

# 2024 北京大兴高三（上）期末

## 数 学

本试卷共 9 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集  $U = \{x | x > 1\}$ ，集合  $A = \{x | x \geq 2\}$ ，则  $C_U A =$

- A.  $\{x | 1 < x \leq 2\}$       B.  $\{x | x < 2\}$   
C.  $\{x | 1 < x < 2\}$       D.  $\{x | x \leq 1\}$

2. 若复数  $z$  满足  $i \cdot (z + i) = 1$ ，则复数  $z$  的虚部是

- A. -2    B. 2    C. -1    D. 0

3. 在  $(x^2 - \frac{1}{x})^6$  的展开式中，常数项为

- A. -15    B. 15    C. -20    D. 20

4. 设向量  $a, b$ ，若  $|a| = 1$ ， $b = (-3, 4)$ ， $b = \lambda a$  ( $\lambda > 0$ )，则  $a =$

- A.  $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$     B.  $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$     C.  $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$     D.  $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

5. 已知函数  $f(x) = 2^x - 1$ ，则不等式  $f(x) \leq x$  的解集为

- A.  $(-\infty, 2]$     B.  $[0, 1]$     C.  $[1, +\infty)$     D.  $[1, 2]$

6. 在  $\triangle ABC$  中，“ $C = \frac{\pi}{2}$ ”是“ $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$ ”的

- A. 充分而不必要条件      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件

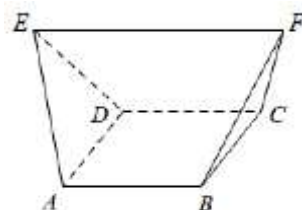
7. 已知定点  $M(1, 3)$  和抛物线  $C: x^2 = 8y$ ， $F$  是抛物线  $C$  的焦点， $N$  是抛物线  $C$  上的点，则  $|NF| + |NM|$  的最小值为

- A. 3    B. 4    C. 5    D. 6

8. 已知  $a > b > 0$  且  $ab = 10$ ，则下列结论中不正确的是

- A.  $\lg a + \lg b > 0$       B.  $\lg a - \lg b > 0$   
C.  $\lg a \cdot \lg b < \frac{1}{4}$       D.  $\frac{\lg a}{\lg b} > 1$

9. 木楔在传统木工中运用广泛. 如图，某木楔可视为一个五面体，其中四边形  $ABCD$  是边长为 2 的正方形，且  $\triangle ADE$ ， $\triangle BCF$  均为等边三角形， $EF \parallel CD$ ， $EF = 4$ ，则该木楔的体积为



- A.  $\sqrt{2}$       B.  $2\sqrt{2}$   
 C.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       D.  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

10. 设无穷等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，集合  $T = \{t \mid t = \sin a_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 。则

- A.  $T$  不可能有无数个元素  
 B. 当且仅当  $d = 0$  时， $T$  只有 1 个元素  
 C. 当  $T$  只有 2 个元素时，这 2 个元素的乘积有可能为  $\frac{1}{2}$   
 D. 当  $d = \frac{2\pi}{k}$ ， $k \geq 2$ ， $k \in \mathbf{N}^*$  时， $T$  最多有  $k$  个元素，且这  $k$  个元素的和为 0

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 设  $\{a_n\}$  是等比数列， $a_1 = 1$ ， $a_2 \cdot a_4 = 16$ ，则  $a_5 =$ \_\_\_\_\_。

12. 若双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ ) 的一条渐近线方程为  $2x - y = 0$ ，则  $b =$ \_\_\_\_\_。

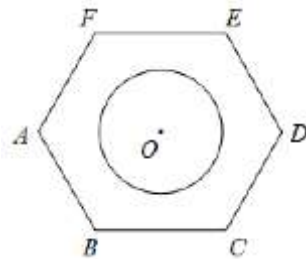
13. 能够说明“设  $a, b, c$  是任意实数. 若  $a > b > c$ ，则  $ab > c^2$ ”是假命题的一组整数  $a, b, c$  的值依次为\_\_\_\_\_。

14. 如图是六角螺母的横截面，其内圈是半径为 1 的圆  $O$ ，

外框是以  $O$  为中心，边长为 2 的正六边形  $ABCDEF$ ，

则  $O$  到线段  $AC$  的距离为\_\_\_\_\_；若  $P$  是圆  $O$  上的动点，

则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$  的取值范围是\_\_\_\_\_。



15. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，且  $f(x)$  满足如下性质：(i) 若将  $f(x)$  的图象向左平移 2 个单位，则所得的图象关于  $y$  轴对称；(ii) 若将  $f(x)$  图象上的所有点的纵坐标不变，横坐标缩短为原来的  $\frac{1}{2}$ ，再向左平

