangle ACD$ 是等边三角形，

∴ $AD=AC=\sqrt{3}$，$\angle DAC=60^\circ$，

∴ $\angle DAB=\angle DAC+\angle CAB=90^\circ$，

∴ 在 $Rt\triangle ABD$ 中，

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{7}$.

【点睛】题目主要考查旋转图形的作法及性质，勾股定理，30° 角的直角三角形的性质，等边三角形的性质等，理解题意，作出图形，综合运用各个定理性质是解题关键．

20. 【答案】（1） $y=2(x-3)^2-1$；（2）1

【解析】

【分析】（1）将 $(2,1)$ 代入抛物线解析式，即可求出 a 的值，进而求出抛物线的表达式．

（2）利用顶点坐标的位置，判断抛物线向上平移的单位即可．

【详解】（1）解：∵ 抛物线 $y=a(x-3)^2-1$ 经过点（2，1），

∴ $a-1=1$.

解得：$a=2$.

∴ 该抛物线的表达式为 $y=2(x-3)^2-1$.

（2）解：抛物线的顶点为（3，-1），

若抛物线与 x 轴只有一个公共点，则只需向上平移 1 个单位，顶点变为（3,0），此时满足题意．

【点睛】本题主要是考查了待定系数法求解二次函数表达式以及函数图像的平移，熟练利用待定系数法求解函数表达式，根据顶点坐标的平移确定函数图像整体平移的情况，是解决该题的关键．

21. 【答案】（1）见解析　　（2）90，直径所对的圆周角是直角，BD

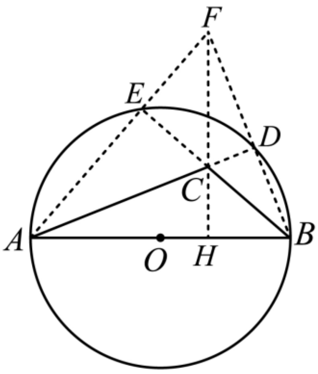
【解析】

【分析】（1）按照作图步骤作出图形即可；

（2）由 AB 是⊙O 的直径，点 D，E 在⊙O 上，得到 $\angle ADB=\angle AEB=90^\circ$． AE， BD 是 $\triangle ABC$ 的两条高线． AE， BD 所在直线交于点 F，则直线 FC 也是 $\triangle ABC$ 的高所在直线，即可得到结论．

【小问 1 详解】

解：补全图形如下，



【小问 2 详解】

证明：∵ AB 是⊙O 的直径，点 D，E 在⊙O 上，

∴ $\angle ADB=\angle AEB=90^\circ$．（直径所对的圆周角是直角）（填推理的依据）

∴ $AE\perp BE$， $BD\perp AD$．

∴ AE， BD 是 $\triangle ABC$ 的两条高线．

∴ CH 是 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高．

故答案为：90，直径所对的圆周角是直角， BD．

【点睛】本题考查了圆周角定理的推论，三角形的三条高线相交于一点等知识，熟知定理，并根据题意灵活应用是解题关键．

22. 【答案】（1） $y=x^2+2x-3$；（2） $-3<x<1$

【解析】

【分析】（1）利用待定系数法求抛物线解析式，将坐标代入解析式得出 $\begin{cases}c=-3\\a+2+c=0\end{cases}$ 解方程组即可；

（2）先求抛物线与 x 轴的交点，转化求方程 $x^2+2x-3=0$ 的解，再根据函数 $y<0$，函数图像位于 x 轴下方，在两根之间即可．

【详解】解：(1) 抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 经过点 $A(0，-3)$，$B(1，0)$ 代入坐标得：

$$\begin{cases}c=-3\\a+2+c=0\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}c=-3\\a=1\end{cases}$，

所求抛物线的解析式是 $y=x^2+2x-3$．

(2) 当 y=0 时，$x^2+2x-3=0$，

因式分解得：$(x+3)(x-1)=0$，

∴ $x+3=0$，$x-1=0$，

∴ x_1=-3，x_2=1，

当 y＜0 时，函数图像在 x 轴下方，

∴y＜0 时，x 的取值范围为-3＜x＜1.

