2022北京平谷中学初二（下）期中

数　学

一、选择题（共10小题，满分30分）

1. 下列是最简二次根式的为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3a^3}$（$a>0$）　　C. $\sqrt{8}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{3}}$

2. 下列运算正确　是(　)

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　B. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3$

C. $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{6}\div 2=\sqrt{3}$

3. 已知▱$ABCD$的周长为24，AB＝4，则BC的长为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

4. 若四边形两条对角线相等，则顺次连接其各边中点得到的四边形是（　　）

A. 菱形　　B. 矩形　　C. 梯形　　D. 正方形

5. $\sqrt{(-3)^2}$的化简结果为（　　）

A. 3　　B. ﹣3　　C. ±3　　D. 9

6. 下列命题中，正确　个数是（　　）

①若三条线段的比为1：1：$\sqrt{2}$，则它们组成一个等腰三角形；

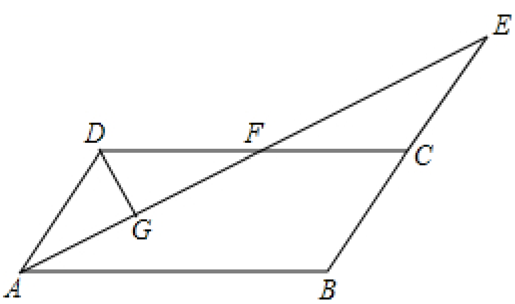
②两条对角线相等的平行四边形是矩形；

③对角线互相平分且相等的四边形是矩形；

④两个邻角相等的平行四边形是矩形.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7. 如图，在平行四边形$ABCD$中，AB=4，$\angle BAD$的平分线与BC的延长线交于点E，与DC交于点F，且点F为边DC的中点，$DG\perp AE$，垂足为G，若DG=1，则AE的边长为（　）



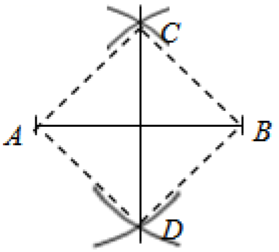
A. $2\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 8

8. 若菱形的两条对角线长分别是6和8，则它的周长为（　　）

A. 20　　B. 24　　C. 40　　D. 48

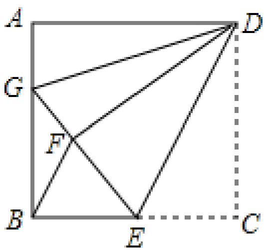
9. 如图，小聪在作线段AB的垂直平分线时，他是这样操作的：分别以A和B为圆心，大于$\frac{1}{2}AB$的长为

半径画弧，两弧相交于 C、D，则直线 CD 即为所求．根据他的作图方法可知四边形 $ADBC$ 一定是（　）



A. 矩形　　　　B. 菱形　　　　C. 正方形　　　　D. 等腰梯形

10. 如图，正方形 $ABCD$ 中，$AB=12$，点 E 在边 BC 上，$BE=EC$，将△DCE 沿 DE 对折至△DFE，延长 EF 交边 AB 于点 G，连接 DG、BF，给出以下结论：①△DAG≌△DFG；②$BG=2AG$；③$S_{\triangle DGF}=48$；④$S_{\triangle BEF}=\frac{72}{5}$．其中所有正确结论的个数是（　　）



A　4　　　　B. 3　　　　C. 2　　　　D. 1

二、填空题（每小题 3 分，总共 18 分）

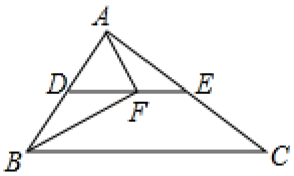
11. 式子 $\sqrt{3+x}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是________.

12. 甲、乙两个样本，甲　方差为 0.102，乙的方差为 0.06，哪个样本的数据波动大？答：________.

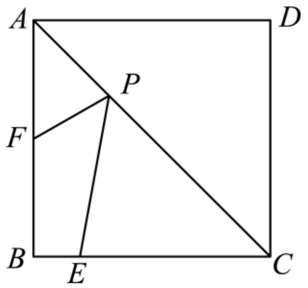
13. 在四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，$AB=AD$，要使四边形 $ABCD$　菱形，只需添加一个条件，这个条件可以是_____（只要填写一种情况）.

