2023 北京通州高一（上）期末

数　学

2023 年 1 月

本试卷共 4 页，150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. $\sin 120°$ 的值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设 $S=\left\{\alpha \mid \alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}, S_1=\left\{\alpha \mid \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}, S_2=\left\{\alpha \mid \alpha=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，则下列结论错误的是（　　）

A. $S_1 \subseteq S$　　B. $S_2 \subseteq S$

C. $S_1 \cup S_2 = S$　　D. $S_1 \cap S_2 = S$

3. 已知角 α 的顶点在原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边在第三象限且与单位圆交于点 $P\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, m\right)$，则 $\sin\alpha=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 下列函数中，是奇函数且在区间 $(0,1)$ 上单调递增的是（　　）

A. $y=\sin x$　　B. $y=\frac{1}{x}$　　C. $y=\cos x$　　D. $y=\ln x$

5. 将函数 $y=\sin x$ 的图像 C 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到曲线 C_1，然后再使曲线 C_1 上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$ 得到曲线 C_2，最后再把曲线 C_2 上各点的纵坐标变为原来的 2 倍得到曲线 C_3，则曲线 C_3 对应的函数是（　　）

A. $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $y=2\sin 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$　　　　D. $y=2\sin3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

6. “$\tan\alpha>0$”是“角 α 是第一象限的角”的（　　）.

A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

7. 函数 $y=\log_{0.5}x$ 与 $y=\log_{2}x$ 的图象（　　）

A. 关于 x 轴对称　　　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于原点对称　　　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

8. 函数 $f\left(x\right)=\ln x+2x-6$ 的零点所在的区间是（　　）

A. $\left(0,1\right)$　　B. $\left(1,2\right)$　　C. $\left(2,3\right)$　　D. $\left(3,4\right)$

9. 已知 $a=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},b=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}},c=\log_{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A. $a<b<c$　　　　B. $b<a<c$

C. $c<b<a$　　　　D. $c<a<b$

10. 中国茶文化博大精深．茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关．经验表明，有一种茶用 85℃的水泡制，再等到茶水温度降至 55℃时饮用，可以产生最佳口感．某研究人员在室温下，每隔 1min 测一次茶水温度，得到数据如下：

放置时间/min	0	1	2	3	4	5
茶水温度/℃	85.00	79 00	73.60	68.74	64.37	60.43

为了描述茶水温度 y℃ 与放置时间 $x$min 的关系，现有以下两种函数模型供选择：

① $y=ka^{x}+25\left(k\in\mathrm{R},0<a<1,x\geq0\right)$，② $y=kx+b\left(k,b\in\mathrm{R},x\geq0\right)$.

选择最符合实际的函数模型，可求得刚泡好的茶水达到最佳口感所需放置时间大约为（　　）

（参考数据：$\lg2\approx0.301$，$\lg3\approx0.477$）

A. 6min　　B. 6.5min　　C. 7min　　D. 7.5min

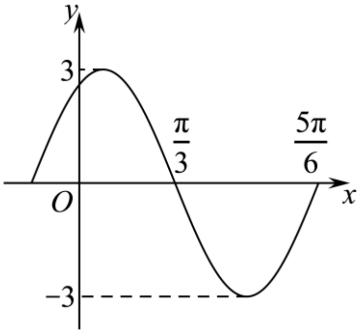
第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题：（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.）

11. 半径为 1，圆心角为 1 弧度的扇形的面积为__________.

12. 计算：$\log_{2}\sin\frac{\pi}{12}+\log_{2}\cos\frac{\pi}{12}=$______.

13. 若函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ $(\omega>0,0\leq\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，则此函数的解析式为__________.



14. 已知 $x^2+y^2=1$，则 $x+y$ 最大值为__________，最小值为__________.

15. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, x\le 0\\ -2+\ln x, x>0\end{cases}$，方程 $f(x)=k$ 有 3 个实数解，则 k 的取值范围为___________.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 85 分.）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$, α 是第四象限角.

（1）求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值；

（2）求 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 值.

17. 已知函数 $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域，最小正周期；

（2）求函数 $f(x)$ 的单调区间.

18. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 最小正周期为 π .

（1）求 ω 的值；

（2）从下面四个条件中选择两个作为已知，求 $f(x)$ 的解析式，并求其在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值和最小值.

条件①：$f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$；

条件②：$f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增；

条件③：$f(x)$ 的图象经过点 $(0,1)$；

条件④：$f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 对称.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答给分.