【点睛】本题考查待定系数法求抛物线解析式，利用图像法解不等式，解一元二次方程，方程组，掌握待定系数法求抛物线解析式，利用图像法解不等式，解一元二次方程，方程组是解题关键.

23. 【答案】(1)随机；（2）见解析 $\frac{1}{6}$

【解析】

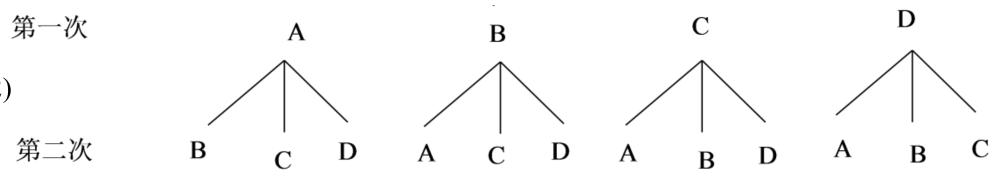
【分析】（1）根据随机事件、不可能事件及必然事件的概念求解即可；

（2）画树状图，得出所有等可能结果数，再从中找到符合条件的结果数，继而利用概率公式求解即可.

【详解】(1)根据随机事件的概念，A 志愿者被选中是随机事件上，

故答案为：随机.

(2)



由上述树状图可知：所有可能出现的结果共有 12 种,并且每一个结果出现的可能性相同．其中 A，B 两名志愿者同时被选中的有 2 种.

∴P（A，B 两名志愿者同时被选中）= $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

【点睛】此题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

24. 【答案】（1）见详解；（2）k＜-4

【解析】

【分析】（1）根据方程的系数结合根的判别式，可得 Δ≥0，由此可证出方程总有两个实数根；

（2）利用分解因式法解一元二次方程，可得出 x_1=2、x_2= k+3，根据方程有一根小于-1，即可得出关于 k 的一元一次不等式，解之即可得出 k 的取值范围.

【详解】（1）证明：∵在方程　　中，Δ=[-（k+5）]^2-4×1×（6+2k）=k^2+2k+1=（k+1）^{2}≥0，

∴方程总有两个实数根.

（2）解：∵ $x^2-(k+5)x+6+2k=[x-(3+k)][x-2]=0$，

∴x_1=2，x_2=k+3．

∵此方程恰有一个根小于　，

∴k+3＜-1，解得：k＜-4，

∴k 的取值范围为 k＜-4．

【点睛】本题考查了根的判别式、因式分解法解一元二次方程以及解一元一次不等式，解题的关键是：（1）牢记"当△≥0 时，方程有两个实数根"；（2）利用因式分解法解一元二次方程结合方程一根小于-1，找出关于 k 的一元一次不等式．

25．【答案】（1）见解析；（2）$FG=2$

【解析】

【分析】（1）由题意根据切线的判定证明半径 $OB\perp BG$ 即可 BG 是⊙O 的切线；

（2）根据题意连接 CF，根据圆周角定理和中位线性质得出 $OE=\dfrac{1}{2}DF$，进而依据等边三角形和四边形 $BEDG$ 是矩形进行分析即可得出 FG 的长．