14. 计算：$\sqrt{24}\times\sqrt{\frac{1}{3}}-4\times\sqrt{\frac{1}{8}}=$_____.

15. 如图所示，DE 为△ABC 的中位线，点 F 在 DE 上，且∠$AFB=90°$，若 $AB=6$，$BC=10$，则 EF 的长为_____.



16. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 为 BC 上的一点，BE=1，F 为 AB 上的一点，AF=2，P 为 AC 上的一个动点，则 $PF+PE$ 的最小值为______________



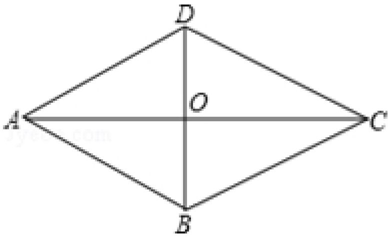
三、解答题（共72分）

17. （1）$2\sqrt{12}+\sqrt{27}-3\sqrt{48}$；

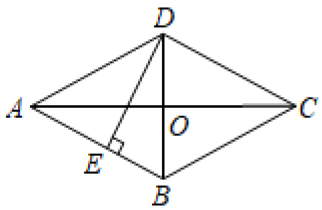
（2）$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$．

18. 已知$\boldsymbol{a}=\sqrt{\boldsymbol{3}}-\boldsymbol{2}$，$b=2+\sqrt{3}$，求$a^2b+ab^2$的值．

19. 如图，四边形*ABCD*是菱形，对角线*AC*与*BD*相交于*O*，*AB*=5，*AO*=4，求*BD*的长．



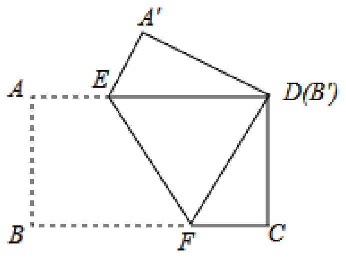
20. 如图：四边形*ABCD*是菱形，对角线*AC*与*BD*相交于*O*，菱形*ABCD*的周长是20，$BD=6$．



（1）求*AC*的长；

（2）求菱形*ABCD* 的高*DE*的长．

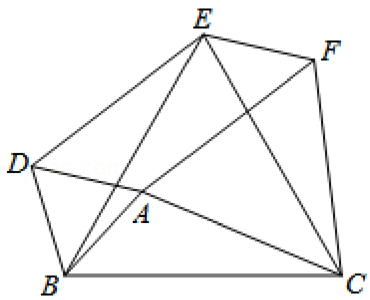
21. 把一张长方形纸片*ABCD*按如图方式折叠，使顶点*B*和点*D*重合，折痕为*EF*．若$AB=4$，$BC=8$，



（1）求*DF*的长；

（2）求重叠部分的面积．

22. 如图，已知以△*ABC*的三边为边，在*BC*的同侧分别作等边三角形*ABD*、*BCE*和*ACF*．



（1）求证：四边形 $ADEF$ 是平行四边形；

（2）$\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $ADEF$ 是菱形？是矩形？并说明理由；

（3）这样的平行四边形 $ADEF$ 是否总是存在？请说明理由．

23. 如图，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 C、A 分别在 x 轴和 y 轴的正半轴上，点 $B(a，b)$ 在第一象限，且 a、b 满足 $a^2+2b^2-2ab-12b+36=0$，AP 平分 $\angle CAB$ 交 OB 于 P，

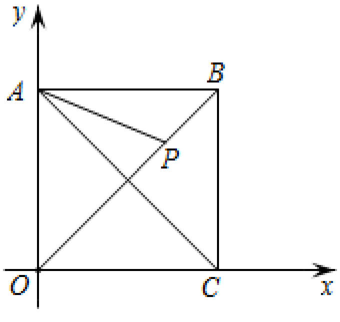


图1

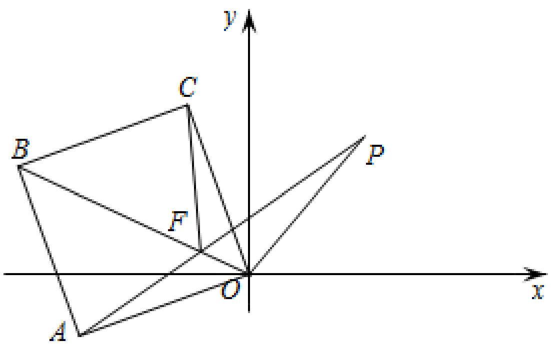


图2

（1）求点 B 的坐标；

（2）求 $\angle OPA$ 的度数及 OP 的长；

（3）点 P 不动，将正方形 $OABC$ 绕点 O 逆时针旋转至图 2 的位置，$\angle COP=60°$，AP 交 OB 于点 F，连接 CF，求证：$OF+CF=PF$

参考答案

一、选择题（共 10 小题，满分 30 分）

1. 【答案】A

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义可直接进行求解.

