



2023 北京北大附中初二（上）期中

数 学

班级 _____ 姓名 _____ 准考证号 _____

考 生 须 知	1.	本卷共 6 页，共 3 部分，26 道题，满分 100 分。考试时间 90 分钟。
	2.	试卷和答题卡上准确填写班级、姓名和准考证号。
	3.	答案一律填涂或书写答题卡上，试卷上作答无效。
	4.	答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他题用黑色字迹签字笔作答。

一、选择题（本题共30分，每小题 3 分）下列各题的四个备选答案中，只有一个是正确的。

1. 在第19届杭州亚运会上，中国运动员全力以赴地参赛，最终取得优异成绩，总共夺取201金111银71铜的骄人战绩。在下列运动标识中，是轴对称图形的是



A.



B.



C.



D.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(3, 1)$ ，则点 A 关于 x 轴的对称点的坐标是

- A. $(1, 3)$ B. $(-3, 1)$ C. $(3, -1)$ D. $(-3, -1)$

3. 一个等腰三角形的两条边分别是 $2cm$ 和 $5cm$ ，则第三条边的边长是

- A. $2cm$ B. $5cm$ C. $2cm$ 或 $5cm$ D. 不能确定

4. 下列运算式中，正确的是

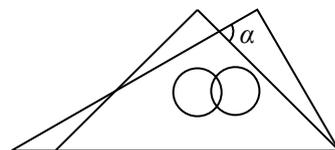
- A. $x^2+x^2=x^4$ B. $x^2 \cdot x^3=x^5$ C. $(xy)^3=x^3y$ D. $(x^2)^3=x^5$

5. 根据下列条件能画出唯一 $\triangle ABC$ 的是

- A. $AB=1, BC=2, CA=3$ B. $AB=7, BC=5, \angle A=30^\circ$
 C. $\angle A=50^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=70^\circ$ D. $AC=3.5, BC=4.8, \angle C=70^\circ$

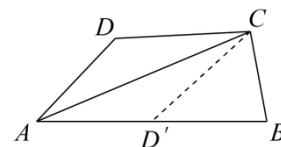
6. 将一副三角尺按如图所示的方式摆放，则 $\angle \alpha$ 的度数为

- A. 75° B. 85° C. 65° D. 60°

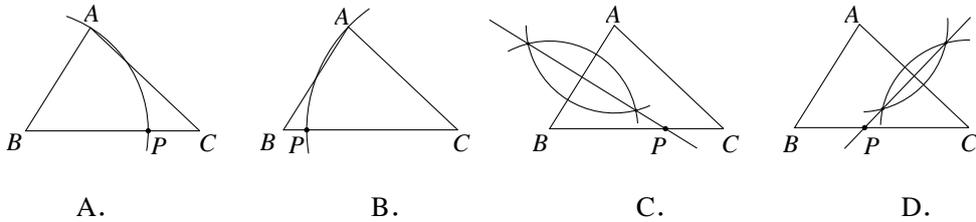


7. 如图，将一张四边形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 D 恰好落在边 AB 的中点处。设 S_1, S_2 分别为 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABC$ 的面积， S_1 和 S_2 数量关系是

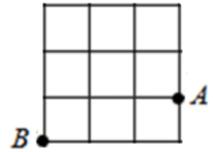
- A. $S_1 = \frac{1}{3}S_2$ B. $S_1 = \frac{1}{2}S_2$ C. $S_1 = 2S_2$ D. $S_1 = 3S_2$



8. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB < AC < BC$ ，如果要用尺规作图的方法在 BC 上确定一点 P ，使 $PA + PB = BC$ ，那么符合要求的作图痕迹是

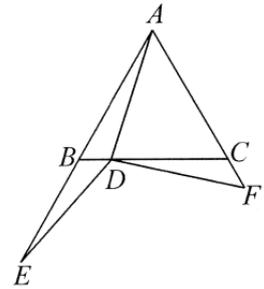


9. 如图，在正方形网格中， A, B 两点都在小方格的顶点上，如果点 C 也是图中小方格的顶点，且 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，那么点 C 的个数为