【详解】解：（1）证明：∵ C，A，D，F 在⊙O 上，∠CAF=90°，

∴ ∠D=∠CAF=90°．

∵ $AB\perp CE$，$BG\perp DF$，

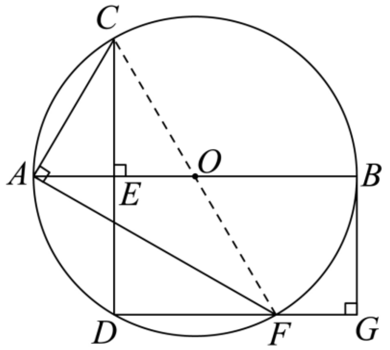
∴ ∠BED=∠G=90°．

∴ 四边形 $BEDG$ 中，∠ABG=90°．

∴ 半径 $OB\perp BG$．

∴ BG 是⊙O 的切线．

（2）连接 CF，



∵ ∠CAF=90°，

∴ CF 是⊙O 的直径．

∴ OC=OF．

∵ 直径 $AB\perp CD$ 于 E，

∴ CE=DE．

∴ OE 是△CDF 的中位线．

∴ $OE=\frac{1}{2}DF=2$.

∵ $AD=AD$，$\angle AFD=30°$，

∴ $\angle ACD=\angle AFD=30°$.

∴ $\angle CAE=90°-\angle ACE=60°$.

∵ $OA=OC$，

∴ $\triangle AOC$是等边三角形.

∵ $CE\perp AB$，

∴ E为AO中点，

∴ $OA=2OE=4$，$OB=4$.

∴ $BE=BO+OE=6$.

∵ $\angle BED=\angle D=\angle G=90°$，

∴ 四边形$BEDG$是矩形.

∴ $DG=BE=6$.

∴ $FG=DG-DF=2$.

【点睛】本题考查圆的综合问题，熟练掌握切线的判定和圆周角定理和中位线性质以及等边三角形和矩形性质是解题的关键.

26. 【答案】(1) $c=-2$，抛物线的对称轴为直线$x=1$

(2) $0<a<4$　　(3) －　　　或　　　－

【解析】

【分析】(1) 把　　　，　　　分别代入　　　　　　，求得$c=-2$，$b=-2a$，再把$c=-2$，$b=-2a$代入得$y=ax^2-2ax-2=a(x-1)^2-a-2$，根据抛物线的顶点式，即可求出抛物线的对称轴；

(2) 把$y=-6$代入$y=ax^2-2ax-2$，整理得$ax^2-2ax+4=0$，根据抛物线与直线　　　没有公共点，则$\Delta=(-2a)^2-4a\times4<0$，即$a(a-4)<0$，当$a>0$时，则$a-4<0$，即$a<4$，则$0<a<4$；当$a<0$时，则$a-4>0$，即$a>4$，此时，无解；即可得出答案；

(3) 把点　　　，　　　分别代入$y=ax^2-2ax-2$，得$y_1=at^2-2at-2$，$y_2=a(t-1)^2-2a(t-1)-2=at^2-a-2$，求得$|y_2-y_1|$，进而求出$at$的范围，结合$a$、$t$范围，求解即可.

【小问1详解】

解：把　　　，　　　分别代入　　　　　　，则

$\begin{cases}c=-2\\4a+2b+c=-2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}c=-2\\b=-2a\end{cases}$，