【详解】解：A. $\sqrt{3}$　最简二次根式，故 A 符合题意；

B. $\sqrt{3a^3}=a\sqrt{3a}$，不是最简二次根式，故 B 不符合题意；

C. $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，不是最简二次根式，故 C 不符合题意；

D. $\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，不是最简二次根式，故 D 不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题主要考查最简二次根式，熟练掌握最简二次根式满足的条件：一是被开方数不能含有开得尽方的因数或因式，二是被开方数不能含有分母.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】根据合并同类二次根式的法则和二次根式的乘法、除法法则即可的出答案.

【详解】解：A 选项中，$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，不能合并，故 A 选项不正确，不符合题意；

B 选项中，$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，故 B 选项不正确，不符合题意；

C 选项中，$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times 2}=\sqrt{6}$，故 C 选项正确，符合题意；

D 选项中，$\sqrt{6}\div 2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故 D 选项不正确，不符合题意；

故选 C.

【点睛】本题考查合并同类二次根式、二次根式的乘法、二次根式的除法，熟练掌握相应运算法则是解题的关键.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质得 $AB=CD$，$AD=BC$，根据 2（$AB+BC$）=24 即可求解.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形

∴$AB=CD$，$AD=BC$

∵平行四边形 $ABCD$ 的周长是 24

∴2（$AB+BC$）=24

∴$BC=8$

故正确答案为：B

【点睛】此题主要考查平行四边形的性质，利用平行四边形的两组对边分别相等是解题的关键.

4. 【答案】A

【解析】

【分析】根据顺次连接四边形各边中点，所得的图形是平行四边形；顺次连接对角线相等的四边形的各边中点，所得的图形是菱形；顺次连接对角线互相垂直的四边形的各边中点，所得的图形是矩形；顺次连接对角线互相垂直且相等的四边形的各边中点，所得的图形是正方形；即可选出答案.

【详解】解：如图，$AC=BD$，E、F、G、H分别是线段AB、BC、CD、AD的中点，

则EH、FG分别是$\triangle ABD$、$\triangle BCD$的中位线，EF、HG分别是$\triangle ACD$、$\triangle ABC$的中位线，

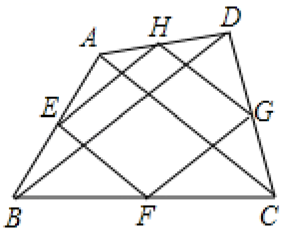
根据三角形的中位线的性质知，$EH=FG=\dfrac{1}{2}BD$，$EF=HG=\dfrac{1}{2}AC$，

$\because AC=BD$，

$\therefore EH=FG=FG=EF$，

$\therefore$四边形$EFGH$是菱形.

故选：A.



【点睛】本题主要考查中点四边形、三角形中位线定理、菱形的判定，牢记中点四边形的结论，会应用三角形中位线定理对中点四边形进行推导是解题的关键.

5. 【答案】A

【解析】

【分析】根据二次根式性质$\sqrt{a^2}=|a|$直接求解即可.

【详解】解：$\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$，

故选：A .

【点睛】本题主要考查二次根式的性质化简，涉及到绝对值运算，熟练掌握相关性质及运算法则是解决问题的关键.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】利用等腰三角形的判定及矩形的判定方法分别判断后即可确定答案.

【详解】解：①根据三条线段的比为1：1：$\sqrt{2}$，则可得到该三角形的两边相等，所以它们组成一个等腰三角形，正确；

②两条对角线相等的平行四边形是矩形，正确；

③对角线互相平分且相等的四边形是矩形，正确；

④两个邻角相等的平行四边形是矩形，正确，

故选：D.