移  $\frac{1}{2}$  个单位，则所得的图象关于原点对称. 给出下列四个结论：

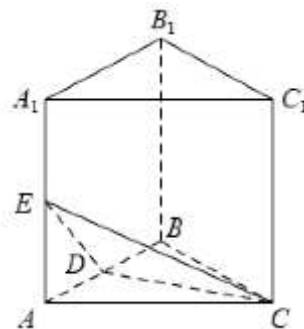
- ①  $f(1) = f(3)$ ；      ②  $f(0) = 0$ ；  
 ③  $f(2) + f(4) = 0$ ；      ④  $f(-\frac{1}{2})f(\frac{11}{2}) \leq 0$ .

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. (本小题 14 分)

如图，在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $BB_1 \perp$  平面  $ABC$ ， $CA = CB = \sqrt{5}$ ， $AA_1 = AB = 2$ ， $D, E$  分别为  $AB, AA_1$  的中点.



(I) 求证: 平面  $CDE \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ;

(II) 求直线  $CE$  与平面  $BCC_1B_1$  所成角的正弦值.

17. (本小题 13 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $a=1, b=2$ .

(I) 若  $c=2\sqrt{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积;

(II) 在下列三个条件中选择一个作为已知, 使  $\triangle ABC$  存在, 求  $\angle A$ .

条件①:  $\angle B=2\angle A$ ; 条件②:  $\angle B=\frac{\pi}{3}+\angle A$ ; 条件③:  $\angle C=2\angle A$ .

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题 13 分)

为了解客户对  $A, B$  两家快递公司的配送时效和服务满意度情况, 现随机获得了某地区客户对这两家快递公司评价的调查问卷. 已知  $A, B$  两家公司的调查问卷分别有 120 份和 80 份, 全部数据统计如下:

快递公司		A 快递公司		B 快递公司	
评价分数	项目	配送时效	服务满意度	配送时效	服务满意度
	份数				
	$85 \leq x \leq 95$	29	24	16	12
	$75 \leq x < 85$	47	56	40	48
	$65 \leq x < 75$	44	40	24	20

假设客户对  $A, B$  两家快递公司的评价相互独立. 用频率估计概率.

(I) 从该地区选择  $A$  快递公司的客户中随机抽取 1 人, 估计该客户对  $A$  快递公司配送时效的评价不低于 75 分的概率;

(II) 分别从该地区  $A$  和  $B$  快递公司的样本调查问卷中, 各随机抽取 1 份, 记  $X$  为这 2 份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分的份数, 求  $X$  的分布列和数学期望;

(III) 记评价分数  $x \geq 85$  为“优秀”等级,  $75 \leq x < 85$  为“良好”等级,  $65 \leq x < 75$  为“一般”等级. 已知小王比较看重配送时效的等级, 根据该地区  $A, B$  两家快递公司配送时效的样本评价分数的等级情况, 你认为小王选择  $A, B$  哪家快递公司合适? 说明理由.

19. (本小题 15 分)

已知椭圆  $C$  的两个顶点分别为  $A(-2,0)$ ,  $B(2,0)$ , 焦点在  $x$  轴上, 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 设  $O$  为原点, 过点  $T(4,0)$  的直线  $l$  交椭圆  $C$  于点  $M, N$ , 直线  $BM$  与直线  $x=1$  相交于点  $P$ , 直线  $AN$  与  $y$  轴相交于点  $Q$ . 求证:  $\triangle OAQ$  与  $\triangle OTP$  的面积之比为定值.

20. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = ax + \ln \frac{1-x}{1+x}$ .

(I) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线斜率为 0, 求  $a$  的值;

(II) 当  $a=4$  时, 求  $f(x)$  的零点个数;

(III) 证明:  $0 \leq a \leq 2$  是  $f(x)$  为单调函数的充分而不必要条件.

21. (本小题 15 分)

若各项为正的无穷数列  $\{a_n\}$  满足: 对于  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = d$ , 其中  $d$  为非零常数, 则称数列  $\{a_n\}$  为  $D$  数列. 记  $b_n = a_{n+1} - a_n$ .

