



2020年河南省中考数学试卷

一、选择题（每小题3分，共30分）下列各小题均有四个答案，其中只有一个是正确的。

1. (3分) (2020·河南) 2的相反数是()

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

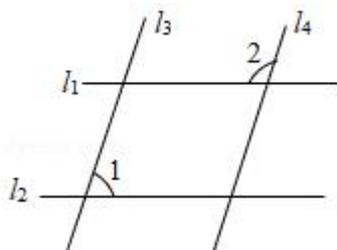
2. (3分) (2020·河南) 如图摆放的几何体中，主视图与左视图有可能不同的是()



3. (3分) (2020·河南) 要调查下列问题，适合采用全面调查（普查）的是()

- A. 中央电视台《开学第一课》的收视率
B. 某城市居民6月份人均网上购物的次数
C. 即将发射的气象卫星的零部件质量
D. 某品牌新能源汽车的最大续航里程

4. (3分) (2020·河南) 如图， $l_1 // l_2$ ， $l_3 // l_4$ ，若 $\angle 1 = 70^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为()



- A. 100° B. 110° C. 120° D. 130°

5. (3分) (2020·河南) 电子文件的大小常用B, KB, MB, GB等作为单位，其中 $1GB = 2^{10}MB$,

$1MB = 2^{10}KB$, $1KB = 2^{10}B$. 某视频文件的大小约为1GB, 1GB等于()

- A. $2^{30}B$ B. $8^{30}B$ C. $8 \times 10^{10}B$ D. $2 \times 10^{30}B$

6. (3分) (2020·河南) 若点 $A(-1, y_1)$, $B(2, y_2)$, $C(3, y_3)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上,

则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是()

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_3 > y_1$ C. $y_1 > y_3 > y_2$ D. $y_3 > y_2 > y_1$

7. (3分) (2020·河南) 定义运算： $m \star n = mn^2 - mn - 1$. 例如： $4 \star 2 = 4 \times 2^2 - 4 \times 2 - 1 = 7$. 则

方程 $1 \star x = 0$ 的根的情况为()

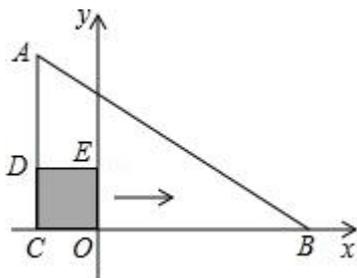


- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 无实数根 D. 只有一个实数根

8. (3分) (2020•河南) 国家统计局统计数据显示, 我国快递业务收入逐年增加. 2017年至2019年我国快递业务收入由5000亿元增加到7500亿元. 设我国2017年至2019年快递业务收入的年平均增长率为 x , 则可列方程为()

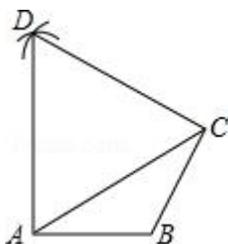
- A. $500(1+2x) = 7500$
B. $5000 \times 2(1+x) = 7500$
C. $5000(1+x)^2 = 7500$
D. $5000 + 5000(1+x) + 5000(1+x)^2 = 7500$

9. (3分) (2020•河南) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 边 BC 在 x 轴上, 顶点 A, B 的坐标分别为 $(-2, 6)$ 和 $(7, 0)$. 将正方形 $OCDE$ 沿 x 轴向右平移, 当点 E 落在 AB 边上时, 点 D 的坐标为()



- A. $(\frac{3}{2}, 2)$ B. $(2, 2)$ C. $(\frac{11}{4}, 2)$ D. $(4, 2)$

10. (3分) (2020•河南) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = \sqrt{3}$, $\angle BAC = 30^\circ$, 分别以点 A, C 为圆心, AC 的长为半径作弧, 两弧交于点 D , 连接 DA, DC , 则四边形 $ABCD$ 的面积为()



- A. $6\sqrt{3}$ B. 9 C. 6 D. $3\sqrt{3}$

二、填空题 (每小题3分, 共15分)

11. (3分) (2020•河南) 请写出一个大于1且小于2的无理数_____.



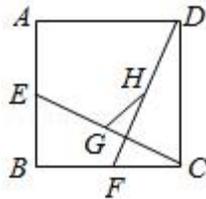
12. (3分) (2020•河南) 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > a, \\ x > b, \end{cases}$ 其中 a, b 在数轴上的对应点如图所示, 则这个不等式组的解集为_____.



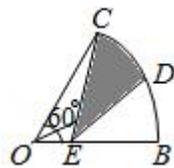
13. (3分) (2020•河南) 如图所示的转盘, 被分成面积相等的四个扇形, 分别涂有红、黄、蓝、绿四种颜色. 固定指针, 自由转动转盘两次, 每次停止后, 记下指针所指区域 (指针指向区域分界线时, 忽略不计) 的颜色, 则两次颜色相同的概率是_____.



14. (3分) (2020•河南) 如图, 在边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 EC, FD , 点 G, H 分别是 EC, FD 的中点, 连接 GH , 则 GH 的长度为_____.



15. (3分) (2020•河南) 如图, 在扇形 BOC 中, $\angle BOC = 60^\circ$, OD 平分 $\angle BOC$ 交 \widehat{BC} 于点 D , 点 E 为半径 OB 上一动点. 若 $OB = 2$, 则阴影部分周长的最小值为_____.



三、解答题 (本大题共 8 个小题, 满分 75 分)

16. (8分) (2020•河南) 先化简, 再求值: $(1 - \frac{1}{a+1}) \div \frac{a}{a^2-1}$, 其中 $a = \sqrt{5} + 1$.

17. (9分) (2020•河南) 为发展乡村经济, 某村根据本地特色, 创办了山药粉加工厂. 该厂需购置一台分装机, 计划从商家推荐试用的甲、乙两台不同品牌的分装机中选择. 试用时, 设定分装的标准质量为每袋 $500g$, 与之相差大于 $10g$ 为不合格. 为检验分装效果, 工厂对这两台机器分装的成品进行了抽样和分析, 过程如下:

[收集数据] 从甲、乙两台机器分装的成品中各随机抽取 20 袋, 测得实际质量 (单位: g) 如



下:

甲: 501 497 498 502 513 489 506 490 505 486

502 503 498 497 491 500 505 502 504 505

乙: 505 499 502 491 487 506 493 505 499 498

502 503 501 490 501 502 511 499 499 501

[整理数据] 整理以上数据, 得到每袋质量 $x(g)$ 的频数分布表.

质量	$485 \leq x < 490$	$490 \leq x < 495$	$495 \leq x < 500$	$500 \leq x < 505$	$505 \leq x < 510$	$510 \leq x < 515$
频数						
机器						
甲	2	2	4	7	4	1
乙	1	3	5	7	3	1

[分析数据] 根据以上数据, 得到以下统计量.

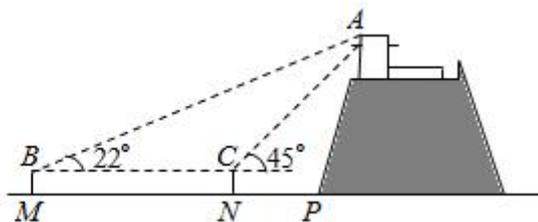
统计量	平均数	中位数	方差	不合格率
机器				
甲	499.7	501.5	42.01	b
乙	499.7	a	31.81	10%

根据以上信息, 回答下列问题:

(1) 表格中的 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$;

(2) 综合上表中的统计量, 判断工厂应选购哪一台分装机, 并说明理由.

18. (9分) (2020•河南) 位于河南省登封市境内的元代观星台, 是中国现存最早的天文台, 也是世界文化遗产之一.



某校数学社团的同学们使用卷尺和自制的测角仪测量观星台的高度. 如图所示, 他们在地面一条水平步道 MP 上架设测角仪, 先在点 M 处测得观星台最高点 A 的仰角为 22° , 然后沿 MP 方向前进 $16m$ 到达点 N 处, 测得点 A 的仰角为 45° . 测角仪的高度为 $1.6m$.