当$c=-2$时，抛物线解析式为：$y=ax^2-2ax-2=a(x-1)^2-a-2$，

∴抛物线的对称轴为直线$x=1$；

【小问 2 详解】

解：把 y=-6 代入 y=ax^2-2ax-2，整理得

ax^2-2ax+4=0，

∵抛物线与直线　　　没有公共点，

∴Δ=(-2a)^2-4a×4<0，

即 a(a-4)<0，

当 a>0 时，则 a-4<0，即 a<4，

∴0<a<4，

当 a<0 时，则 a-4>0，即 a>4，

此时，无解；

综上，a 的取值范围为 0<a<4；

【小问 3 详解】

解法一：∵点　　　，　　　　在此抛物线上，

∴y_1=at^2-2at-2，y_2=a(t+1)^2-2a(t+1)-2=at^2-a-2，

∴|y_2-y_1|=|(at^2-2a-2)-(at^2-2at-2)|=|a(2t-1)|，

∵当-2≤t≤4 时，都有|y_2-y_1|< $\frac{7}{2}$，

∴- $\frac{7}{2}$ <|a(2t-1)|< $\frac{7}{2}$，

∴ $\frac{a}{2}-\frac{7}{4}<at<\frac{a}{2}+\frac{7}{4}$

∵a≠0，

∴当 a<0 时，$\frac{1}{2}+\frac{7}{4a}<t<\frac{1}{2}-\frac{7}{4a}$，

∴$\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{7}{4a}<-2\\\frac{1}{2}-\frac{7}{4a}>4\end{cases}$，解得：$-\frac{1}{2}<a<0$，

当 a>0 时，$\frac{1}{2}-\frac{7}{4a}<t<\frac{1}{2}+\frac{7}{4a}$，

∴$\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{7}{4a}<-2\\\frac{1}{2}+\frac{7}{4a}>4\end{cases}$，解得：$0<a<\frac{1}{2}$，

综上，a 的取值范围是$-\frac{1}{2}<a<0$ 或 $0<a<\frac{1}{2}$.

解法二：由已知$\left|y_2-y_1\right|=\left|a\left(2t-1\right)\right|$

∵

∴ $-5 \le 2t\text{-}1 \le 7$

∴ $|a(2t-1)| \le |7a| = 7|a|$

∵当　　　　时，都有|　　　|　−

∴ $7|a| < \frac{7}{2}$，即 $|a| < \frac{1}{2}$

∵ $a \neq 0$，

综上，a 的取值范围是 −　　　　或　　　　−．

【点睛】本题考查二次函数图象性质，二次函数图象与直线无交点问题，熟练掌握二次函数图象性质和利用不等式求参数的范围是解题的关键．

27. 【答案】（1）互相垂直；−　；

（2）①　　　　　　　　，证明见解析；② $BE = CD + DE$，证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据各角之间的关系得出 $\angle DAC + \angle ACD = 90°$，即可确定位置关系；再由全等三角形的判定和性质得出△　　　　　　　　，即可得出结果；

（2）①过点 A 作　　　　于点 M、　　　　点 N，根据各角之间的关系及全等三角形的判定得出 $\triangle CAN$　　　　　　，再由其性质即可得出结果；

②在　　上截取 $BF = CD$，连接 AF，由各角之间的关系得出 $\angle B = \angle AC$　$= \angle ACD$，再由全等三角形的判定和性质得出 $\triangle ABF$　$\triangle ACD(\text{SAS})$，$\triangle FAE$　$\triangle DAE(\text{SAS})$，即可得出结果．