(I) 判断无穷数列  $a_n = \sqrt{n}$  和  $a_n = 2^n$  是否是  $D$  数列, 并说明理由;

(II) 若  $\{a_n\}$  是  $D$  数列, 证明: 数列  $\{b_n\}$  中存在小于 1 的项;

(III) 若  $\{a_n\}$  是  $D$  数列, 证明: 存在正整数  $n$ , 使得  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > 2024$ .

## 大兴区 2023~2024 学年度第一学期期末检测

### 高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) C      (2) A      (3) B      (4) D      (5) B  
(6) A      (7) C      (8) D      (9) D      (10) D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) 16                                  (12) 2  
(13) 2, 0, -1 (答案不唯一)      (14) 1 [6-2 $\sqrt{3}$ , 6+2 $\sqrt{3}$ ]  
(15) ① ③ ④

注：第 (14) 题第一空 3 分，第二空 2 分；

第 (15) 题只写一个且正确 2 分，只写两个且正确 3 分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16) (共 14 分)

解：(I) 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中，

因为  $BB_1 \perp$  平面  $ABC$ ，

所以  $CD \perp BB_1$ .    ……1 分

在  $\triangle ABC$  中，因为  $D$  为  $AB$  的中点， $CA = CB = \sqrt{5}$ ，

所以  $CD \perp AB$ .    ……1 分

所以  $CD \perp$  平面  $ABB_1A_1$ .    ……1 分

因为  $CD \subset$  平面  $CDE$ ，

所以平面  $CDE \perp$  平面  $ABB_1A_1$ .    ……1 分

(II) 取  $A_1B_1$  的中点  $D_1$ ，连结  $D_1F$ 。

因为  $D$  为  $AB$  的中点，

所以在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $DD_1 \parallel BB_1$ 。

所以  $DD_1 \perp$  平面  $ABC$ .    ……1 分

所以  $DD_1 \perp AB$ ， $DD_1 \perp DC$ 。

由 (I) 知  $CD \perp AB$ 。

如图建立空间直角坐标系  $D-xyz$ ，

则  $D(0,0,0)$ ， $B(-1,0,0)$ ， $B_1(-1,0,2)$ ， $E(1,0,1)$ ， $C(0,2,0)$ 。

所以  $\overrightarrow{BC} = (1,2,0)$ ， $\overrightarrow{BB_1} = (0,0,2)$ .    ……2 分

设平面  $BCC_1B_1$  的法向量为  $n = (x,y,z)$ ，则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 2z = 0, \\ x + 2y = 0. \end{cases} \quad \dots\dots 1 \text{分}$$

令  $y=1$ , 则  $x=-2$ .

于是  $\vec{n}=(-2, 1, 0)$ .  $\dots\dots 1$ 分

又  $\overrightarrow{CE}=(1, -2, 1)$ ,  $\dots\dots 1$ 分

设直线  $CE$  与平面  $BCC_1B_1$  所成角的  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin \theta &= |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CE} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CE}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{CE}|} \quad \dots\dots 2 \text{分} \\ &= \frac{|(-2) \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times 1|}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} \\ &= \frac{2\sqrt{30}}{15}. \quad \dots\dots 1 \text{分} \end{aligned}$$

所以直线  $CE$  与平面  $BCC_1B_1$  所成角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{30}}{15}$ .  $\dots\dots 1$ 分

(17) (共 13 分)

解: (I) 由余弦定理知,

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \dots\dots 1 \text{分} \\ &= \frac{1^2 + 2^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times 1 \times 2} \\ &= -\frac{3}{4}. \quad \dots\dots 1 \text{分} \end{aligned}$$

在  $\triangle ABC$  中,  $C \in (0, \pi)$ .

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \quad \dots\dots 1 \text{分} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{4}. \quad \dots\dots 1 \text{分} \end{aligned}$$

所以  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{1}{2} ab \sin C \dots\dots 1$ 分

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}. \quad \dots\dots 1 \text{分}$$

(II) 选择条件②:  $\angle B = \frac{\pi}{3} + \angle A$

由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ,  $\dots\dots 2$ 分

$$\text{知 } \frac{1}{\sin A} = \frac{2}{\sin(A + \frac{\pi}{3})}.$$

所以  $\sin(A + \frac{\pi}{3}) = 2 \sin A$ .  $\dots\dots 1$ 分

所以  $\sin A \cos \frac{\pi}{3} + \cos A \sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin A$ .  $\cdots \cdots 2$  分

所以  $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .  $\cdots \cdots 1$  分

因为在  $\triangle ABC$  中,  $A \in (0, \pi)$ ,

所以  $\angle A = \frac{\pi}{6}$ .  $\cdots \cdots 1$  分

选择条件③:  $\angle C = 2\angle A$

由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ,  $\cdots \cdots 2$  分

知  $\frac{1}{\sin A} = \frac{c}{\sin 2A}$ .