【点睛】本题考查了等腰三角形的判定及矩形的判定方法，属于基础题，比较简单.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】由 AE 为角平分线，得到 $\angle DAE=\angle BAE$，由 $ABCD$ 为平行四边形，得到 $DC//AB$，推出 $AD=DF$，由 F 为 DC 中点，$AB=CD$，求出 AD 与 DF 的长，利用勾股定理求出 AG 的长，进而求出 AF 的长，再由 $\triangle ADF\cong\triangle ECF$（$AAS$），得出 $AF=EF$，即可求出 AE 的长.

【详解】解：$\because AE$ 为 $\angle DAB$ 的平分线，

$\therefore \angle DAE=\angle BAE$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore DC//AB$，

$\therefore \angle BAE=\angle DFA$，

$\therefore \angle DAE=\angle DFA$，

$\therefore \angle DAE=\angle DFA$，

$\therefore AD=FD$，

又 F 为 DC 的中点，

$\therefore DF=CF$，

$\therefore AD=DF=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}AB=2$，

在 $Rt\triangle ADG$ 中，$DG=1$，

$\therefore AG=\sqrt{AD^2-DG^2}=\sqrt{3}$，

$\because DG\perp AE$，

$\therefore AF=2AG=2\sqrt{3}$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AD//BC$，

$\therefore \angle DAF=\angle E$，$\angle ADF=\angle ECF$，

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ECF$ 中，$\begin{cases}\angle DAF=\angle E\\ \angle ADF=\angle ECF\\ DF=CF\end{cases}$，

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle ECF$（$AAS$），

$\therefore AF=EF$，

则 $AE=2AF=4\sqrt{3}$.

故选：B.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】根据菱形的对角线互相垂直平分的性质，利用对角线的一半，根据勾股定理求出菱形的边长，再根据菱形的四条边相等求出周长即可．

【详解】解：如图所示，

根据题意得 $AO=\frac{1}{2}\times8=4$，$BO=\frac{1}{2}\times6=3$，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

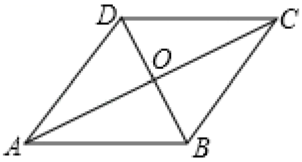
∴$AB=BC=CD=DA$，$AC\perp BD$，

∴$\triangle AOB$ 是直角三角形，

∴$AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{16+9}=5$，

∴此菱形的周长为：$5\times4=20$．

故选 A．



【点睛】本题主要考查了菱形的性质，利用勾股定理求出菱形的边长是解题的关键，同学们也要熟练掌握菱形的性质：①菱形的四条边都相等；②菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角．

9. 【答案】B

【解析】

【详解】解：∵分别以 A 和 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于 C、D，

∴$AC=AD=BD=BC$，

∴四边形 $ADBC$ 一定是菱形，

故选：B．

10. 【答案】B

【解析】

【分析】①根据正方形的性质和折叠的性质可得 $AD=DF$，$\angle A=\angle GFD=90°$，于是根据“HL”判定 $Rt\triangle ADG\cong Rt\triangle FDG$；②再由 $GF+GB=GA+GB=12$，$EB=EF$，$\triangle BGE$ 为直角三角形，可通过勾股定理列方程求出 $AG=4$，$BG=8$，即可判断；③根据①即可求出三角形 DGF 的面积；④结合①可得 $AG=GF$，根据等高的两个三角形的面积的比等于底与底的比即可求出三角形 BEF 的面积．

【详解】解：①∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD=DC$，$\angle C=\angle A=90°$，

由折叠可知，$DF=DC=DA$，$\angle DFE=\angle C=90°$，

∴$\angle DFG=180°-\angle DFE=90°$，

∴$\angle DFG=\angle A=90°$，

在 $Rt\triangle ADG$ 和 $Rt\triangle FDG$ 中，

$$\begin{cases} AD = DF \\ DG = DG \end{cases},$$

∴$Rt\triangle ADG \cong Rt\triangle FDG$（HL），

故①正确；

②∵正方形边长是 12，

∴$BE = EC = EF = 6$，

设 $AG = FG = x$，则 $EG = x+6$，$BG = 12 - x$，

由勾股定理得：$EG^2 = BE^2 + BG^2$，

即：$(x+6)^2 = 6^2 + (12 - x)^2$，

解得：$x = 4$，

∴$AG = GF = 4$，$BG = 8$，$BG = 2AG$，

故②正确；

③∵$Rt\triangle ADG \cong Rt\triangle FDG$，

∴$S_{\triangle DGF} = S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2} \times AG \cdot AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$，