(1) 求观星台最高点 A 距离地面的高度 (结果精确到 $0.1m$. 参考数据: $\sin 22^\circ \approx 0.37$,



$\cos 22^\circ \approx 0.93$, $\tan 22^\circ \approx 0.40$, $\sqrt{2} \approx 1.41$);

(2) “景点简介”显示, 观星台的高度为 $12.6m$. 请计算本次测量结果的误差, 并提出一条减小误差的合理化建议.

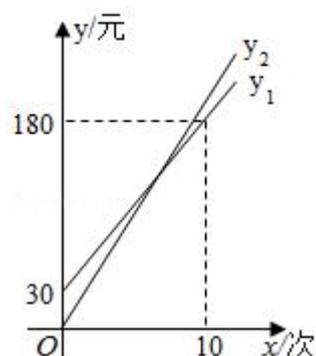
19. (9分) (2020·河南) 暑期将至, 某健身俱乐部面向学生推出暑期优惠活动, 活动方案如下.

方案一: 购买一张学生暑期专享卡, 每次健身费用按六折优惠;

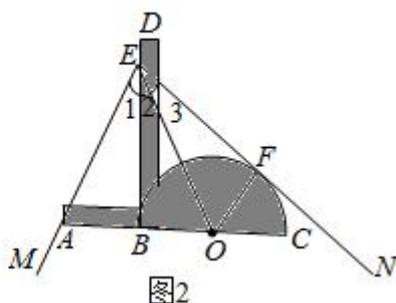
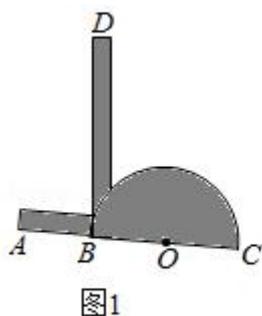
方案二: 不购买学生暑期专享卡, 每次健身费用按八折优惠.

设某学生暑期健身 x (次), 按照方案一所需费用为 y_1 (元), 且 $y_1 = k_1x + b$; 按照方案二所需费用为 y_2 (元), 且 $y_2 = k_2x$. 其函数图象如图所示.

- (1) 求 k_1 和 b 的值, 并说明它们的实际意义;
- (2) 求打折前的每次健身费用和 k_2 的值;
- (3) 八年级学生小华计划暑期前往该俱乐部健身 8 次, 应选择哪种方案所需费用更少? 说明理由.



20. (9分) (2020·河南) 我们学习过利用尺规作图平分一个任意角, 而“利用尺规作图三等分一个任意角”曾是数学史上一大难题, 之后被数学家证明是不可能完成的. 人们根据实际需要, 发明了一种简易操作工具——三分角器. 图 1 是它的示意图, 其中 AB 与半圆 O 的直径 BC 在同一直线上, 且 AB 的长度与半圆的半径相等; DB 与 AC 垂直于点 B , DB 足够长.



使用方法如图 2 所示，若要把 $\angle MEN$ 三等分，只需适当放置三分角器，使 DB 经过 $\angle MEN$ 的顶点 E ，点 A 落在边 EM 上，半圆 O 与另一边 EN 恰好相切，切点为 F ，则 EB ， EO 就把 $\angle MEN$ 三等分了。

为了说明这一方法的正确性，需要对其进行证明。如下给出了不完整的“已知”和“求证”，请补充完整，并写出“证明”过程。

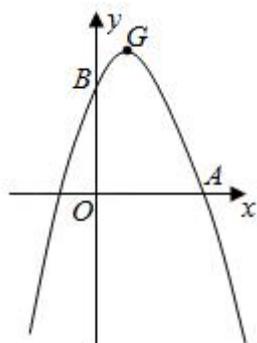
已知：如图 2，点 A ， B ， O ， C 在同一直线上， $EB \perp AC$ ，垂足为点 B ，_____。

求证：_____。

21. (10 分) (2020•河南) 如图，抛物线 $y = -x^2 + 2x + c$ 与 x 轴正半轴， y 轴正半轴分别交于点 A ， B ，且 $OA = OB$ ，点 G 为抛物线的顶点。

(1) 求抛物线的解析式及点 G 的坐标；

(2) 点 M ， N 为抛物线上两点（点 M 在点 N 的左侧），且到对称轴的距离分别为 3 个单位长度和 5 个单位长度，点 Q 为抛物线上点 M ， N 之间（含点 M ， N ）的一个动点，求点 Q 的纵坐标 y_Q 的取值范围。



22. (10 分) (2020•河南) 小亮在学习中遇到这样一个问题：

如图，点 D 是 \widehat{BC} 上一动点，线段 $BC = 8\text{cm}$ ，点 A 是线段 BC 的中点，过点 C 作 $CF \parallel BD$ ，交 DA 的延长线于点 F 。当 $\triangle DCF$ 为等腰三角形时，求线段 BD 的长度。



小亮分析发现，此问题很难通过常规的推理计算彻底解决，于是尝试结合学习函数的经验研究此问题。请将下面的探究过程补充完整：

(1) 根据点 D 在 \widehat{BC} 上的不同位置，画出相应的图形，测量线段 BD ， CD ， FD 的长度，得到下表的几组对应值。

BD/cm	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
CD/cm	8.0	7.7	7.2	6.6	5.9	a	3.9	2.4	0
FD/cm	8.0	7.4	6.9	6.5	6.1	6.0	6.2	6.7	8.0

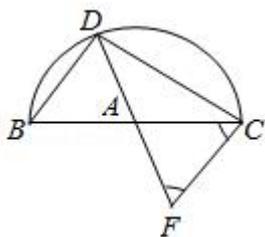
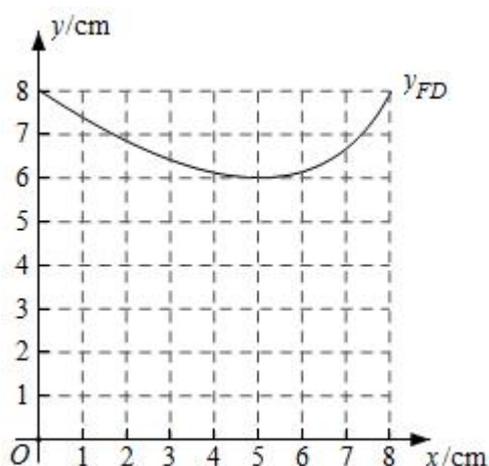
操作中发现：

① “当点 D 为 \widehat{BC} 的中点时， $BD = 5.0cm$ ”。则上表中 a 的值是_____；

② “线段 CF 的长度无需测量即可得到”。请简要说明理由。

(2) 将线段 BD 的长度作为自变量 x ， CD 和 FD 的长度都是 x 的函数，分别记为 y_{CD} 和 y_{FD} ，并在平面直角坐标系 xOy 中画出了函数 y_{FD} 的图象，如图所示。请在同一坐标系中画出函数 y_{CD} 的图象；

(3) 继续在同一坐标系中画出所需的函数图象，并结合图象直接写出：当 $\triangle DCF$ 为等腰三角形时，线段 BD 长度的近似值（结果保留一位小数）。



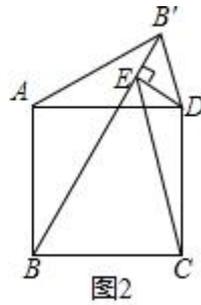
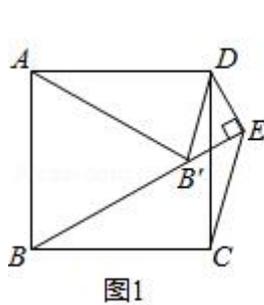
23. (11分)(2020·河南)将正方形 $ABCD$ 的边 AB 绕点 A 逆时针旋转至 AB' , 记旋转角为 α , 连接 BB' , 过点 D 作 DE 垂直于直线 BB' , 垂足为点 E , 连接 DB' , CE .

(1) 如图 1, 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $\triangle DEB'$ 的形状为____, 连接 BD , 可求出 $\frac{BB'}{CE}$ 的值为____;

(2) 当 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ 且 $\alpha \neq 90^\circ$ 时,

① (1) 中的两个结论是否仍然成立? 如果成立, 请仅就图 2 的情形进行证明; 如果不成立, 请说明理由;

② 当以点 B' , E , C , D 为顶点的四边形是平行四边形时, 请直接写出 $\frac{BE}{B'E}$ 的值.