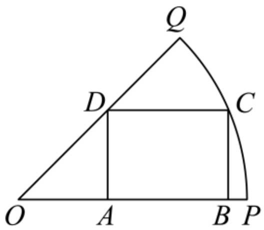
19. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1-\cos 2x\right)+\cos\left(x+\theta\right),\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的定义域；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数，求 θ 的值；

（3）是否存在 θ，使得函数 $f\left(x\right)$ 是奇函数？若存在，求出 θ 的值；若不存在，请说明理由.

20. 某一扇形铁皮，半径长为 1，圆心角为 $\dfrac{\pi}{4}$. 工人师傅想从中剪下一个矩形 $ABCD$，如图所示.



（1）若矩形 $ABCD$ 为正方形，求正方形 $ABCD$ 的面积；

（2）求矩形 $ABCD$ 面积的最大值.

21. 已知函数 $f\left(x\right)=\lg\left(ax+3\right)$　零点是 $x=2$.

（1）求实数 a 的值；

（2）判断函数 $f\left(x\right)$ 的单调性，并说明理由；

（3）设 $k>0$，若不等式 $2f\left(x\right)>\lg\left(kx^2\right)$ 在区间 $\left[-4,-3\right]$ 上有解，求 k 的取值范围.

参考答案

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】B

【解析】

【分析】直接由特殊角的三角函数值得解.

【详解】$\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

故选 B.

【点睛】本题主要考查了特殊角　三角函数值，属于基础题.

2. 【答案】D

【解析】

【分析】根据集合中角的特征分析集合间的关系即可得解.

【详解】因为$S=\left\{\alpha \middle|\ \alpha = k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$表示终边落在$y$轴上角的集合，

$S_1=\left\{\alpha \middle|\ \alpha = 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$表示终边落在$y$轴正半轴上角的集合，

$S_2=\left\{\alpha \middle|\ \alpha = 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$表示终边落在$y$轴负半轴上角的集合，

所以$S_1 \subseteq S$， $S_2 \subseteq S$， $S_1 \cup S_2 = S$ 正确；$S_1 \cap S_2 = \varnothing \neq S$， 故错误.

故选：D

3. 【答案】C

【解析】

【分析】因为点$P\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, m\right)$在单位圆上，且终边在第三象限确定$m$唯一，根据三角函数求解.

【详解】$\because P\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, m\right)$在单位圆上即$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+m^2=1 \therefore m^2=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5} \therefore m=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

终边在第三象限所以$m<0$， $m=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， 所以$P\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

所以$\sin\alpha = m = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

故选：C

4. 【答案】A

【解析】

【分析】

根据解析式可直接判断出奇偶性和单调性.

【详解】对于 A，$y=\sin x$ 为奇函数且在 $\left(0,1\right)\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，故 A 正确；

对于 B，$y=\frac{1}{x}$ 是奇函数在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，故 B 错误；

对于 C，$y=\cos x$ 是偶函数，故 C 错误；

对于 D，$y=\ln x$ 是非奇非偶函数，故 D 错误.

故选：A.

5. 【答案】C

【解析】

【分析】利用图像变换方式计算即可.

【详解】由题得 C_1：$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 C_2：$y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$，得到 C_3：$y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

故选：C

6. 【答案】B

【解析】

【详解】若“角 α 是第一象限角”，则“$\tan\alpha>0$”，“若 $\tan\alpha>0$”，则“角 α 是第一象限角或第三象限角”，所以“$\tan\alpha>0$”是“角 α 是第一象限角”的必要不充分条件．故选 B .

点睛：充分、必要条件的三种判断方法.

1．定义法：直接判断“若 p 则 q”、“若 q 则 p”的真假．并注意和图示相结合，例如“$p\Rightarrow q$”为真，则 p 是 q 的充分条件.

2．等价法：利用 $p\Rightarrow q$ 与非 $q\Rightarrow$ 非 p，$q\Rightarrow p$ 与非 $p\Rightarrow$ 非 q，$p\Leftrightarrow q$ 与非 $q\Leftrightarrow$ 非 p 的等价关系，对于条件或结论是否定式的命题，一般运用等价法.

3．集合法：若 A $\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件；若 A ＝ B，则 A 是 B 的充要条件.

7. 【答案】A

【解析】

【分析】根据对数知识将 $y=\log_{0.5}x$ 化为 $y=-\log_2 x$，由此可得答案.