故③错误；

④∵$S_{\triangle GBE} = \frac{1}{2} BE \cdot BG = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$，

∵$GF = AG = 4$，$EF = BE = 6$，

$$\therefore \frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{GF}{EF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} = \frac{3}{5} S_{\triangle GBE} = \frac{3}{5} \times 24 = \frac{72}{5},$$

故④正确．

综上可知正确的结论的是 3 个，

故选：B．

【点睛】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，折叠的性质等知识，灵活运用性质解决问题是本题的关键．

二、填空题（每小题 3 分，总共 18 分）

11. 【答案】$x \geq -3$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件，根号内的式子必需大于等于 0，即可求出答案．

【详解】解：式子 $\sqrt{3+x}$ 在实数范围内有意义，则 $3+x \geq 0$，

解得：$x \geq -3$．

故答案为：$x \geq -3$．

【点睛】本题主要考查了二次根式有意义，熟练其要求是解决本题的关键．

12. 【答案】甲的波动比乙的波动大．

【解析】

【分析】根据方差的定义，方差越小数据越稳定，故可得到正确答案．

【详解】解：根据方差的意义，甲样本的方差大于乙样本的方差，故甲的波动比乙的波动大．

故答案：甲的波动比乙的波动大．

【点睛】本题考查方差的意义．方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定．

13. 【答案】$AB//CD$（本题答案不唯一）

【解析】

【分析】首先根据条件可得∠AOD=∠AOB=90°，再证明Rt△ABO≌Rt△ADO，从而得到BO=DO，再证明△ABO≌Rt△CDO，进而得到AB=CD，再加上条件AB∥CD可得到四边形ABCD是平行四边形，又有AB=AD可证出四边形ABCD是菱形．

【详解】∵AC⊥BD，∴∠AOD=∠AOB=90°，

在Rt△ABO和Rt△ADO中 AO=AO，AB=AD，∴Rt△ABO≌Rt△ADO，∴BO=DO，

∵AB∥CD，∴∠ABO=∠CDO，

在△ABO和Rt△CDO中 ∠AOB=∠DOC，∠CDO=∠ABO，BO=DO，

∴△ABO≌Rt△CDO，∴AB=CD，∴四边形ABCD是平行四边形，

又∵AB=AD，∴四边形ABCD是菱形．

【点睛】此题主要考查了菱形的判定，属于基础题型．解决问题的关键是证明AB=CD，从而得到四边形ABCD是平行四边形．

14. 【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据二次根式的乘法法则和减法法则进行计算即可．

详解】解：$\sqrt{24}\times\sqrt{\frac{1}{3}}-4\times\sqrt{\frac{1}{8}}$

$=\sqrt{24\times\frac{1}{3}}-4\times\sqrt{\frac{1\times2}{8\times2}}$

$=\sqrt{8}-4\times\frac{\sqrt{2}}{4}$

$=2\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}$，

故答案为：$\sqrt{2}$．

【点睛】此题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

15. 【答案】2

【解析】

【分析】由三角形中位线定理可得 DE 的长，再由直角三角形斜边上中线的性质可得 DF 的长，则可得 EF 的长.

【详解】解：∵DE 为△ABC 的中位线，

∴$DE=\frac{1}{2}BC=5$，

∵ $\angle AFB=90°$，D 是 AB　 中点，

∴$DF=\frac{1}{2}AB=3$，

∴$EF=DE-DF=2$.

故答案为：2.

【点睛】本题考查了三角形中位线定理与直角三角形斜边上中线的性质，掌握这两个知识点是本题的关键所在.

16. 【答案】$\sqrt{17}$

【解析】

【分析】作点 F 关于 AC 对称点 F'根据正方形 $ABCD$ 是轴对称图形，AC 是一条对称轴,可得点 F 关于 AC 的对称点在线段 AD 上，连结 EF'，P 为 AC 上的一个动点，$PF=PF'$，则 $PF+PE=PF'+PE\geq EF'$，$PF+PE$ 的最小值为 EF'的长即可.