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

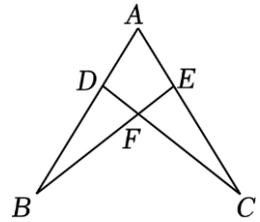
10. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， D 是线段 BC 上一点（不与点 B, C 重合），连接 AD ，点 E, F 分别在线段 AB, AC 的延长线上，且 $DE = DF = AD$ ，点 D 从 B 运动到 C 的过程中， $\triangle BED$ 周长的变化规律是



- A. 不变 B. 一直变小
C. 先变大后变小 D. 先变小后变大

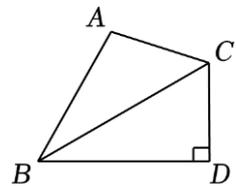
二、填空题（本题共 18 分，每小题 3 分）

11. 如图， $AD = AE$ ，点 D, E 分别在 AB, AC 上， CD, BE 交于点 F ，只添加一个条件使 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，添加的条件是：_____（添加一个即可）。



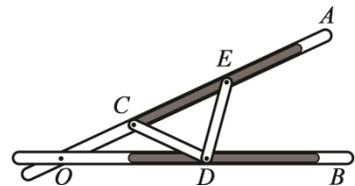
12. 某区环保局将一个长为 2×10^6 分米，宽为 4×10^4 分米，高为 8×10^2 分米的长方体废水池中的满池废水注入正方体贮水池净化，该贮水池将这些废水刚好装满，则正方体贮水池的棱长为_____分米。

13. 一个多边形的内角和是 1080° ，则这个多边形的边数为_____。

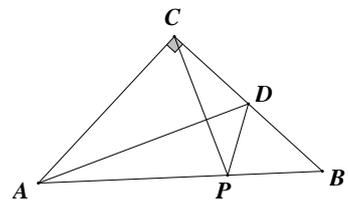


14. 如图，在四边形 $ABDC$ 中， $\angle ABD = 60^\circ$ ， $\angle D = 90^\circ$ ， BC 平分 $\angle ABD$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ， $\triangle ABC$ 的面积等于_____。

15. “三等分角”是被称为几何三大难题的三个古希腊作图难题之一。如图所示的“三等分角仪”是利用阿基米德原理做出的。这个仪器由两根有槽的棒 OA, OB 组成，两根棒在 O 点相连并可绕 O 转动， C 点固定， $OC = CD = DE$ ，点 D, E 可在槽中滑动。若 $\angle BDE = 72^\circ$ ，则 $\angle CDE =$ _____。



16. 如图，等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2$ ， D 为 BC 中点， $AD = \sqrt{5}$ ， P 为 AB 上一个动点，则 $PC + PD$ 的最小值为_____。



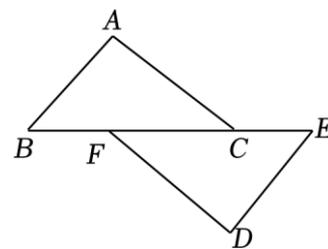
三、解答题（本题共 52 分，第 17(1) 题 3 分，17(2) 题 4 分，第 18-20 题，每题 4 分，第 21-23 题，每题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分）

17. 计算：(1) $(2x)^3 \cdot (-5xy^2)$ (2) $(x - 2y)(x + y)$

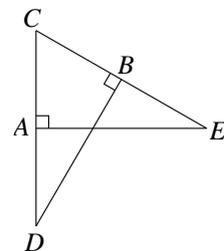


18. 已知：如图，点 B, F, C, E 在一条直线上， $AB=DE, AB \parallel DE, BF=EC$. 求证： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

19. 已知 $x^2 + x - 4 = 0$ ，求 $(x+2)(3x-1) - 2x(x+2)$ 的值.



20. 如图， A, B 分别为 CD, CE 的中点， $AE \perp CD$ 于点 $A, BD \perp CE$ 于点 B . 求 $\angle AEC$ 的度数.



21. 下面是小东设计的尺规作图过程.

已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$.

求作：点 D ，使得点 D 在 BC 边上，且到 AB 和 AC 的距离相等.

作法：①如图，以点 A 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 AB, AC 于点 M, N ；

②分别以点 M, N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 为半径画弧，两弧交于点 P ；

③画射线 AP ，交 BC 于点 D .