【详解】由 $y=\log_{0.5}x$ 得 $y=\log_{2^{-1}}x=-\log_2 x$，

所以函数 $y=\log_{0.5}x$ 与 $y=\log_2 x$ 的图象关于 x 轴对称.

故选：A

8. 【答案】C

【解析】

【分析】先判断函数单调性，再根据零点存在定理将端点值代入，即可判断零点所在区间.

【详解】由于 $y=\ln x, y=2x-6$ 均为增函数，

所以 $f(x)=\ln x+2x-6$ 为定义域上的增函数，

$\because f(1)=-4<0, f(2)=\ln 2-2<0, f(3)=\ln 3>0, f(4)=\ln 4+2>0$，

根据零点存在定理，

$\therefore f\ \ x$ 零点在区间 $(2,3)$ 内.

故选：C

9. 【答案】D

【解析】

【分析】构造指数函数，结合单调性分析即可.

【详解】$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在 R 上单调递减，$\because 0<\frac{3}{2}, \therefore a=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}<\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$，

$\therefore 0<a<1$；

$y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ 在 R 上单调递增，$\because 0<\frac{2}{3}, \therefore b=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{3}{2}\right)^0=1$，

$\therefore b>1$；

$c=\log_{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}=-\log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}=-1$

$\therefore c<a<b$

故选：D

10. 【答案】B

【解析】

【分析】根据每分钟茶水温度的减少值呈现越来越小的变化趋势，可判定应当选择模型①为更符合实际的模型.利用前两组数据可以求得 k 和 a 的值，进而将最佳口感温度代入所求得解析式，利用对数的运算性质求得 x 的值，即可做出判断.

【详解】由表格中数据可得，每分钟茶水温度的减少值依次为 6, 5. 4, 4. 86, 4. 37, 3. 94,

呈现越来越小的变化趋势，

故选用模型①为更符合实际的模型.

由 $x=0$ 时，$y=85.00$，代入 $y=ka^x+25$，得 $85=k+25$,解得 $k=60$.

$\therefore y=60a^x+25$.

由 $x=1$ 时 $y=79.00$,可得 $79=60a+25$，解得 $a=\frac{9}{10}$,

$\therefore y=60\left(\frac{9}{10}\right)^{x}+25$,

由 $55=60\left(\frac{9}{10}\right)^{x}+25$,得 $\frac{1}{2}=\left(\frac{9}{10}\right)^{x}$,$\therefore \lg\frac{1}{2}=\lg\left(\frac{9}{10}\right)^{x}=x\lg\frac{9}{10}$,

$$x=\frac{\lg\frac{1}{2}}{\lg\frac{9}{10}}=\frac{-\lg 2}{2\lg 3-1}=\frac{\lg 2}{1-2\lg 3}\approx\frac{0.301}{1-2\times 0.477}\approx 6.5,$$

刚泡好的茶水达到最佳口感所需放置时间大约为 6.5min,

故选:B.

第二部分(非选择题共 110 分)

二、填空题:(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.)

11. 【答案】$\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】根据扇形面积公式即可得到答案.

【详解】半径为 1,圆心角为 1 弧度　扇形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\alpha r^{2}=\frac{1}{2}\times 1\times 1^{2}=\frac{1}{2}.$$

故答案为:$\frac{1}{2}$.

12. 【答案】-2

【解析】

【分析】根据给定条件利用对数运算法则,二倍角的正弦公式、特殊角的三角函数值计算作答.

【详解】$\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\cos\frac{\pi}{12}=\log_2(\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12})=\log_2(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6})=\log_2 2^{-2}=-2$.

故答案为:-2

13. 【答案】$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

【解析】

【分析】根据图象,可得 $A=\frac{3-(-3)}{2}=3$,$T=\pi$,图象过点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$,且在 $x=\frac{\pi}{3}$ 附近单调递减.进而可求出 $\omega=2$,$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,根据 φ 的范围即可解出 φ,进而得到解析式.

【详解】由已知可得,函数最大值为 3,最小值为-3,所以 $A=\frac{3-(-3)}{2}=3$.

又由图象知，$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，所以$T=\pi$.

因为$\omega>0$，所以$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$，所以$y=3\sin(2x+\varphi)$.

又由图象可推得，图象过点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，且在$x=\frac{\pi}{3}$附近单调递减，

所以有$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.