【小问 1 详解】

解：当点 E 与点 C 重合时，

$\angle DAE = \angle DAC$，

∵　　　　　　　　，

∴ $\angle DAC + \angle ACD = 90°$，

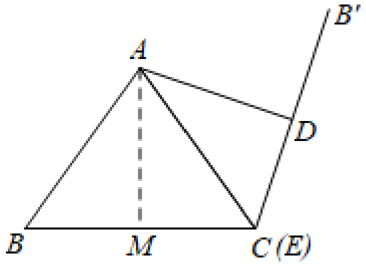
∵ $\angle ADC = 90°$，

∴ $AD \perp CB'$，

即　　与　　的位置关系是互相垂直，

若　　　，过点 A 作　　　　于点 M，

如图：



则$\angle AMC = 90° = \angle ADC$，

∵ ，

$\therefore CM = BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$，

在$\triangle ACD$与$\triangle ACM$中，

$\angle ADC = \angle AMC$，$\angle ACD = \angle ACM$，$AC = AC$，

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ACM\,(\mathrm{AAS})$，

$\therefore CD = CM = \frac{1}{2}a$，

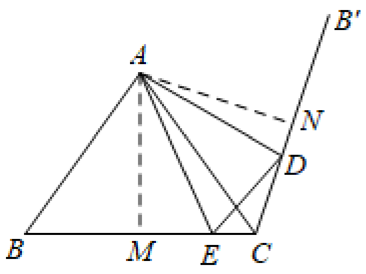
即 的长为$\frac{1}{2}a$，

故答案为：互相垂直；$\frac{1}{2}a$；

【小问2详解】

①当点E与点C不重合时，用等式表示 与 之间的数量关系是：$\angle BAC = 2\angle DAE$，证明如下：

过点A作$AM \perp BC$于点M、$AN \perp CB'$点N，如图：



则$\angle AMC = \angle ANC = 90°$，

$\therefore \angle CAN + \angle AC$ $= 90°$，

∵ ，

即$\angle DAE + \angle AC$ $=90°$，

$\therefore \angle DAE = \angle CAN$，

$\because AB = AC$，$AM \perp BC$，

$\therefore \angle BAC = 2\angle CAM = 2\angle BAM$，

在$\triangle ACN$与　　　　中，

$\angle ANC = \angle AMC$，$\angle ACN = \angle ACM$，$AC = AC$，

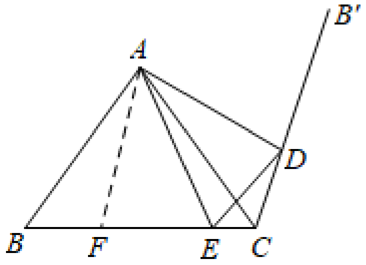
$\therefore \triangle CAN$　　　　　　　　，

$\therefore \angle CAN = \angle CAM$，

$\therefore \angle BAC = 2\angle CAM = 2\angle CAN = 2\angle DAE$；

②用等式表示线段BE、CD、DE之间的数量关系是：$BE = CD + DE$，证明如下：

在　　上截取$BF = CD$，连接AF，如图：



$\because$　　　　　，

$\therefore \angle B = \angle ACB$，

$\because \angle AC$　　$= \angle ACB$，

$\therefore \angle B = \angle AC$　　$= \angle ACD$，在$\triangle ABF$和$\triangle$　　　中，

$AB = AC$，$\angle B = \angle ACD$，$BF = CD$，

$\therefore \triangle ABF$　　$\triangle ACD(\text{SAS})$，

$\therefore AF = AD$，$\angle BAF = \angle CAD$，

$\therefore \angle BAF + \angle CAE = \angle CAD + \angle CAE = \angle DAE$，

由①知：　　　　　　　　　，

即$\angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAC$，

$\therefore \angle BAF + \angle CAE = \frac{1}{2}\angle BAC$，

$\therefore \angle FAE = \angle BAC - (\angle BAF + \angle CAE) = \frac{1}{2}\angle BAC$，

$\therefore \angle FAE = \angle DAE$，

在$\triangle FAE$和$\triangle DAE$中，

$AF = AD$，$\angle FAE = \angle DAE$，$AE = AE$，

$\therefore \triangle FAE$　　$\triangle DAE(\text{SAS})$，

$\therefore FE = DE$，

$\therefore BE = FE + BF = CD + DE$.

【点睛】题目主要考查全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质等，理解题意，作出相应辅助线，熟练运用全等三角形的判定和性质是解题关键.

28. 【答案】（1）①$(3,0)$，②$(-1,3)$

（2）①$(3+a,3+a)$，②$\sqrt{22}$

【解析】

【分析】(1) 根据“垂直图形”的定义可得答案；

(2) 过点 E 作 $EP \perp x$ 轴于点 ，过点 作 $E'H \perp x$ 轴于点 ，利用AAS证明$\triangle PEG \cong \triangle HGE'$得$E'H = PG = a+3$，$GH = EP = 3$，从而得出答案； 由点 的坐标可知，满足条件的点 在第一象限的⊙ 上，求出点 的坐标，从而解决问题.