【详解】解：作点 F 关于 AC 对称点 F'，

∵正方形 $ABCD$ 是轴对称图形，AC 是一条对称轴，

∴点 F 关于 AC 的对称点在线段 AD 上，连结 EF'，

∵P 为 AC 上的一个动点，

∴$PF=PF'$

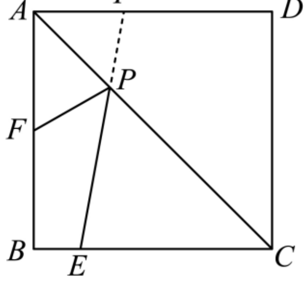
则 $PF+PE=PF'+PE\geq EF'$，

$PF+PE$ 的最小值为 EF'的长，

∵$AB=4$，$AF=2$，

∴$AF'=AF=2$，

∴$EF'=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.



【点睛】本题考查正方形性质，轴对称性质，两点之间线段最短，掌握正方形性质，轴对称性质，两点之间线段最短是解题关键．

三、解答题（共72分）

17. 【答案】（1） $-5\sqrt{3}$；（2） $4-2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】（1）先把二次根式化为最简二次根式，然后合并即可；

（2）利用完全平方公式和平方差公式计算．

【详解】解：（1） $2\sqrt{12}+\sqrt{27}-3\sqrt{48}$

$=2\times2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3\times4\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-12\sqrt{3}$

$=-5\sqrt{3}$

（2） $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=(3-2\sqrt{6}+2)-(3-2)$

$=3-2\sqrt{6}+2-3+2$

$=4-2\sqrt{6}$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算：先把二次根式化为最简二次根式，然后合并同类二次根式即可．在二次根式的混合运算中，如能结合题目特点，灵活运用二次根式的性质，选择恰当的解题途径，往往能事半功倍．

18. 【答案】$ab(a+b)$；$-2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先将代数式因式分解，进行二次根式的混合运算计算 $ab, a+b$ 的值，再代入求解即可．

【详解】$\because$ a^2b+ab^2

$=ab(a+b)$

$\because$ $\boldsymbol{a=\sqrt{3}-2}$，$b=2+\sqrt{3}$

$\therefore ab=(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)=-1$

$a+b=\sqrt{3}-2+2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\therefore$原式$=-1\times2\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了提公因式法因式分解，二次根式的混合运算，先用提公因式法因式分解是解题的关键．

19. 【答案】BD　长为6

【解析】

【分析】根据菱形的性质得出 $AC\perp BD$，$DO=BO$，然后根据 $Rt\triangle AOB$ 的勾股定理求出 BO 的长度，然后根

据 $BD=2BO$ 求出答案.

【详解】∵四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC 与 BD 相交于 O，

∴$AC\perp BD$，$DO=BO$，

∵$AB=5$，$AO=4$，

∴$BO=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∴$BD=2BO=2\times3=6$.

【点睛】此题考查了菱形的性质，解题的关键是熟练掌握菱形的性质.

20. 【答案】（1）8；（2）$\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】（1）先根据菱形的性质求得 DC、OD 的长，再根据勾股定理即可求得结果；

（2）根据菱形的两种面积公式利用等面积法列式求解即可.

【详解】解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是菱形　　，

∴$AB=BC=CD=AD$，$AC\perp BD$，$BO=OB$，$AO=OC$，

∵菱形的周长是 20，

∴$DC=5$.

∵$BD=6$，

∴$OD=3$，

在 $Rt\triangle DOC$ 中，$OC=\sqrt{DC^2-OD^2}=4$，

∴$AC=2OC=8$；

（2）∵$S_{\triangle ABD}=AB\cdot DE=\frac{1}{2}BD\cdot AC$，

$\therefore 5DE=\frac{1}{2}\times6\times8$，

解得 $DE=\frac{24}{5}$.

【点睛】本题考查了菱形的性质，以及勾股定理等知识，解答本题的关键是熟练掌握菱形的对角线互相垂直平分，四条边相等；同时熟记菱形的面积有两种求法：（1）底乘以相应底上的高；（2）对角线乘积的一半.

21. 【答案】（1）5；（2）10.

【解析】

【分析】（1）根据折叠的性质知：BF=DF，设 DF=x，用 x 表示出 FC，在 Rt△DCF 中，利用勾股定理可求得 DF 的长；

（2）作 FH⊥AD 于点 H，求得 FH，由折叠的性质和平行线的性质证得∠EFD=∠DEF，得出 DE=DF，进一步利用三角形的面积计算公式即可求解.