所以  $\frac{1}{\sin A} = \frac{c}{2 \sin A \cos A}$ .  $\cdots \cdots 1$  分

所以  $c = 2 \cos A$ .  $\cdots \cdots 1$  分

由余弦定理知  $c = 2 \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ .

所以  $c = \sqrt{3}$ .  $\cdots \cdots 1$  分

所以  $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  $\cdots \cdots 1$  分

因为在  $\triangle ABC$  中,  $A \in (0, \pi)$ ,

所以  $\angle A = \frac{\pi}{6}$ .  $\cdots \cdots 1$  分

(18) (共 13 分)

解: (I) 根据题中数据, 该地区参与 A 快递公司调查的问卷共 120 份,

样本中对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的问卷共  $29 + 47 = 76$  份,

所以样本中对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的频率为  $\frac{76}{120} = \frac{19}{30}$ ,

估计该地区客户对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的概率  $\frac{19}{30}$ . 3 分

(II)  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2.  $\cdots \cdots 1$  分

记事件  $C$  为“从该地区 A 快递公司的样本调查问卷中随机抽取 1 份, 该份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分”, 事件  $D$  为“从该地区 B 快递公司的样本调查问卷中随机抽取 1 份, 该份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分”.

由题设知, 事件  $C, D$  相互独立, 且

$P(C) = \frac{24 + 56}{120} = \frac{2}{3}$ ,  $P(D) = \frac{12 + 48}{80} = \frac{3}{4}$ .  $\cdots \cdots 1$  分

所以  $P(X = 0) = P(\overline{CD}) = (1 - \frac{2}{3}) \times (1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{12}$ ,  $\cdots \cdots 1$  分

$P(X = 1) = P(\overline{CD} \cup C\overline{D}) = (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times (1 - \frac{3}{4}) = \frac{5}{12}$ ,  $\cdots \cdots 1$  分

$$P(X=2) = P(CD) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}. \dots\dots 1 \text{分}$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

$$\text{故 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{17}{12}. \dots\dots 2 \text{分}$$

(III) 答案不唯一.  $\dots\dots 3 \text{分}$

答案示例 1: 小王选择 A 快递公司合适, 理由如下:

根据样本数据, 估计 A 快递公司配送时效评价为“优秀”的概率是  $\frac{29}{120}$ , 估计 B 快递公司配送时效评价为“优秀”的概率是  $\frac{1}{5}$ , 因为  $\frac{29}{120} > \frac{1}{5}$ , 故小王选择 A 快递公司合适.

答案示例 2: 小王选择 B 快递公司合适, 理由如下:

由 (I) 知, 估计 A 快递公司配送时效评价为“良好”以上的概率是  $\frac{19}{30}$ ; 由样本数据可知, 估计 B 快递公司配送时效评价为“良好”以上的概率是  $\frac{16+40}{80} = \frac{56}{80} = \frac{7}{10}$ , 因为  $\frac{19}{30} < \frac{7}{10}$ , 故小王选择 B 快递公司合适.

(19) (共 15 分)

解: (I) 设椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ .

$$\text{由题意得 } \begin{cases} a=2, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } c = \sqrt{3}. \dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 1. \dots\dots 1 \text{分}$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \dots\dots 1 \text{分}$$

(II) 依题意, 直线  $l$  的斜率存在, 设其方程为  $y = k(x-4) (k \neq 0)$ .  $\dots\dots 1 \text{分}$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x-4), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (4k^2 + 1)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 4 = 0. \dots\dots 1 \text{分}$$

设  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ , 则

$$\Delta > 0 \text{ 且 } x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{4k^2 + 1}, \quad x_1x_2 = \frac{64k^2 - 4}{4k^2 + 1}. \dots\dots 1 \text{分}$$

$$\text{所以直线 } MB \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2), \text{ 所以 } P(1, \frac{-y_1}{x_1 - 2}). \dots\dots 2 \text{分}$$



直线  $NA$  的方程为  $y = \frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$ , 所以  $Q(0, \frac{2y_2}{x_2+2})$ .  $\cdots \cdots 1$  分