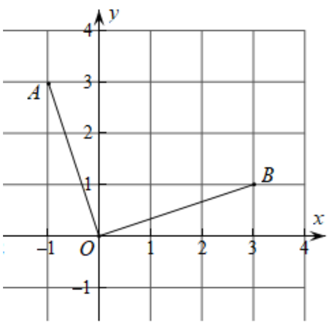
【小问1详解】

解：①∵点A的坐标为 ，

点 的坐标为$(3,0)$，

故答案为：$(3,0)$；

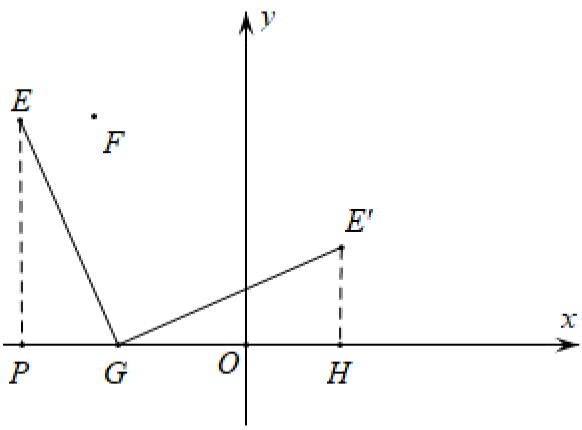
当$B(3,1)$时，如图，$A(-1,3)$，



故答案为：$(-1,3)$；

【小问2详解】

解： 过点E作$EP \perp x$轴于点 ，过点 作$E'H \perp x$轴于点 ，



$\because \angle EGE' = 90°$， $EG = E'G$，

$\therefore \angle EGP + \angle E'GH = 90°$， $\angle EGP + \angle E = 90°$，

$\therefore \angle E = \angle E'GH$，

$\because \angle EPG = \angle GHE'$，

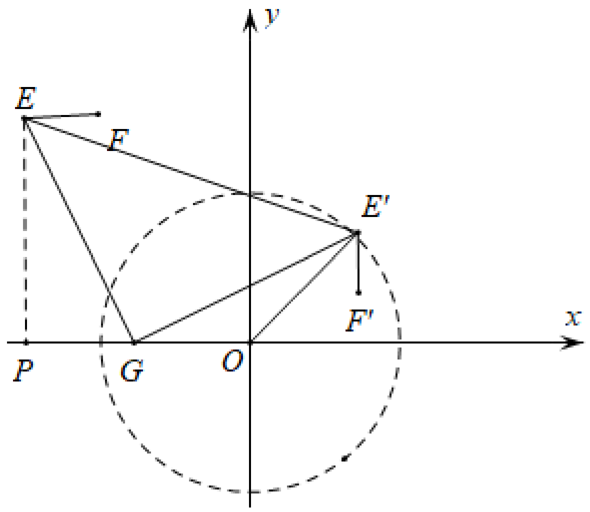
$\triangle PEG \cong \triangle HGE'$（AAS），

$\therefore E'H = PG = a+3$，$GH = EP = 3$，

$\therefore OH = 3+a$，

$\therefore E'(3+a, 3+a)$；

如图，观察图象知，满足条件的点 在第一象限的⊙ 上，



$\because E'\left(3+a, 3+a\right)$， $OE' = 2$，

$\therefore \left(a+3\right)^2 + \left(a+3\right)^2 = 2^2$， $a+3 = \sqrt{2}$ (负值舍去)，

$\therefore a = \sqrt{2} - 3$，

$\therefore E'\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$，

$\therefore EE' = \sqrt{\left(\sqrt{2}+3\right)^2 + \left(\sqrt{2}-3\right)^2} = \sqrt{22}$．

$\therefore EE'$ 的长度的最大值为 $\sqrt{22}$．

【点睛】本题是几何变换综合题，主要考查了全等三角形的判定与性质，“垂直图形”的定义，坐标与图形，求出点 的坐标是解题的关键．