所以点 D 即为所求.

根据小东设计的尺规作图过程，

(1) 使用直尺和圆规，补全图形；(保留作图痕迹)

(2) 完成下面的证明.

证明：过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E ，连接 MP, NP .

在 $\triangle AMP$ 和 $\triangle ANP$ 中，

$\because AM = AN, MP = NP, AP = AP,$

$\therefore \triangle AMP \cong \triangle ANP$ (SSS).

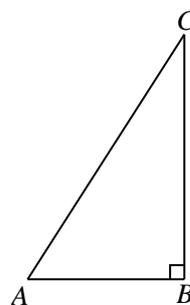
$\therefore \angle \underline{\quad} = \angle \underline{\quad}.$

$\because \angle ABC = 90^\circ,$

$\therefore DB \perp AB.$

$\because DE \perp AC,$

$\therefore DB = DE$ (_____).



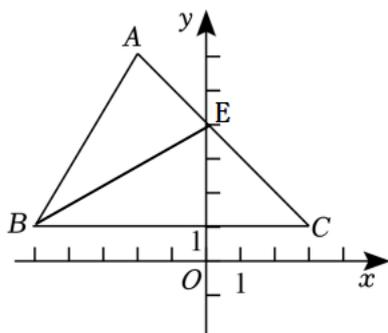
22. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC, A(-2, 6), B(-5, 1), C(3, 1)$.

点 B 与点 C 关于直线 l 对称， AC 交 y 轴于点 E .

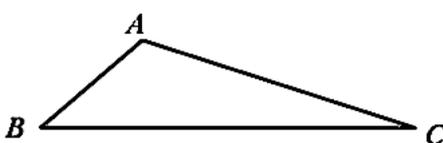
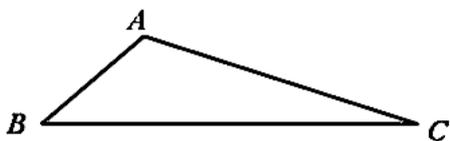
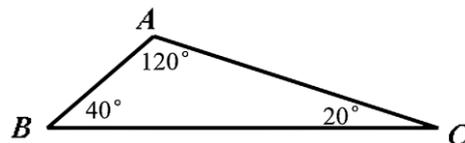
(1) 请在坐标系中画出直线 l ;

(2) 求 $\triangle ABE$ 的面积;

(3) 若点 P 在直线 l 上， $\angle BPC = 90^\circ$ ，直接写出点 P 的坐标.



23. (1) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=120^\circ$, $\angle B=40^\circ$, $\angle C=20^\circ$, 请你设计两种不同的方法: 用一条直线将 $\triangle ABC$ 分割成两个等腰三角形. (作图工具不限, 不要求写画法, 不要求证明, 要求标出所分得的每个等腰三角形三个内角的度数.)



(2) 根据以上问题, 提出一个你觉得有研究价值的数学问题, 描述你的问题即可, 不需要解答.

24. 我们学习了实数的正整数次幂的运算, 如 $2^3=8$, $(-\sqrt{3})^4=9$ 等. 现已知一个实数的实数次幂也可以运算. 若实数 a 、 b 、 x 满足 $a^x=b$, 则称 x 为 b 关于 a 的“ L 数”, 记为 $x=L(a, b)$.

(1) 请直接写出: ① $L(2, 16)=$ _____ ; ② $L\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{64}\right)=$ _____ .

(2) 若 $L(a, 25)=2$, 则 $a=$ _____ .

(3) 已知 $L(10, 5)=x$, $L(10, 20)=y$, $L(10, b)=z$, 且 $x+z=2y$, 求 b 的值.

25. 已知直线 MN , 在直线上取一点 A , 以 A 为顶点作等腰 $\triangle ABC$, $AB=AC$, 作射线 CB 交射线 AM 于点 Q , 记点 C 关于直线 MN 的对称点为 P 点, 连结 PC 、 PB , 记 $\angle BAC=\alpha$, $\angle NAC=\beta$, 其中 $0^\circ < \beta < 180^\circ$.