又$0\le\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以，函数的解析式为$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

故答案为：$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

14. 【答案】 ①. $\sqrt{2}$ ②. $-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】由$x^2+y^2\ge 2xy$可推出$(x+y)^2\le 2$，即得$-\sqrt{2}\le x+y\le\sqrt{2}$，即可得到最值.

【详解】因为$x^2+y^2\ge 2xy$成立，当且仅当$x=y$时，等号成立.

所以$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\le 2(x^2+y^2)=2$，

即$(x+y)^2\le 2$，解得$-\sqrt{2}\le x+y\le\sqrt{2}$.

所以，当且仅当$x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$x+y$有最大值$\sqrt{2}$；当且仅当$x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$x+y$有最小值$-\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$；$-\sqrt{2}$.

15. 【答案】$(-4,-3]$

【解析】

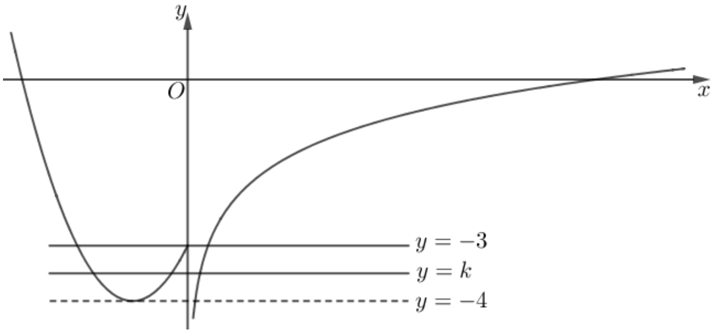
【分析】根据给定条件将方程$f(x)=k$的实数解问题转化为函数$y=f(x)$的图象与直线$y=k$的交点问题，再利用数形结合思想即可作答.

【详解】方程$f(x)=k$有3个实数解，等价于函数$y=f(x)$的图象与直线$y=k$有3个公共点，

因当$x\le 0$时，$f(x)$在$(-\infty,-1]$上单调递减，在$[-1,0]$上单调递增，$f(-1)=-4, f(0)=-3$，

当$x>0$时，$f(x)$单调递增，$f(x)$取一切实数，

在同一坐标系内作出函数$y=f(x)$的图象及直线$y=k$，如图：



由图象可知，当$-4<k\le -3$时，函数$y=f(x)$的图象及直线$y=k$有3个公共点，方程$f(x)=k$有3个解，

所以k的取值范围为$(-4,-3]$.

故答案为：$(-4,-3]$

三、解答题：（本大题共6小题，共85分.）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) $\frac{7}{5}$；

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$， $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{7}$

【解析】

【分析】(1) 根据同角三角函数的基本关系列方程组求解$\sin\alpha,\cos\alpha$即可；

(2) 由两角和的余弦、正切公式化简求解即可.

【小问1详解】

因为$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$，$\alpha$是第四象限角，

所以解得$\sin\alpha=-\frac{3}{5},\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

所以$\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5}$.

【小问2详解】

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10};$$

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{-\frac{3}{4}+1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{7}.$$

17. 【答案】(1) 定义域：$\{x\,|\,x\ne 2k+\frac{1}{3},k\in Z\}$，最小正周期：$T$=2 (2) 单调递增区间是：

$(-\frac{5}{3}+2k,\frac{1}{3}+2k),k\in Z.$

【解析】

【分析】（1）根据正切函数的定义域满足：$\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 即可求解，周期 $T=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$.

（2）根据正切函数的图像以及性质整体代入求解即可.

【详解】函数 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$,

（1）正切函数的定义域满足：$\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$,

解得：$x\neq 2k+\frac{1}{3},k\in Z$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 2k+\frac{1}{3},k\in Z\}$，

最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$.

故函数的最小正周期为 2

（2）由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in Z\right)$,

可得：$-\frac{5}{3}+2k<x<\frac{1}{3}+2k\left(k\in Z\right)$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调增区间 $(-\frac{5}{3}+2k,\frac{1}{3}+2k),k\in Z.$

【点睛】本题考查了正切函数的定义域、最小正周期以及正切型函数的单调性，考查了整体代入法求三角函数的性质，属于基础题.

18. 【答案】（1）$\omega=2$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）由周期可得 ω；

（2）由①中确定 A，由③得出 A,φ 的关系式，由④可确定 φ，条件②不能得出确定的值，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，没有说 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 就是单调增区间，由它可能确定参数的范围．因此考虑方案：①③；①④；③④分别求解.