所以  $\triangle OAQ$  的面积为  $S_{\triangle OAQ} = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_Q| = |\frac{2y_2}{x_2+2}|$ ,  $\cdots \cdots 1$  分

$\triangle OTP$  的面积为  $S_{\triangle OTP} = \frac{1}{2} \times 4 \times |y_P| = |\frac{2y_1}{x_1-2}|$ .  $\cdots \cdots 1$  分

所以  $\frac{S_{\triangle OAQ}}{S_{\triangle OTP}} = |\frac{2y_2}{x_2+2}| \times |\frac{x_1-2}{2y_1}| = |\frac{y_2(x_1-2)}{y_1(x_2+2)}| = |\frac{k(x_2-4)(x_1-2)}{k(x_1-4)(x_2+2)}|$   
 $= |\frac{x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 8}{x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 - 8}| = |\frac{x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 8 - 2x_1}{x_1x_2 - 4(x_1+x_2) - 8 + 6x_1}| \cdots \cdots 1$  分

$$= |\frac{\frac{64k^2-4}{4k^2+1} - 2 \times \frac{32k^2}{4k^2+1} + 8 \times \frac{4k^2+1}{4k^2+1} - 2x_1}{\frac{64k^2-4}{4k^2+1} - 4 \times \frac{32k^2}{4k^2+1} - 8 \times \frac{4k^2+1}{4k^2+1} + 6x_1}|$$

$$= |\frac{\frac{32k^2+4}{4k^2+1} - 2x_1}{\frac{-3(32k^2+4)}{4k^2+1} + 6x_1}| \cdots \cdots 1$$
 分

$$= \frac{1}{3}. \quad \cdots \cdots 1$$
 分

所以  $\triangle OAQ$  与  $\triangle OTP$  的面积之比为定值.

(20) (共 15 分)

解: (I) 因为函数  $f(x) = ax + \ln \frac{1-x}{1+x}$ ,

所以  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 1)$ .

所以  $f'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + a$ .  $\cdots \cdots 2$  分

因为曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线斜率为 0,

所以  $f'(0) = 0$ .  $\cdots \cdots 1$  分

所以  $a = 2$ .  $\cdots \cdots 1$  分

(II) 当  $a = 4$  时,  $f(x) = 4x + \ln \frac{1-x}{1+x}$ .

因为  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 1)$ ,  $\cdots \cdots 1$  分

且  $f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 4x = -\ln \frac{1-x}{1+x} - 4x = -f(x)$ ,

所以  $f(x)$  是奇函数.  $\cdots \cdots 1$  分

以下讨论  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  上的零点个数.

$$f'(x) = \frac{-4x^2+2}{(1-x)(1+x)}.$$

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .  $\cdots \cdots 1$  分

$f'(x)$  与  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  的情况如下:

$x$	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

因为  $f(0) = 0$ , 且  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  上单调递增,

所以  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  上没有零点.  $\cdots \cdots 1$  分

因为  $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$ , 且  $f(1 - \frac{1}{e^4}) < 0$ ,

由  $f(x)$  在区间  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$  上单调递减和函数零点存在定理知,

$f(x)$  在区间  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$  内存在唯一零点.

综上,  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内存在唯一零点.  $\cdots \cdots 1$  分

因为  $f(x)$  是奇函数,

所以  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内存在 3 个零点.  $\cdots \cdots 1$  分

(III) 当  $0 \leq a \leq 2$  时,  $-ax^2 \leq 0$ ,  $a - 2 \leq 0$ ,

$$\text{故 } f'(x) = \frac{-ax^2 + a - 2}{(1-x)(1+x)} \leq 0,$$

所以  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上单调递减.

所以  $0 \leq a \leq 2$  是  $f(x)$  为单调函数的充分条件.  $\cdots \cdots 3$  分

$$\text{当 } a = -1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{x^2 - 3}{(1-x)(1+x)}.$$

因为当  $x \in (-1, 1)$  时,  $x^2 - 3 < 0$ ,  $(1-x)(1+x) > 0$ ,

故当  $x \in (-1, 1)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上单调递减.

所以  $0 \leq a \leq 2$  不是  $f(x)$  为单调函数的必要条件.  $\cdots \cdots 2$  分

所以  $0 \leq a \leq 2$  是  $f(x)$  为单调函数的充分而不必要条件.

(21) (共 15 分)

解: (I) 数列  $a_n = \sqrt{n}$  是  $D$  数列.