2020 年河南省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）下列各小题均有四个答案，其中只有一个是正确的.

1. (3 分) (2020·河南) 2 的相反数是()

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

【考点】14: 相反数

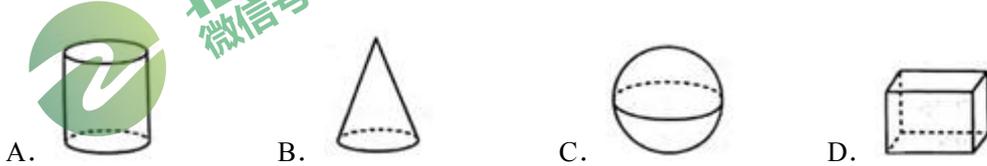
【分析】利用相反数的概念：只有符号不同的两个数叫做互为相反数，进而得出答案.

【解答】解：2 的相反数是 -2 .

故选：A.

【点评】此题主要考查了相反数的概念，正确把握定义是解题关键.

2. (3 分) (2020·河南) 如图摆放的几何体中，主视图与左视图有可能不同的是()



【考点】U1: 简单几何体的三视图

【专题】64: 几何直观; 55F: 投影与视图

【分析】分别确定每个几何体的主视图和左视图即可作出判断.

【解答】解：A、主视图和左视图是长方形，一定相同，故本选项不合题意；

B、主视图和左视图都是等腰三角形，一定相同，故选项不符合题意；

C、主视图和左视图都是圆，一定相同，故选项不符合题意；

D、主视图是长方形，左视图是正方形，故本选项符合题意；

故选：D.

【点评】本题考查了简单几何体的三视图，确定三视图是关键.

3. (3 分) (2020·河南) 要调查下列问题，适合采用全面调查（普查）的是()

- A. 中央电视台《开学第一课》的收视率
B. 某城市居民 6 月份人均网上购物的次数
C. 即将发射的气象卫星的零部件质量
D. 某品牌新能源汽车的最大续航里程

【考点】V2: 全面调查与抽样调查



【专题】69：应用意识；541：数据的收集与整理

【分析】由普查得到的调查结果比较准确，但所费人力、物力和时间较多，而抽样调查得到的调查结果比较近似。

【解答】解：A、调查中央电视台《开学第一课》的收视率，适合抽查，故本选项不合题意；

B、调查某城市居民6月份人均网上购物的次数，适合抽查，故本选项不合题意；

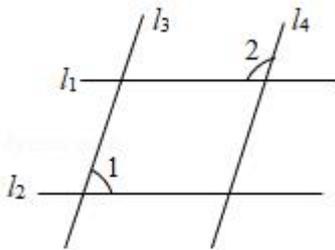
C、调查即将发射的气象卫星的零部件质量，适合采用全面调查（普查），故本选项符合题意；

D、调查某品牌新能源汽车的最大续航里程，适合抽查，故本选项不合题意。

故选：C。

【点评】本题考查了抽样调查和全面调查的区别，选择普查还是抽样调查要根据所要考查的对象的特征灵活选用，一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用普查。

4. (3分) (2020•河南) 如图， $l_1 // l_2$ ， $l_3 // l_4$ ，若 $\angle 1 = 70^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为()



A. 100°

B. 110°

C. 120°

D. 130°

【考点】JA：平行线的性质

【专题】66：运算能力；551：线段、角、相交线与平行线

【分析】根据平行线的性质即可得到结论。

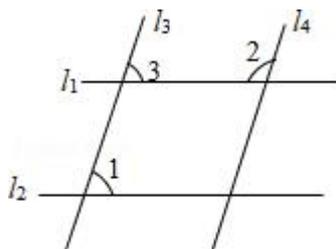
【解答】解： $\because l_1 // l_2$ ， $\angle 1 = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 70^\circ$ ，

$\because l_3 // l_4$ ，

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ ，

故选：B。



【点评】此题考查了平行线的性质，解题的关键是：熟记两直线平行同位角相等，两直线平行内错角相等，两直线平行同旁内角互补。

5. (3分)(2020·河南)电子文件的大小常用 B ， KB ， MB ， GB 等作为单位，其中 $1GB = 2^{10}MB$ ， $1MB = 2^{10}KB$ ， $1KB = 2^{10}B$ 。某视频文件的大小约为 $1GB$ ， $1GB$ 等于()

- A. $2^{30}B$ B. $8^{30}B$ C. $8 \times 10^{10}B$ D. $2 \times 10^{30}B$

【考点】11：科学记数法—表示较大的数

【专题】66：运算能力；61：数感；69：应用意识；511：实数

【分析】列出算式，进行计算即可。

【解答】解：由题意得： $2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}B = 2^{10+10+10} = 2^{30}B$ ，

故选：A。

【点评】本题考查同底数幂的乘法，底数不变，指数相加是计算法则。

6. (3分)(2020·河南)若点 $A(-1, y_1)$ ， $B(2, y_2)$ ， $C(3, y_3)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上，则 y_1 ， y_2 ， y_3 的大小关系是()

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_3 > y_1$ C. $y_1 > y_3 > y_2$ D. $y_3 > y_2 > y_1$

【考点】G6：反比例函数图象上点的坐标特征

【专题】66：运算能力；534：反比例函数及其应用

【分析】根据反比例函数图象上点的坐标特征求出 y_1 、 y_2 、 y_3 的值，比较后即可得出结论。

【解答】解： \because 点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(2, y_2)$ 、 $C(3, y_3)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上，

$$\therefore y_1 = -\frac{6}{-1} = 6, \quad y_2 = -\frac{6}{2} = -3, \quad y_3 = -\frac{6}{3} = -2,$$

$$\text{又} \because -3 < -2 < 6,$$

$$\therefore y_1 > y_3 > y_2.$$

故选：C。

【点评】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，利用反比例函数图象上点的坐标特征



求出 y_1 、 y_2 、 y_3 的值是解题的关键.

7. (3分)(2020•河南)定义运算: $m \star n = mn^2 - mn - 1$. 例如: $4 \star 2 = 4 \times 2^2 - 4 \times 2 - 1 = 7$. 则

方程 $1 \star x = 0$ 的根的情况为()

- A. 有两个不相等的实数根
B. 有两个相等的实数根
C. 无实数根
D. 只有一个实数根

【考点】2C: 实数的运算; 4A: 根的判别式

【专题】66: 运算能力; 523: 一元二次方程及应用

【分析】根据新定义运算法则以及即可求出答案.

【解答】解: 由题意可知: $1 \star x = x^2 - x - 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0,$$

故选: A.

【点评】本题考查根的判别式, 解题的关键是正确理解新定义运算法则, 本题属于基础题型.

8. (3分)(2020•河南)国家统计局统计数据显示, 我国快递业务收入逐年增加. 2017年至2019年我国快递业务收入由5000亿元增加到7500亿元. 设我国2017年至2019年快递业务收入的年平均增长率为 x , 则可列方程为()

- A. $500(1+2x) = 7500$
B. $5000 \times 2(1+x) = 7500$
C. $5000(1+x)^2 = 7500$
D. $5000 + 5000(1+x) + 5000(1+x)^2 = 7500$

【考点】AC: 由实际问题抽象出一元二次方程

【专题】69: 应用意识; 523: 一元二次方程及应用

【分析】根据题意可得等量关系: 2017年的快递业务量 $\times (1 + \text{增长率})^2 = 2019$ 年的快递业务量, 根据等量关系列出方程即可.

【解答】解: 设我国2017年至2019年快递业务收入的年平均增长率为 x ,

由题意得: $5000(1+x)^2 = 7500$,

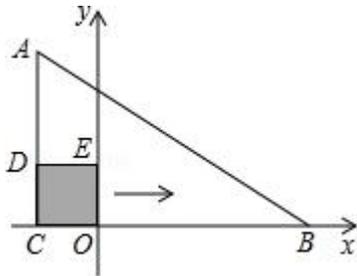
故选: C.