【小问 1 详解】

因为$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$.

【小问 2 详解】

（2）方案一：

选择①，③

因为$f\left(x\right)$的值域是$[-2,2]$，

所以$A=2$.

所以$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\varphi\right)$.

因为$f\left(x\right)$的图象经过点$\left(0,1\right)$，

所以$2\sin\varphi=1$，

即$\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$.

又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

所以$f\left(x\right)$的解析式为$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

因为$x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$，

所以$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

当$2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}$，

即$x=-\dfrac{\pi}{4}$时，

$f\left(x\right)$取得最小值$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$；

当$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$x=\dfrac{\pi}{6}$时，

$f\left(x\right)$取得最大值$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{2}=2$.

方案二：

选择条件①，④

因为$f\left(x\right)$的值域是$[-2,2]$，

所以$A=2$.

所以$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\varphi\right)$.

因为 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 对称，

所以 $2\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

所以 $\varphi=k\pi+\dfrac{7\pi}{6}$.

又 $\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

所以 $f\left(x\right)$　解析式为 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

以下同方案一.

方案三：

选择条件③，④

因为 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 对称，

所以 $2\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

所以 $\varphi=k\pi+\dfrac{7\pi}{6}$.

又 $\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

因为 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(0,1\right)$，

所以 $A\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，

即 $A=2$.

所以 $f\left(x\right)$ 的解析式为 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

以下同方案一.

19. 【答案】（1）$\{x|x\neq k\pi,k\in\mathrm{Z}\}$；

（2）$\theta=0$；

（3）不存在，理由见解析.

【解析】

【分析】（1）根据解析式建立不等式求三角不等式的解即可；

（2）根据偶函数的定义，化简后利用三角函数 $2\sin x\sin\theta=0$ 恒成立即可得解；

（3）根据奇函数的定义化简，转化为$\ln(1-\cos 2x)+\cos x\cos\theta=0$恒成立，可分析此式不恒成立得解.

【小问 1 详解】

$f\left(x\right)=\ln\left(1-\cos2x\right)+\cos\left(x+\theta\right),\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$要有意义，

则$1-\cos 2x>0$，即$\cos 2x\neq 1$，解得$2x\neq 2k\pi$，即$x\neq k\pi,k\in \mathrm{Z}$，

所以函数的定义域为$\{x|x\neq k\pi,k\in \mathrm{Z}\}$.

【小问 2 详解】

因为$f\left(x\right)=\ln\left(1-\cos2x\right)+\cos\left(x+\theta\right)$为偶函数，

则$f(-x)=\ln(1-\cos(-2x))+\cos(-x+\theta)=\ln(1-\cos 2x)+\cos(-x+\theta)=f(x)$

即$\cos(-x+\theta)=\cos(x+\theta)$恒成立，化简可得$2\sin x\sin\theta=0$恒成立，

所以$\sin\theta=0$，

因为$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\theta=0$.

【小问 3 详解】

若函数$f\left(x\right)=\ln\left(1-\cos2x\right)+\cos\left(x+\theta\right)$为奇函数，

则有$f(-x)+f(x)=0$，

即$\ln(1-\cos 2x)+\cos(x+\theta)+\ln(1-\cos 2x)+\cos(-x+\theta)=0$，

即$2\ln(1-\cos 2x)+\cos x\cos\theta-\sin x\sin\theta+\cos x\cos\theta+\sin x\sin\theta=0$，

化简得，$\ln(1-\cos 2x)+\cos x\cos\theta=0$恒成立.

因为当$\dfrac{\pi}{4}\leq x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\pi}{2}\leq 2x<\pi$，$-1<\cos 2x\leq 0$，$1\leq 1-\cos 2x<2$，

$\ln(1-\cos 2x)\geq 0$，而$\cos x\cos\theta>0$，

所以$\ln(1-\cos 2x)+\cos x\cos\theta=0$不恒成立，

即$f(-x)=-f(x)$不恒成立，

所以不存在θ，使函数$f\left(x\right)$是奇函数.

20.【答案】（1）$\dfrac{1}{5}$

（2）$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

【解析】

【分析】（1）连OC，则$OC=1$，设$\angle COP=\theta$，则$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，$BC=\sin\theta$，$AB=\cos\theta-\sin\theta$，根据$AB=BC$求出$\sin^2\theta=\dfrac{1}{5}$，进而可得答案；

（2）设矩形 $ABCD$ 面积为S，则 $S=AB\cdot BC=(\cos\theta-\sin\theta)\cdot\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$，利用正弦函数的性质可得答案.