【详解】解：（1）设 DF=x，由折叠可知 BF=DF=x，

∴FC=BC-BF=8-x，

∵四边形 ABCD 为长方形，

∴DC=AB=4，∠C=90°，

在 Rt△DCF 中，$DF^2=DC^2+FC^2$，

∴$x^2=4^2+(8-x)^2$，解得 x=5，

∴DF=5；

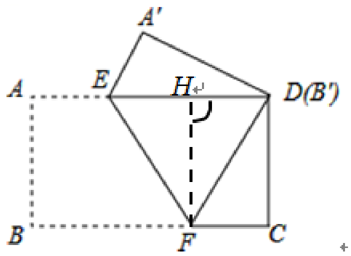
（2）作 FH⊥AD 于点 H，则 FH=AB=4，

由折叠可知，∠EFB=∠EFD，

∵AD∥BC，∴∠DEF=∠EFB，∴∠EFD=∠DEF，

∴ED=DF=5，

∴$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}ED\cdot FH=\frac{1}{2}\times5\times4=10$.



【点睛】此题主要考查了翻折变换的性质，勾股定理的运用，长方形的性质，三角形的面积，掌握折叠的性质得出对应的线段和角相等是解决问题的关键.

22. 【答案】(1) 证明见解析；

（2）当 $AB=AC$ 时，四边形 $ADEF$ 是菱形，当∠BAC=150°时，四边形 $ADEF$ 是矩形．理由见解析；

（3）不总是存在，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据等边三角形　性质得出 $AC=AF$，$AB=BD$，$BC=BE$，$\angle EBC=\angle ABD=60°$，求出 $\angle DBE=\angle ABC$，根据 SAS 推出 $\triangle DBE\cong\triangle ABC$，根据全等得出 $DE=AC$，求出 $DE=AF$，同理 $AD=EF$，根据平行四边形的判定推出即可；

（2）当 $AB=AC$ 时，四边形 $ADEF$ 是菱形，根据菱形的判定推出即可；当∠BAC=150°时，四边形 $ADEF$ 是矩形，求出∠DAF=90°，根据矩形的判定推出即可；

（3）这样的平行四边形 $ADEF$ 不总是存在，当∠BAC=60°时，此时四边形 $ADEF$ 就不存在.

【小问 1 详解】

证明：∵△ABD、△BCE 和△ACF 是等边三角形，

∴$AC=AF$，$AB=BD$，$BC=BE$，$\angle EBC=\angle ABD=60°$，

∴$\angle DBE=\angle ABC=60°-\angle EBA$，

在△DBE 和△ABC 中

$$\begin{cases} BD = BA \\ \angle DBE = \angle ABC \\ BE = BC \end{cases},$$

∴△DBE≌△ABC（SAS），

∴DE＝AC，

∵AC＝AF，

∴DE＝AF，

同理 AD＝EF，

∴四边形 $ADEF$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

解：当 AB＝AC 时，四边形 $ADEF$ 是菱形，

理由是：∵△ABD 和△AFC 是等边三角形，

∴AB＝AD，AC＝AF，

∵AB＝AC，

∴AD＝AF，

∵四边形 $ADEF$ 是平行四边形，

∴四边形 $ADEF$ 是菱形；

当∠BAC＝150°时，四边形 $ADEF$ 是矩形，

理由是：∵△ABD 和△ACF 是等边三角形，

∴∠DAB＝∠FAC＝60°，

∵∠BAC＝150°，

∴∠DAF＝90°，

∵四边形 $ADEF$ 是平行四边形，

∴四边形 $ADEF$ 是矩形；

【小问 3 详解】

解：这样的平行四边形 $ADEF$ 不总是存在，

理由是：当∠BAC＝60°时，∠DAF＝180°，

此时点 D、A、F 在同一条直线上，此时四边形 $ADEF$ 就不存在．

【点睛】本题考查了菱形的判定，矩形的判定，平行四边形的判定，等边三角形的性质，全等三角形的性质和判定的应用，能综合运用定理进行推理是解此题的关键．

23. 【答案】（1）（6，6）

（2）$\angle OPA = 67.5°$；$OP = 6$

（3）见解析

【解析】

【分析】（1）将等式 a^2+2b^2-2ab-12b+36=0 进行变形，利用偶数次方的非负性，求出 a、b 的值即可；

（2）根据正方形的性质，得出$\angle OAC=\angle CAB=\angle AOB=45°$，根据$AP$平分$\angle CAB$，得出$\angle CAP=\angle BAP=\frac{1}{2}\angle CAB=22.5°$，根据三角形内角和算出$\angle OPA=67.5°$；根据点$B$的坐标为（6，6）得出$OA=OC=BC=AB=6$，根据$\angle OAP=\angle OPA=67.5°$，得出$OP=OA=6$；