【点评】此题主要考查了由实际问题抽象出一元二次方程, 关键是掌握平均变化率的方法, 若设变化前的量为 a , 变化后的量为 b , 平均变化率为 x , 则经过两次变化后的数量关系为



$$a(1 \pm x)^2 = b.$$

9. (3分) (2020•河南) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 边 BC 在 x 轴上, 顶点 A, B 的坐标分别为 $(-2, 6)$ 和 $(7, 0)$. 将正方形 $OCDE$ 沿 x 轴向右平移, 当点 E 落在 AB 边上时, 点 D 的坐标为 ()



- A. $(\frac{3}{2}, 2)$ B. $(2, 2)$ C. $(\frac{11}{4}, 2)$ D. $(4, 2)$

【考点】 LE : 正方形的性质; $Q3$: 坐标与图形变化-平移

【专题】66: 运算能力; 556: 矩形 菱形 正方形

【分析】根据已知条件得到 $AC = 6$, $OC = 2$, $OB = 7$, 求得 $BC = 9$, 根据正方形的性质得到 $DE = OC = OE = 2$, 求得 $O'E' = O'C' = 2$, 根据相似三角形的性质得到 $BO' = 3$, 于是得到结论.

【解答】解: 如图, 设正方形 $D'C'O'E'$ 是正方形 $OCDE$ 沿 x 轴向右平移后的正方形.

\therefore 顶点 A, B 的坐标分别为 $(-2, 6)$ 和 $(7, 0)$,

$\therefore AC = 6$, $OC = 2$, $OB = 7$,

$\therefore BC = 9$,

\therefore 四边形 $OCDE$ 是正方形,

$\therefore DE = OC = OE = 2$,

$\therefore O'E' = O'C' = 2$,

$\therefore E'O' \perp BC$,

$\therefore \angle BO'E' = \angle BCA = 90^\circ$,

$\therefore E'O' \parallel AC$,

$\therefore \triangle BO'E' \sim \triangle BCA$,

$$\therefore \frac{E'O'}{AC} = \frac{BO'}{BC},$$

$$\therefore \frac{2}{6} = \frac{BO'}{9},$$

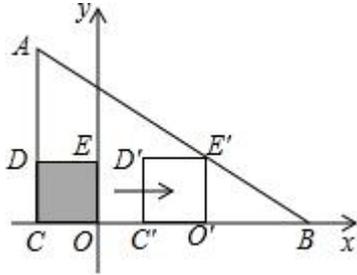
$\therefore BO' = 3$,



$\therefore OC' = 7 - 2 - 3 = 2,$

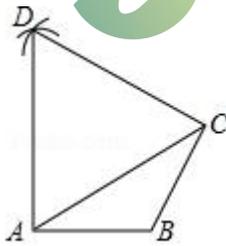
\therefore 当点 E 落在 AB 边上时, 点 D 的坐标为 $(2,2),$

故选: $B.$



【点评】 本题考查了正方形的性质, 坐标与图形性质, 相似三角形的判定和性质, 正确的识别图形是解题的关键.

10. (3分) (2020•河南) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = \sqrt{3}, \angle BAC = 30^\circ,$ 分别以点 A, C 为圆心, AC 的长为半径作弧, 两弧交于点 $D,$ 连接 $DA, DC,$ 则四边形 $ABCD$ 的面积为()



A. $6\sqrt{3}$

B. 9

C. 6

D. $3\sqrt{3}$

【考点】 KO : 含 30 度角的直角三角形; KH : 等腰三角形的性质

【专题】 554: 等腰三角形与直角三角形; 67: 推理能力; 66: 运算能力

【分析】 连接 BD 交 AC 于 $O,$ 根据已知条件得到 BD 垂直平分 $AC,$ 求得 $BD \perp AC, AO = CO,$ 根据等腰三角形的性质得到 $\angle ACB = \angle BAC = 30^\circ,$ 根据等边三角形的性质得到 $\angle DAC = \angle DCA = 60^\circ,$ 求得 $AD = CD = \sqrt{3}AB = 3,$ 于是得到结论.

【解答】 解: 连接 BD 交 AC 于 $O,$

$\therefore AD = CD, AB = BC,$

$\therefore BD$ 垂直平分 $AC,$

$\therefore BD \perp AC, AO = CO,$

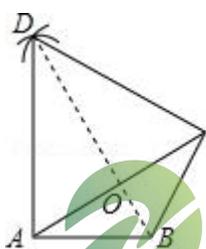
$\therefore AB = BC,$

$\therefore \angle ACB = \angle BAC = 30^\circ,$



$\because AC = AD = CD,$
 $\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle DAC = \angle DCA = 60^\circ,$
 $\therefore \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ, \angle ADB = \angle CDB = 30^\circ,$
 $\therefore AB = BC = \sqrt{3},$
 $\therefore AD = CD = \sqrt{3}AB = 3,$
 \therefore 四边形 $ABCD$ 的面积 $= 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3},$

故选: $D.$



【点评】 本题考查了含 30° 角的直角三角形, 等腰三角形的性质, 等边三角形的判定和性质, 熟练掌握直角三角形的性质是解题的关键.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

11. (3 分) (2020•河南) 请写出一个大于 1 且小于 2 的无理数 $\underline{\sqrt{3}}$.

【考点】 2B: 估算无理数的大小

【专题】 26: 开放型

【分析】 由于所求无理数大于 1 且小于 2, 两数平方得大于 2 小于 4, 所以可选其中的任意一个数开平方即可.

【解答】 解: 大于 1 且小于 2 的无理数是 $\sqrt{3}$, 答案不唯一.

故答案为: $\sqrt{3}$.

【点评】 此题主要考查了无理数的估算, 现实生活中经常需要估算, 估算应是我们具备的数学能力, “夹逼法” 是估算的一般方法, 也是常用方法.

12. (3 分) (2020•河南) 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > a, \\ x > b, \end{cases}$ 其中 a, b 在数轴上的对应点如图所示

示, 则这个不等式组的解集为 $\underline{x > a}$.



【考点】C4：在数轴上表示不等式的解集；CB：解一元一次不等式组

【专题】64：几何直观；524：一元一次不等式（组）及应用

【分析】根据关于 x 的不等式组的解集表示在数轴上表示方法求出 x 的取值范围即可.

【解答】解：∵ $b < 0 < a$,

∴ 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > a, \\ x > b, \end{cases}$ 的解集为： $x > a$,

故答案为： $x > a$.

【点评】本题考查的是在数轴上表示不等式组的解集，先根据题意得出不等式组的解集是解答此题的关键.

13. (3分) (2020·河南) 如图所示的转盘，被分成面积相等的四个扇形，分别涂有红、黄、蓝、绿四种颜色. 固定指针，自由转动转盘两次，每次停止后，记下指针所指区域（指针指向区域分界线时，忽略不计）的颜色，则两次颜色相同的概率是 $\frac{1}{4}$.



【考点】X6：列表法与树状图法

【专题】543：概率及其应用；69：应用意识；68：模型思想

【分析】用树状图或列表法表示所有可能出现的结果，进而求出相应的概率.

【解答】解：自由转动转盘两次，指针所指区域所有可能出现的情况如下：

第1次 第2次	红	黄	蓝	绿
红	红红	黄红	蓝红	绿红
黄	红黄	黄黄	蓝黄	绿黄
蓝	红蓝	黄蓝	蓝蓝	绿蓝
绿	红绿	黄绿	蓝绿	绿绿

共有 16 种可能出现的结果，其中两次颜色相同的有 4 种，

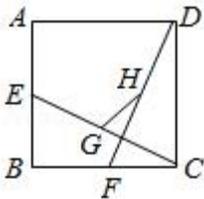
$$\therefore P(\text{两次颜色相同}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},$$

故答案为： $\frac{1}{4}$.