【小问 1 详解】

连 OC，因为扇形半径长为 1，则 $OC=1$，

设 $\angle COP=\theta$，则 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，

$\therefore OB=OC\cos\theta=\cos\theta$， $BC=OC\sin\theta=\sin\theta$，

$\because AD=BC=\sin\theta$，$\because \angle QOP=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore OA=AD=\sin\theta$，$\therefore AB=OB-OA=\cos\theta-\sin\theta$

$\because$矩形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AB=BC$，

即 $\cos\theta-\sin\theta=\sin\theta$，$\therefore 2\sin\theta=\cos\theta$，

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\therefore \sin^2\theta+4\sin^2\theta=1$，$\therefore \sin^2\theta=\frac{1}{5}$，

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{4},\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$正方形 $ABCD$ 的面积为 $AB\cdot BC=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{5}$；

【小问 2 详解】

设矩形 $ABCD$ 面积为S，则 $S=AB\cdot BC=(\cos\theta-\sin\theta)\cdot\sin\theta$

$=\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}$

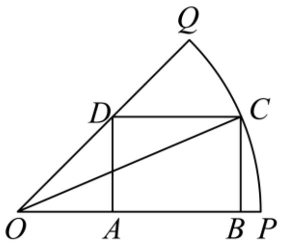
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\theta\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin 2\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$，

$\therefore$当 $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{8}$ 时，$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$，

此时，S 最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，

即矩形 $ABCD$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.



21. 【答案】（1） $a=-1$

（2） $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上是单调递减函数，理由见解析

（3） $0<k<4$

【解析】

【分析】（1）根据 $f(2)=0$ 可求出结果；

（2）根据对数函数的单调性和单调性的定义可得结果；

（3）转化为 $k<\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{6}{x}+1$ 在区间 $[-4,-3]$ 上有解，换元后化为 $k<9t^2-6t+1$ 在区间 $\left[-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4}\right]$ 上有解，

令 $g(t)=9t^2-6t+1$， $-\dfrac{1}{3}\le t\le -\dfrac{1}{4}$，化为 $k<g(t)_{\max}$，根据二次函数知识求出 $g(t)$ 的最大值可得答案.

【小问 1 详解】

因为函数 $f\left(x\right)=\lg\left(ax+3\right)$ 的零点是 $x=2$，

所以 $f(2)=0$，即 $\lg(2a+3)=0$，所以 $2a+3=1$，解得 $a=-1$.

【小问 2 详解】

由（1）知， $f(x)=\lg(-x+3)$， $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上是单调递减函数，

理由如下：

设 $x_1<x_2<3$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\lg(-x_1+3)-\lg(-x_2+3)$，

因为 $x_1<x_2<3$，所以 $-x_1+3>-x_2+3>0$，

因为 $y=\lg x$ 为增函数，

所以 $\lg(-x_1+3)>\lg(-x_2+3)$，

所以 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上是单调递减函数.

【小问 3 详解】

因为不等式 $2f\left(x\right)>\lg\left(kx^2\right)$ 在区间 $[-4,-3]$ 上有解，

所以 $2\lg(-x+3)>\lg(kx^2)$ 在区间 $[-4,-3]$ 上有解，

所以 $\lg(-x+3)^2>\lg(kx^2)$ 在区间 $[-4,-3]$ 上有解，

因为 $y=\lg x$ 为增函数，

所以$(-x+3)^2>kx^2(k>0)$在区间$[-4,-3]$上有解，

所以$k<\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{6}{x}+1$在区间$[-4,-3]$上有解，

令$t=\dfrac{1}{x}$，因为$-4\le x\le -3$，所以$-\dfrac{1}{3}\le t\le -\dfrac{1}{4}$，

所以$k<9t^2-6t+1$在区间$\left[-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4}\right]$上有解，

令$g(t)=9t^2-6t+1$，$-\dfrac{1}{3}\le t\le -\dfrac{1}{4}$，则$k<g(t)_{\max}$，

因为$g(t)=9t^2-6t+1=9(t-\dfrac{1}{3})^2$在$\left[-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4}\right]$上单调递减，

所以当$t=-\dfrac{1}{3}$时，$g(t)_{\max}=g(-\dfrac{1}{3})=4$.

所以$0<k<4$.