(1) 请补全图1;

(2) 证明当 $\alpha=60^\circ$ 且 $\beta=75^\circ$ 时, $PC=PB$;

(3) 若有 $PC=PB$, 求此时 β 与 α 之间的数量关系.

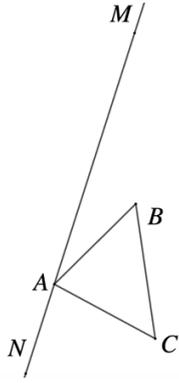
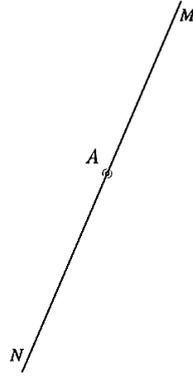
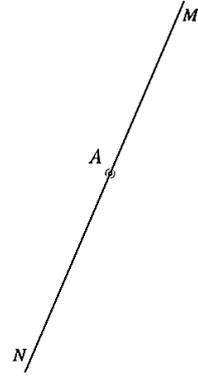


图 1



备用图 1



备用图 2

26.在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(a, b)$ 为图形 G 上一点, 当 $|a| > |b|$ 时, 将点 P 关于一、三象限角平分线对称, 称为变换 1; 当 $|a| \leq |b|$ 时, 将点 P 关于 $y=a$ 对称, 称为变换 2.

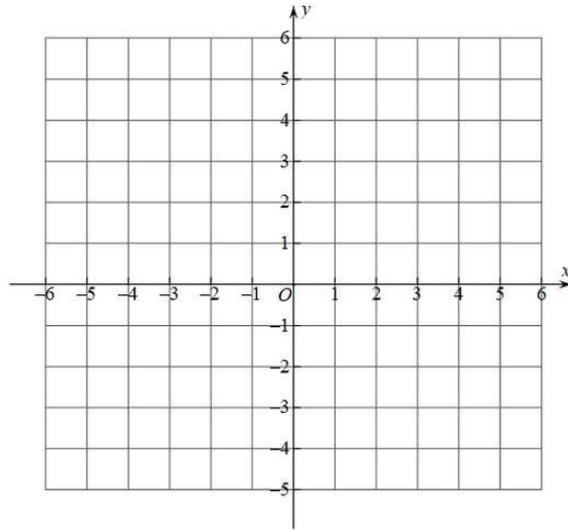
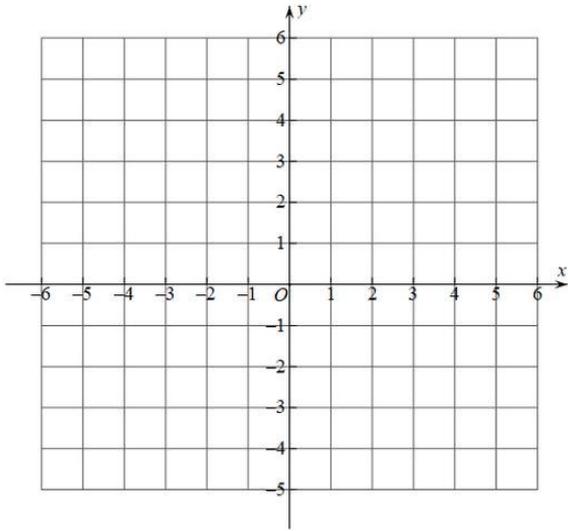
(1) ①已知点 A 坐标为 $(2, 1)$, 则点 A 作相应变换后的点的坐标为_____;

②若点 A 作相应变换后的点坐标为 $(-1, 2)$, 求点 A 的坐标;

(2) 已知 $B(m, 1), C(m, 3)$,

①若线段 BC 上的点通过变换 2 所得图形在 x 轴下方, 则 m 的取值范围是_____;

②已知边长为 8 的正方形中心为点 O , 且各边与坐标轴平行, 若正方形内部 (含边) 同时存在线段 BC 的两种变换点, 则 m 的取值范围是_____.