【点评】考查树状图或列表法求随机事件发生的概率，列举出所有可能出现的结果是解决问题的关键。

14. (3分) (2020•河南) 如图，在边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中，点 E ， F 分别是边 AB ， BC 的中点，连接 EC ， FD ，点 G ， H 分别是 EC ， FD 的中点，连接 GH ，则 GH 的长度为 1。



【考点】 KQ ：勾股定理； KD ：全等三角形的判定与性质； SE ：射影定理； LE ：正方形的性质

【专题】67：推理能力；35D：图形的相似；556：矩形 菱形 正方形

【分析】设 DF ， CE 交于 O ，根据正方形的性质得到 $\angle B = \angle DCF = 90^\circ$ ， $BC = CD = AB$ ，根据线段中点的定义得到 $BE = CF$ ，根据全等三角形的性质得到 $CE = DF$ ， $\angle BCE = \angle CDF$ ，求得 $DF \perp CE$ ，根据勾股定理得到 $CE = DF = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$ ，点 G ， H 分别是 EC ， FD 的中点，根据射影定理即可得到结论。

【解答】解：设 DF ， CE 交于 O ，

\therefore 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle B = \angle DCF = 90^\circ$ ， $BC = CD = AB$ ，

\therefore 点 E ， F 分别是边 AB ， BC 的中点，

$\therefore BE = CF$ ，

$\therefore \triangle CBE \cong \triangle DCF (SAS)$ ，

$\therefore CE = DF$ ， $\angle BCE = \angle CDF$ ，

$\therefore \angle CDF + \angle CFD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BCE + \angle CFD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle COF = 90^\circ$ ，

$\therefore DF \perp CE$ ，

$\therefore CE = DF = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$ ，

\therefore 点 G ， H 分别是 EC ， FD 的中点，



$$\therefore CG = FH = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$\therefore \angle DCF = 90^\circ, CO \perp DF,$

$$\therefore CF^2 = OF \cdot DF,$$

$$\therefore OF = \frac{CF^2}{DF} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore OH = \frac{3\sqrt{10}}{10}, OD = \frac{4\sqrt{10}}{5},$$

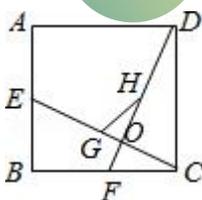
$$\therefore OC^2 = OF \cdot OD,$$

$$\therefore OC = \sqrt{\frac{\sqrt{10}}{5} \times \frac{4\sqrt{10}}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore OG = CG - OC = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{2\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

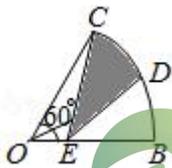
$$\therefore HG = \sqrt{OG^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}} = 1,$$

故答案为: 1.



【点评】 本题考查了射影定理, 勾股定理, 正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 正确的识别图形是解题的关键.

15. (3分) (2020•河南) 如图, 在扇形 BOC 中, $\angle BOC = 60^\circ$, OD 平分 $\angle BOC$ 交 \widehat{BC} 于点 D , 点 E 为半径 OB 上一动点. 若 $OB = 2$, 则阴影部分周长的最小值为 $\frac{6\sqrt{2} + \pi}{3}$.



【考点】 PA : 轴对称 - 最短路线问题; MN : 弧长的计算

【专题】 66: 运算能力; 69: 应用意识; 558: 平移、旋转与对称; 55C: 与圆有关的计算; 554: 等腰三角形与直角三角形

【分析】 利用轴对称的性质, 得出当点 E 移动到点 E' 时, 阴影部分的周长最小, 此时的最小值为弧 CD 的长与 CD' 的长度和, 分别进行计算即可.

【解答】 解: 如图, 作点 D 关于 OB 的对称点 D' , 连接 $D'C$ 交 OB 于点 E' , 连接 $E'D$ 、 OD' ,



此时 $E'C + E'C$ 最小，即： $E'C + E'C = CD'$ ，

由题意得， $\angle COD = \angle DOB = \angle BOD' = 30^\circ$ ，

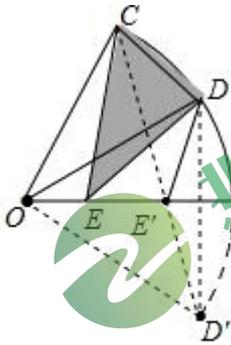
$\therefore \angle COD' = 90^\circ$ ，

$$\therefore CD' = \sqrt{OC^2 + OD'^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}，$$

$$\widehat{CD} \text{ 的长 } l = \frac{30\pi \times 2}{180} = \frac{\pi}{3}，$$

$$\therefore \text{阴影部分周长的最小值为 } 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\sqrt{2} + \pi}{3}。$$

故答案为： $\frac{6\sqrt{2} + \pi}{3}$ 。



【点评】 本题考查与圆有关的计算，掌握轴对称的性质，弧长的计算方法是正确计算的前提，理解轴对称解决路程最短问题是关键。

三、解答题（本大题共 8 个小题，满分 75 分）

16.（8分）（2020•河南）先化简，再求值： $(1 - \frac{1}{a+1}) \div \frac{a}{a^2-1}$ ，其中 $a = \sqrt{5} + 1$ 。

【考点】 6D：分式的化简求值

【专题】 513：分式；66：运算能力

【分析】 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简，再把 a 的值代入进行计算即可。

【解答】 解： $(1 - \frac{1}{a+1}) \div \frac{a}{a^2-1}$

$$= \frac{a+1-1}{a+1} \times \frac{(a-1)(a+1)}{a}$$

$$= a-1，$$

把 $a = \sqrt{5} + 1$ 代入 $a-1 = \sqrt{5} + 1 - 1 = \sqrt{5}$ 。

【点评】 本题考查的是分式的化简求值，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键。

17.（9分）（2020•河南）为发展乡村经济，某村根据本地特色，创办了山药粉加工厂。该



厂需购置一台分装机，计划从商家推荐试用的甲、乙两台不同品牌的分装机中选择。试用时，设定分装的标准质量为每袋 500g，与之相差大于 10g 为不合格。为检验分装效果，工厂对这两台机器分装的成品进行了抽样和分析，过程如下：

[收集数据] 从甲、乙两台机器分装的成品中各随机抽取 20 袋，测得实际质量（单位：g）如下：

甲：501 497 498 502 513 489 506 490 505 486
 502 503 498 497 491 500 505 502 504 505
 乙：505 499 502 491 487 506 493 505 499 498
 502 503 501 490 501 502 511 499 499 501

[整理数据] 整理以上数据，得到每袋质量 $x(g)$ 的频数分布表。

质量 频数 机器	$485 \leq x < 490$	$490 \leq x < 495$	$495 \leq x < 500$	$500 \leq x < 505$	$505 \leq x < 510$	$510 \leq x < 515$
甲	2	2	4	7	4	1
乙	1	3	5	7	3	1

[分析数据] 根据以上数据，得到以下统计量。

统计量 机器	平均数	中位数	方差	不合格率
甲	499.7	501.5	42.01	b
乙	499.7	a	31.81	10%

根据以上信息，回答下列问题：

- 表格中的 $a = \underline{501}$ ， $b = \underline{\quad}$ ；
- 综合上表中的统计量，判断工厂应选购哪一台分装机，并说明理由。

【考点】 $W4$ ：中位数； $V5$ ：用样本估计总体； $V7$ ：频数（率）分布表； $W7$ ：方差

【专题】69：应用意识；542：统计的应用；65：数据分析观念；68：模型思想；541：数据的收集与整理

【分析】（1）根据中位数的计算方法，求出乙机器分装实际质量的中位数；乙机器的不合格的有 1 个，调查总数为 20，可求出不合格率，从而确定 a 、 b 的值；

- 根据合格率进行判断。



【解答】解：(1) 将乙的成绩从小到大排列后，处在中间位置的两个数都是 501，因此中位数是 501，

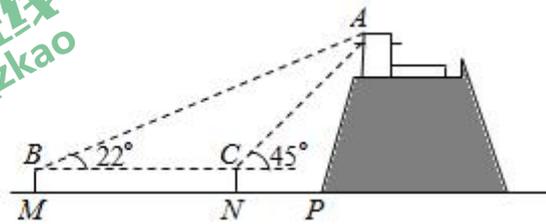
$$b = 1 \div 20 = 0.05 = 5\%$$

故答案为：501，5%；

(2) 选择甲机器，理由：甲的不合格率较小，

【点评】本题考查中位数、众数、平均数的意义和计算方法，理解中位数、众数、平均数的意义是正确解答的关键。

18. (9分) (2020•河南) 位于河南省登封市境内的元代观星台，是中国现存最早的天文台，也是世界文化遗产之一。



某校数学社团的同学们使用卷尺和自制的测角仪测量观星台的高度。如图所示，他们在地面一条水平步道 MP 上架设测角仪，先在点 M 处测得观星台最高点 A 的仰角为 22° ，然后沿 MP 方向前进 $16m$ 到达点 N 处，测得点 A 的仰角为 45° 。测角仪的高度为 $1.6m$ 。