理由如下:  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 = 1$  满足  $D$  数列定义.  $\cdots \cdots 2$  分

数列  $a_n = 2^n$  不是  $D$  数列.

理由如下:  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2^{n+1})^2 - (2^n)^2 = 2^{2n+2} - 2^{2n} = 3 \cdot 2^{2n}$  不是常数.  $\cdots \cdots 2$  分

(II) 以下证明:  $d > 0$ .

假设  $d < 0$ , 由  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = d$  知  $\{a_n^2\}$  为等差数列, 故  $a_n^2 = a_1^2 + (n-1)d$ .

因为  $\{a_n\}$  是各项为正的无穷数列,

当  $n$  取大于  $[\frac{-a_1^2}{d}]+1$  的整数时,  $a_n^2 \leq a_1^2 + ([\frac{-a_1^2}{d}]+2-1)d < 0$ ,

与已知矛盾, 所以假设不成立, 所以  $d > 0$ .

以下证明:  $\{a_n\}$  是递增数列.

因为  $d > 0$ ,  $a_{n+1}^2 = a_n^2 + d > a_n^2$ , 且  $\{a_n\}$  是各项为正的无穷数列,

所以  $a_{n+1} > a_n$ . 所以  $\{a_n\}$  是递增数列.

以下证明:  $\forall t > 0$ ,  $\exists k \in \mathbf{N}^*$ , 当  $n \geq k$  时,  $a_n > t$ .

若  $t < a_1$ , 当  $n > 1$  时, 显然  $a_n > t$ .

若  $t \geq a_1$ , 取  $k = [\frac{t^2 - a_1^2}{d}] + 2$ ,

当  $n \geq k$  时,  $a_n^2 \geq a_1^2 + ([\frac{t^2 - a_1^2}{d}] + 2 - 1)d > t^2$ , 即  $a_n > t$  成立.

因为  $b_n = a_{n+1} - a_n = \frac{d}{a_{n+1} + a_n} < \frac{d}{2a_n}$ ,

取  $t = \frac{d}{2}$ , 当  $n \geq k$  时,  $a_n > t$ , 此时,  $b_n < \frac{d}{2 \cdot \frac{d}{2}} = 1$ .

所以若  $\{a_n\}$  是  $D$  数列, 则数列  $\{b_n\}$  中存在小于 1 的项.  $\cdots$  5 分

(III) 由 (II) 知,  $\exists k \in \mathbf{N}$ , 当  $n \geq k$  时,  $b_n < 1$ , 即  $a_{n+1} < a_n + 1$ ,

以此类推,  $0 < a_{k+m} < a_{k+m-1} + 1 < a_{k+m-2} + 2 < \cdots < a_k + m$ ,  $m \in \mathbf{N}^*$ .

所以  $\frac{1}{a_{k+m}} > \frac{1}{a_k + m}$ ,  $m \in \mathbf{N}^*$ . 设此时  $2^{s-1} \leq a_k < 2^s$ ,  $s \in \mathbf{N}^*$ , 令  $n = k + m$ .

所以  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > \sum_{i=k}^{k+m} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_k+1} + \frac{1}{a_k+2} + \cdots + \frac{1}{a_k+m}$

$> \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s+1} + \frac{1}{2^s+2} + \cdots + \frac{1}{2^s+m}$ .

因为  $\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s+1} + \frac{1}{2^s+2} + \cdots + \frac{1}{2^s+(2^s-1)} > \frac{2^s}{2^s+2^s} = \frac{1}{2}$ ,

所以当  $m = 2^{s+2 \times 2024} - 1$ ,  $m \in \mathbf{N}^*$ ,

$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > \sum_{i=k}^{k+m} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s+1} + \frac{1}{2^s+2} + \cdots + \frac{1}{2^s+(2^{s+2 \times 2024}-1)}$   
 $= (\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s+1} + \cdots + \frac{1}{2^s+(2^s-1)}) + (\frac{1}{2^{s+1}} + \frac{1}{2^{s+1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{s+1}+(2^{s+1}-1)}) +$   
 $\cdots + (\frac{1}{2^{s+2 \times 2024}} + \frac{1}{2^{s+2 \times 2024}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{s+2 \times 2024}+(2^{s+2 \times 2024}-1)}) > \frac{2 \times 2024}{2} = 2024.$

所以存在正整数  $n$ , 使得  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > 2024$ .  $\cdots \cdots$  6 分