备用图



参考答案

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	B	B	D	A	B	D	C	D

二、填空题（本题共 18分，每小题 3分）

11. 答案不唯一 12.4×10^4 13.八 14.3 15.84

16. $\sqrt{5}$

三、解答题（本题共52分，第17(1)题3分，17(2)题4分，第18-20题，每题4分，第21-23题，每题5分，第24-26题，每题6分）

17. (1) $(2x)^3 \cdot (-5xy^2)$

$= 8x^3 \cdot (-5xy^2)$ -----2分

$= 40x^4y^2$ -----3分

(2) $(x-2y)(x+y)$

$= x^2 + xy - 2yx - 2y^2$ -----2分

$= x^2 - xy - 2y^2$ ----4分

18.证明: $\because BF=EC, \therefore BF+FC=EC+FC,$

$\therefore BC=EF,$ -----1分

$\because AB \parallel DE,$

$\therefore \angle B = \angle E,$ -----2分

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AB=DE \\ \angle B=\angle E, \\ BC=EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (SAS).$ -----4分

19. 原式 $= 3x^2 - x + 6x - 2 - 2x^2 - 4x$ ----2分

$= x^2 + x - 2$ ----3分

又 $\because x^2 + x = 4 \therefore$ 原式 $= 4 - 2 = 2$ ----4分

20.解: 连接 $DE.$ -----1分

$\because A, B$ 分别为 CD, CE 的中点,

$AE \perp CD$ 于点 $A, BD \perp CE$ 于点 $B,$



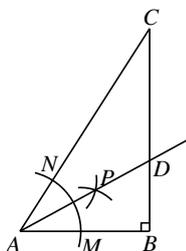
$\therefore CD=CE=DE,$

$\therefore \triangle CDE$ 为等边三角形. -----3分

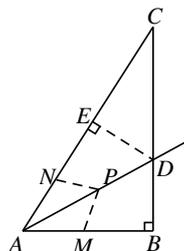
$\therefore \angle C=60^\circ .$

$\therefore \angle AEC=90^\circ - \frac{1}{2} \angle C=30^\circ .$ -----4分

21. (1) 补全图形;



.....2分



(2) 证明: 过点 D 做 $DE \perp AC$ 于点 E , 连接 MP, NP .

在 $\triangle AMP$ 与 $\triangle ANP$ 中,

$\because AM = AN, MP = NP,$

$AP = AP,$

$\therefore \triangle AMP \cong \triangle ANP$ (SSS).

$\therefore \angle PAM = \angle PAN .$ 4分

$\because \angle ABC = 90^\circ ,$

$\therefore DB \perp AB .$

又 $\because DE \perp AC ,$

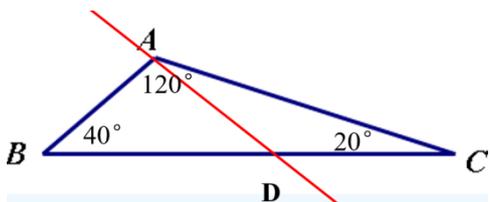
$\therefore DB = DE$ (角的平分线上的点到角的两边的距离相等) . 5分

22. (1) 图1分

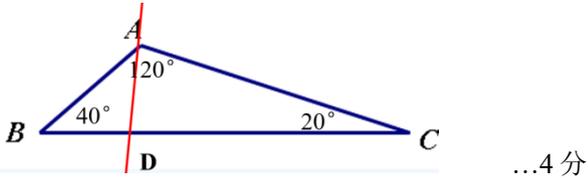
(2) 说明为何 E 为(0,3) ...2分 $S_{\triangle ABE}$ 的面积=8 ...3分

(3) (-1, 5) 和 (-1, -3). ...5分

23. (1)



...2分



...4分

(2) 开放性问题, 提出问题给分 ...5分

24. (1) 4, 3; ...2分

(3) ± 5 ; ...4分

(3) 80...6分

25.解: (1) 补全图形略

.....1分

(2) 连结 AP

\because 点 C 和点 P 关于直线 MN 对称

$\therefore MN \perp PC, AP = AC$

$\because \angle PAN = \angle CAN = 75^\circ$

$\therefore \angle PAC = 150^\circ$

$\because \angle BAC = 60^\circ$

$\therefore \angle PAB = 360^\circ - \angle PAC - \angle CAB = 150^\circ$

在 $\triangle PAC$ 与 $\triangle PAB$ 中

$$\begin{cases} AC = AB \\ \angle PAC = \angle PAB = 150^\circ, \\ AP = AP \end{cases}$$