(1) 求观星台最高点 A 距离地面的高度 (结果精确到 $0.1m$ 。参考数据： $\sin 22^\circ \approx 0.37$ ， $\cos 22^\circ \approx 0.93$ ， $\tan 22^\circ \approx 0.40$ ， $\sqrt{2} \approx 1.41$)；

(2) “景点简介”显示，观星台的高度为 $12.6m$ 。请计算本次测量结果的误差，并提出一条减小误差的合理化建议。

【考点】 TA ：解直角三角形的应用—仰角俯角问题

【专题】 $55E$ ：解直角三角形及其应用； 69 ：应用意识

【分析】(1) 过 A 作 $AD \perp PM$ 于 D ，延长 BC 交 AD 于 E ，则四边形 $BMNC$ ，四边形 $BMDE$ 是矩形，于是得到 $BC = MN = 16m$ ， $DE = CN = BM = 1.6m$ ，求得 $CE = AE$ ，设 $AE = CE = x$ ，得到 $BE = 16 + x$ ，解直角三角形即可得到结论；

(2) 建议为：为了减小误差可以通过多次测量取平均值的方法。

【解答】解：(1) 过 A 作 $AD \perp PM$ 于 D ，延长 BC 交 AD 于 E ，则四边形 $BMNC$ ，四边形 $BMDE$ 是矩形，

$$\therefore BC = MN = 16m, \quad DE = CN = BM = 1.6m,$$



$$\because \angle AED = 90^\circ, \quad \angle ACE = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ACE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CE = AE,$$

设 $AE = CE = x$,

$$\therefore BE = 16 + x,$$

$$\because \angle ABE = 22^\circ,$$

$$\therefore \tan 22^\circ = \frac{AE}{BE} = \frac{x}{16+x} = 0.40,$$

$$\therefore x \approx 10.7(m),$$

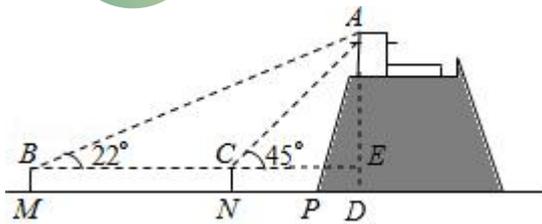
$$\therefore AD = 10.7 + 1.6 = 12.3(m),$$

答：观星台最高点 A 距离地面的高度约为 $12.3m$ ；

(2) \because “景点简介”显示，观星台的高度为 $12.6m$ ，

\therefore 本次测量结果的误差为 $12.6 - 12.3 = 0.3m$ ，

减小误差的合理化建议为：为了减小误差可以通过多次测量取平均值的方法。



【点评】 本题考查了解直角三角形的应用——仰角俯角问题，要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形。

19. (9分) (2020·河南) 暑期将至，某健身俱乐部面向学生推出暑期优惠活动，活动方案如下。

方案一：购买一张学生暑期专享卡，每次健身费用按六折优惠；

方案二：不购买学生暑期专享卡，每次健身费用按八折优惠。

设某学生暑期健身 x (次)，按照方案一所需费用为 y_1 (元)，且 $y_1 = k_1x + b$ ；按照方案二所需费用为 y_2 (元)，且 $y_2 = k_2x$ 。其函数图象如图所示。

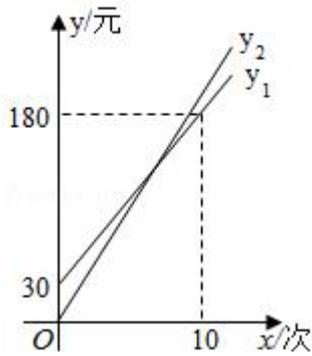
(1) 求 k_1 和 b 的值，并说明它们的实际意义；

(2) 求打折前的每次健身费用和 k_2 的值；

(3) 八年级学生小华计划暑期前往该俱乐部健身 8 次，应选择哪种方案所需费用更少？说



明理由.



【考点】FH：一次函数的应用

【专题】533：一次函数及其应用；69：应用意识

【分析】(1) 把点 $(0,30)$ ， $(10,180)$ 代入 $y_1 = k_1x + b$ ，得到关于 k_1 和 b 的二元一次方程组，求解即可；

(2) 根据方案一每次健身费用按六折优惠，可得打折前的每次健身费用，再根据方案二每次健身费用按八折优惠，求出 k_2 的值；

(3) 将 $x=8$ 分别代入 y_1 、 y_2 关于 x 的函数解析式，比较即可.

【解答】解：(1) $\because y_1 = k_1x + b$ 过点 $(0,30)$ ， $(10,180)$ ，

$$\therefore \begin{cases} b = 30 \\ 10k_1 + b = 180 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_1 = 15 \\ b = 30 \end{cases},$$

$k_1 = 15$ 表示的实际意义是：购买一张学生暑期专享卡后每次健身费用为 15 元，

$b = 30$ 表示的实际意义是：购买一张学生暑期专享卡的费用为 30 元；

(2) 由题意可得，打折前的每次健身费用为 $15 \div 0.6 = 25$ (元)，

则 $k_2 = 25 \times 0.8 = 20$ ；

(3) 选择方案一所需费用更少. 理由如下：

由题意可知， $y_1 = 15x + 30$ ， $y_2 = 20x$.

当健身 8 次时，

选择方案一所需费用： $y_1 = 15 \times 8 + 30 = 150$ (元)，



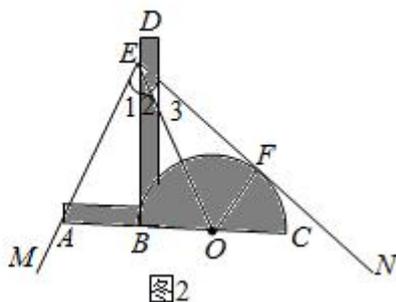
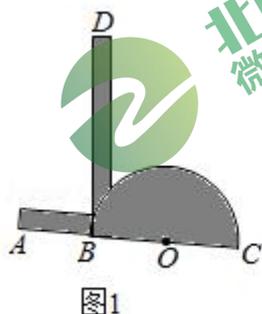
选择方案二所需费用： $y_2 = 20 \times 8 = 160$ （元），

$\therefore 150 < 160$ ，

\therefore 选择方案一所需费用更少。

【点评】 本题考查了一次函数的应用，解题的关键是理解两种优惠活动方案，求出 y_1 、 y_2 关于 x 的函数解析式。

20. (9分) (2020·河南) 我们学习过利用尺规作图平分一个任意角，而“利用尺规作图三等分一个任意角”曾是数学史上的一大难题，之后被数学家证明是不可能完成的。人们根据实际需要，发明了一种简易操作工具——三分角器。图1是它的示意图，其中 AB 与半圆 O 的直径 BC 在同一直线上，且 AB 的长度与半圆的半径相等； DB 与 AC 垂直于点 B ， DB 足够长。



使用方法如图2所示，若要把 $\angle MEN$ 三等分，只需适当放置三分角器，使 DB 经过 $\angle MEN$ 的顶点 E ，点 A 落在边 EM 上，半圆 O 与另一边 EN 恰好相切，切点为 F ，则 EB ， EO 就把 $\angle MEN$ 三等分了。

为了说明这一方法的正确性，需要对其进行证明。如下给出了不完整的“已知”和“求证”，请补充完整，并写出“证明”过程。

已知：如图2，点 A ， B ， O ， C 在同一直线上， $EB \perp AC$ ，垂足为点 B ， $AB = OB$ ， EN 切半圆 O 于 F 。

求证：_____。

【考点】 10：数学常识；M2：垂径定理；MC：切线的性质；M5：圆周角定理

【专题】 55A：与圆有关的位置关系；67：推理能力

【分析】 根据垂直的定义得到 $\angle ABE = \angle OBE = 90^\circ$ ，根据全等三角形的性质得到 $\angle 1 = \angle 2$ ，根据切线的性质得到 $\angle 2 = \angle 3$ ，于是得到结论。

【解答】 解：已知：如图2，点 A ， B ， O ， C 在同一直线上， $EB \perp AC$ ，垂足为点 B ， $AB = OB$ ，



EN 切半圆 O 于 F .