（3）设AP与y轴交于点Q，先根据$OP=OA$，得出$\angle OAP=\angle OPA$，再根据“SAS”证明$\Delta OFC\cong\Delta OFA$，得出$\angle OCF=\angle OAF$，根据“AAS”证明$\triangle OFC\cong\triangle OQP$，得出$OF=OQ$，$CF=PQ$，然后证明$\triangle OFQ$为等边三角形，得出$OF=FQ$，即可证明结论．

【小问1详解】

解：$\because a^2+2b^2-2ab-12b+36=0$，

$\therefore a^2-2ab+b^2+b^2-12b+6^2=0$，

即$(a-b)^2+(b-6)^2=0$，

$\therefore \begin{cases}a-b=0\\b-6=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=6\\b=6\end{cases}$，

$\therefore$点B的坐标为（6，6）．

故答案为：（6，6）．

【小问2详解】

解：$\because$四边形$ABOC$为正方形，

$\therefore \angle AOC=\angle OCB=\angle ABC=\angle OAB=90°$，$OA=OC=BC=AB$，

AC平分$\angle OAB$，OB平分$\angle AOC$，

$\therefore \angle OAC=\angle CAB=\angle AOB=45°$，

$\because AP$平分$\angle CAB$，

$\therefore \angle CAP=\angle BAP=\frac{1}{2}\angle CAB=22.5°$，

$\therefore \angle OAP=\angle OAC+\angle CAP=67.5°$，

$\therefore \angle OPA=180°-\angle AOP-\angle OAP=67.5°$；

$\because$点B的坐标为（6，6），

$\therefore OA=OC=BC=AB=6$，

$\because \angle OAP=\angle OPA=67.5°$，

$\therefore OP=OA=6$．

【小问3详解】

设AP与y轴交于点Q，如图所示：

根据解析（2）可知，$OP=OA$，

$\therefore \angle OAP=\angle OPA$，

$\because$在$\triangle OFC$和$\triangle OFA$中$\begin{cases} OF = OF \\ \angle COF = \angle AOF = 45^\circ \\ OC = OA \end{cases}$，

$\therefore \Delta OFC \cong \Delta OFA$（SAS），

$\therefore \angle OCF = \angle OAF$，

$\therefore \angle OCF = \angle OPQ$，

$\because$在$\triangle OFC$和$\triangle OQP$中$\begin{cases} \angle OCF = \angle OPQ \\ \angle COF = \angle QOP = 45^\circ \\ OC = OP \end{cases}$，

$\therefore \triangle OFC \cong \triangle OQP$（AAS），

$\therefore OF=OQ$，$CF=PQ$，

$\because \angle POC = 60^\circ$，$\angle POQ = 45^\circ$，

$\therefore \angle COQ = \angle POC - \angle POQ = 15^\circ$，

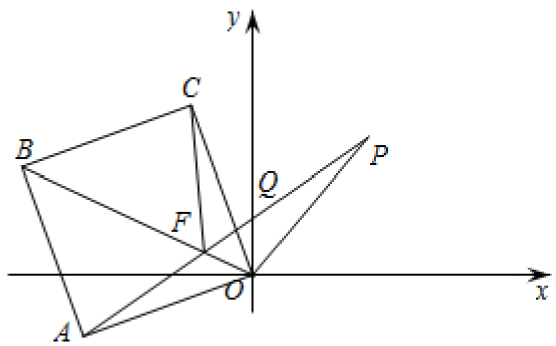
$\therefore \angle BOQ = \angle BOC + \angle COQ = 60^\circ$，

$\therefore \triangle OFQ$为等边三角形，

$\therefore OF=FQ$，

$\therefore PF = PQ + FQ = CF + OF$，

即 $OF+CF=PF$.



【点睛】本题主要考查了正方形的性质，三角形全等的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，分解因式，偶次方的非负性，证明$\triangle OFC \cong \triangle OQP$，得出 $OF=OQ$，$CF=PQ$，是解题的关键．