$\therefore \triangle PAC \cong \triangle PAB$ (SAS)

$\therefore PC = PB$

.....3分

注: 直接认为 $\beta = 75^\circ$, 所以 $PC = PB$ 不得分

(3) ①当 B、C 位于直线 MN 同侧时, $\alpha + \beta < 180^\circ$

若存在满足条件的 β 时, 有 $PC = PB$

$\because AC = AB$

\therefore 直线 PA 为 BC 的垂直平分线, 设 PA 与 BC 交于点 Q

\therefore 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAQ = \angle BAQ = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \alpha$

\because 点 C 和点 P 关于直线 MN 对称

$\therefore MN \perp PC, AP = AC$

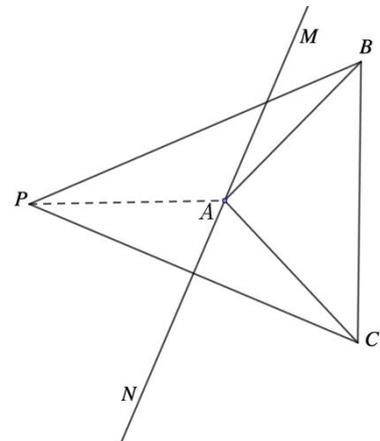
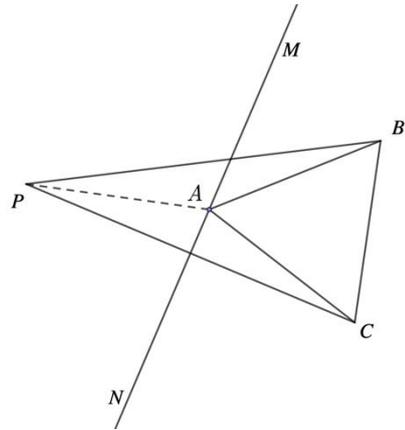
\therefore 在 $\triangle PAC$ 中, $\angle PAC = 2\angle CAM = 2\beta$

$\because \angle PAC + \angle CAQ = 180^\circ$

$\therefore 2\beta + \frac{1}{2}\alpha = 180^\circ$

$\therefore \beta = 90^\circ - \frac{1}{4}\alpha$

$\therefore \alpha + (90^\circ - \frac{1}{4}\alpha) < 180^\circ$





∴解得 $\alpha < 120^\circ$

∴ $\beta = 90^\circ - \frac{1}{4}\alpha (0^\circ < \alpha < 120^\circ)$

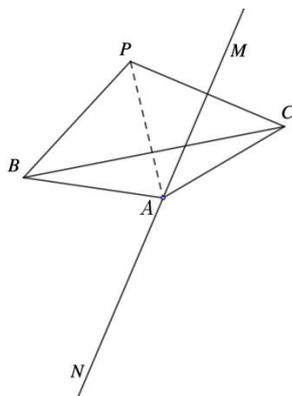
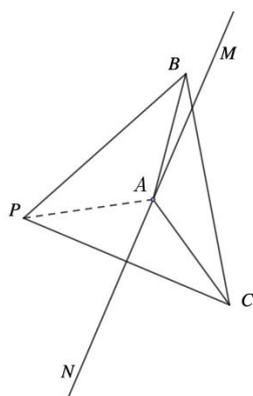
易证当 $\beta = 90^\circ - \frac{1}{4}\alpha (0^\circ < \alpha < 120^\circ)$ 时,

.....4分

②当 $120^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时, 如右图所示有两种情况 (每个1分)

(1) $\beta = 90^\circ - \frac{1}{4}\alpha$;

(2) $\beta = 180^\circ - \frac{1}{4}\alpha$ 6分



说明:

写出一个关系没有分类讨论得 1分

给出分类讨论: 求得一个关系得 2分

给出分类讨论, 求得两个关系, 并明确说明各关系成立的前提得 3分

26. (1) ① (1, 2); ...1分

② (2, -1) 或 (-1, -4); ...3分

(2) ① $-3 \leq m < \frac{1}{2}$; ...4分

② $-\frac{4}{3} \leq m < -1, 1 < m \leq 3$6分