求证: EB , EO 就把 $\angle MEN$ 三等分,

证明: $\because EB \perp AC$,

$\therefore \angle ABE = \angle OBE = 90^\circ$,

$\because AB = OB$, $BE = BE$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle OBE(SAS)$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\because BE \perp OB$,

$\therefore BE$ 是 $\odot E$ 的切线,

$\therefore EN$ 切半圆 O 于 F ,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore EB$, EO 就把 $\angle MEN$ 三等分.

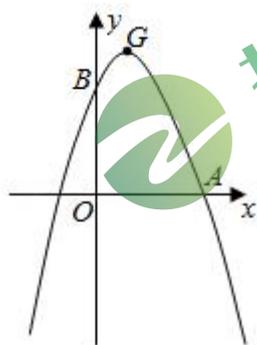
故答案为: $AB = OB$, EN 切半圆 O 于 F ; EB , EO 就把 $\angle MEN$ 三等分.

【点评】 本题考查了切线的性质, 全等三角形的判定和性质, 正确的识别图形是解题的关键.

21. (10分) (2020•河南) 如图, 抛物线 $y = -x^2 + 2x + c$ 与 x 轴正半轴, y 轴正半轴分别交于点 A , B , 且 $OA = OB$, 点 G 为抛物线的顶点.

(1) 求抛物线的解析式及点 G 的坐标;

(2) 点 M , N 为抛物线上两点 (点 M 在点 N 的左侧), 且到对称轴的距离分别为 3 个单位长度和 5 个单位长度, 点 Q 为抛物线上点 M , N 之间 (含点 M , N) 的一个动点, 求点 Q 的纵坐标 y_Q 的取值范围.



【考点】 $H5$: 二次函数图象上点的坐标特征; $H3$: 二次函数的性质; $H8$: 待定系数法求二次函数解析式



【专题】535：二次函数图象及其性质；69：应用意识

【分析】(1) 先求出点 B ，点 A 坐标，代入解析式可求 c 的值，即可求解；

(2) 先求出点 M ，点 N 坐标，即可求解。

【解答】解：(1) \because 抛物线 $y = -x^2 + 2x + c$ 与 y 轴正半轴分别交于点 B ，

\therefore 点 $B(0, c)$ ，

$\because OA = OB = c$ ，

\therefore 点 $A(c, 0)$ ，

$\therefore 0 = -c^2 + 2c + c$ ，

$\therefore c = 3$ 或 0 (舍去)，

\therefore 抛物线解析式为： $y = -x^2 + 2x + 3$ ，

$\because y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ ，

\therefore 顶点 G 为 $(1, 4)$ ；

(2) $\because y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ ，

\therefore 对称轴为直线 $x = 1$ ，

\because 点 M ， N 为抛物线上两点 (点 M 在点 N 的左侧)，且到对称轴的距离分别为 3 个单位长度和 5 个单位长度，

\therefore 点 M 的横坐标为 -2 或 4 ，点 N 的横坐标为 6 ，

\therefore 点 M 坐标为 $(-2, -5)$ 或 $(4, -5)$ ，点 N 坐标 $(6, -21)$ ，

\because 点 Q 为抛物线上点 M ， N 之间 (含点 M ， N) 的一个动点，

$\therefore -21 \leq y_Q \leq 4$ 。

【点评】本题考查了待定系数法求二次函数解析式，二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，熟练运用二次函数的性质解决问题是本题的关键。

22. (10 分) (2020·河南) 小亮在学习中遇到这样一个问题：

如图，点 D 是 \widehat{BC} 上一动点，线段 $BC = 8\text{cm}$ ，点 A 是线段 BC 的中点，过点 C 作 $CF \parallel BD$ ，交 DA 的延长线于点 F 。当 $\triangle DCF$ 为等腰三角形时，求线段 BD 的长度。

小亮分析发现，此问题很难通过常规的推理计算彻底解决，于是尝试结合学习函数的经验研究此问题。请将下面的探究过程补充完整：



(1) 根据点 D 在 \widehat{BC} 上的不同位置，画出相应的图形，测量线段 BD ， CD ， FD 的长度，得到下表的几组对应值。

BD/cm	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
CD/cm	8.0	7.7	7.2	6.6	5.9	a	3.9	2.4	0
FD/cm	8.0	7.4	6.9	6.5	6.1	6.0	6.2	6.7	8.0

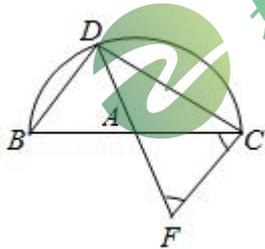
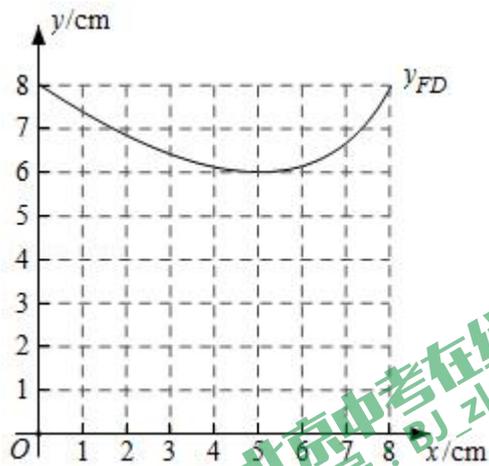
操作中发现：

① “当点 D 为 \widehat{BC} 的中点时， $BD = 5.0cm$ ”。则上表中 a 的值是 5；

② “线段 CF 的长度无需测量即可得到”。请简要说明理由。

(2) 将线段 BD 的长度作为自变量 x ， CD 和 FD 的长度都是 x 的函数，分别记为 y_{CD} 和 y_{FD} ，并在平面直角坐标系 xOy 中画出了函数 y_{FD} 的图象，如图所示。请在同一坐标系中画出函数 y_{CD} 的图象；

(3) 继续在同一坐标系中画出所需的函数图象，并结合图象直接写出：当 $\triangle DCF$ 为等腰三角形时，线段 BD 长度的近似值（结果保留一位小数）。



【考点】MR：圆的综合题

【专题】69：应用意识；532：函数及其图象；559：圆的有关概念及性质；553：图形的全



等

【分析】(1) ①由 $\widehat{BD} = \widehat{CD}$ 可求 $BD = CD = a = 5\text{cm}$;

②由“ AAS ”可证 $\triangle BAD \cong \triangle CAF$ ，可得 $BD = CF$ ，即可求解；

(2) 由题意可画出函数图象；

(3) 结合图象可求解。

【解答】解：(1) \because 点 D 为 \widehat{BC} 的中点，

$$\therefore \widehat{BD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore BD = CD = a = 5\text{cm},$$

故答案为：5；

(2) \because 点 A 是线段 BC 的中点，

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore CF \parallel BD,$$

$$\therefore \angle F = \angle BDA,$$

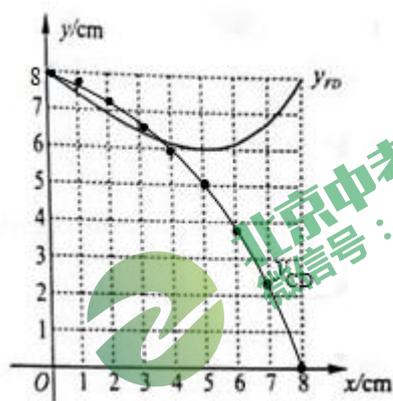
又 $\because \angle BAD = \angle CAF$ ，

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF (AAS),$$

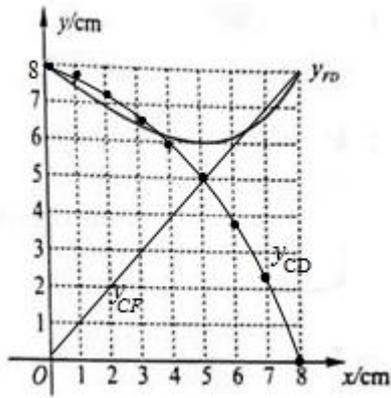
$$\therefore BD = CF,$$

\therefore 线段 CF 的长度无需测量即可得到；

(3) 由题意可得：



(4) 由题意画出函数 y_{CF} 的图象；



由图象可得： $BD = 3.8\text{cm}$ 或 5cm 或 6.2cm 时， $\triangle DCF$ 为等腰三角形。

【点评】 本题是圆的综合题，考查了圆的有关知识，全等三角形的判定和性质，动点问题的函数图象探究题，也考查了函数图象的画法，解题关键是数形结合。

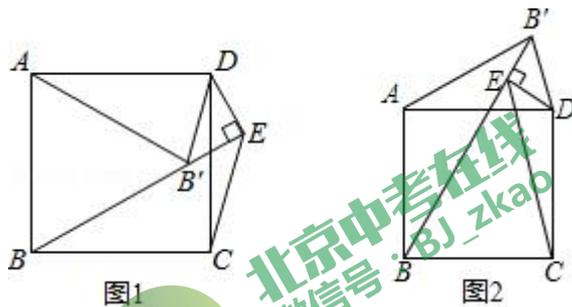
23. (11分)(2020·河南) 将正方形 $ABCD$ 的边 AB 绕点 A 逆时针旋转至 AB' ，记旋转角为 α ，连接 BB' ，过点 D 作 DE 垂直于直线 BB' ，垂足为点 E ，连接 DB' ， CE 。

(1) 如图1，当 $\alpha = 60^\circ$ 时， $\triangle DEB'$ 的形状为 等腰直角三角形，连接 BD ，可求出 $\frac{BB'}{CE}$ 的值为 ；

(2) 当 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ 且 $\alpha \neq 90^\circ$ 时，

① (1) 中的两个结论是否仍然成立？如果成立，请仅就图2的情形进行证明；如果不成立，请说明理由；

② 当以点 B' ， E ， C ， D 为顶点的四边形是平行四边形时，请直接写出 $\frac{BE}{B'E}$ 的值。



【考点】 LO ：四边形综合题

【专题】 55D：图形的相似；152：几何综合题；66：运算能力；67：推理能力；556：矩形 菱形 正方形

【分析】 (1) 由旋转的性质得出 $AB = AB'$ ， $\angle BAB' = 60^\circ$ ，证得 $\triangle ABB'$ 是等边三角形，可得出 $\triangle DEB'$ 是等腰直角三角形。证明 $\triangle BDB' \sim \triangle CDE$ ，得出 $\frac{BB'}{CE} = \frac{BD}{DC} = \sqrt{2}$ 。



(2) ① 得出 $\angle EDB' = \angle EB'D = 45^\circ$ ，则 $\triangle DEB'$ 是等腰直角三角形，得出 $\frac{DB'}{DE} = \sqrt{2}$ ，证明 \triangle

$B'DB \sim \triangle EDC$ ，由相似三角形的性质可得出 $\frac{BB'}{CE} = \frac{BD}{CD} = \sqrt{2}$ 。

② 分两种情况画出图形，由平行四边形的性质可得出答案。

【解答】 解：(1) $\because AB$ 绕点 A 逆时针旋转至 AB' ，

$\therefore AB = AB'$ ， $\angle BAB' = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形，

$\therefore \angle BB'A = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DAB' = \angle BAD - \angle BAB' = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

$\because AB' = AB = AD$ ，

$\therefore \angle AB'D = \angle ADB'$ ，

$\therefore \angle AB'D = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ ，

$\therefore \angle DB'E = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore DE \perp B'E$ ，

$\therefore \angle B'DE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle DEB'$ 是等腰直角三角形。

\because 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BDC = 45^\circ$ ，

$\therefore \frac{BD}{DC} = \sqrt{2}$ ，

同理 $\frac{B'D}{DE} = \sqrt{2}$ ，

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{B'D}{DE}$ ，

$\because \angle BDB' + \angle B'DC = 45^\circ$ ， $\angle EDC + \angle B'DC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BDB' = \angle EDC$ ，

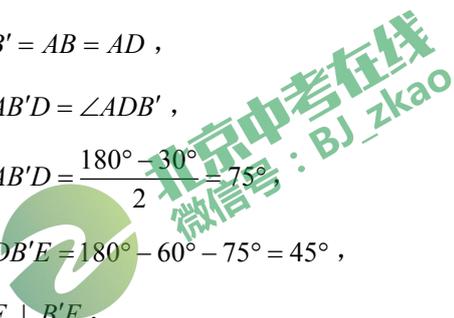
$\therefore \triangle BDB' \sim \triangle CDE$ ，

$\therefore \frac{BB'}{CE} = \frac{BD}{DC} = \sqrt{2}$ 。

故答案为：等腰直角三角形， $\frac{BB'}{CE} = \sqrt{2}$ 。

(2) ① 两结论仍然成立。

证明：连接 BD ，



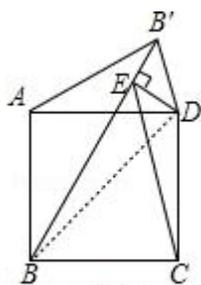


图1

$$\because AB = AB', \quad \angle BAB' = \alpha,$$

$$\therefore \angle AB'B = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\because \angle B'AD = \alpha - 90^\circ, \quad AD = AB',$$

$$\therefore \angle AB'D = 135^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \angle EB'D = \angle AB'D - \angle AB'B = 135^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ,$$

$$\because DE \perp BB',$$

$$\therefore \angle EDB' = \angle EB'D = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle DEB'$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \frac{DB'}{DE} = \sqrt{2},$$

\because 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \sqrt{2}, \quad \angle BDC = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{DB'}{DE},$$

$$\because \angle EDB' = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle EDB' + \angle EDB = \angle BDC + \angle EDB,$$

$$\text{即 } \angle B'DB = \angle EDC,$$

$$\therefore \triangle B'DB \sim \triangle EDC,$$

$$\therefore \frac{BB'}{CE} = \frac{BD}{CD} = \sqrt{2}.$$

$$\textcircled{2} \frac{BE}{B'E} = 3 \text{ 或 } 1.$$

若 CD 为平行四边形的对角线,

点 B' 在以 A 为圆心, AB 为半径的圆上, 取 CD 的中点. 连接 BO 交 $\odot A$ 于点 B' ,

过点 D 作 $DE \perp BB'$ 交 BB' 的延长线于点 E ,

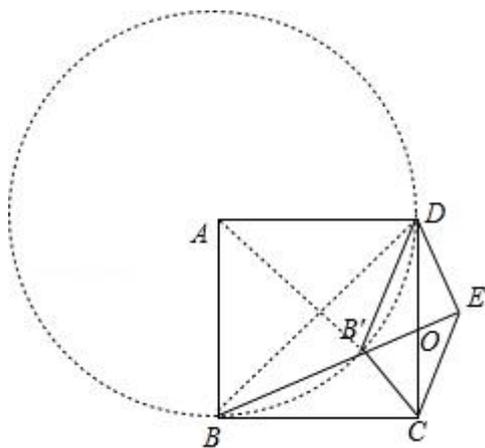


图2

由(1)可知 $\triangle B'ED$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore B'D = \sqrt{2}B'E,$$

由(2)①可知 $\triangle BDB' \sim \triangle CDE$, 且 $BB' = \sqrt{2}CE$.

$$\therefore \frac{BE}{B'E} = \frac{B'B + B'E}{B'E} = \frac{BB'}{B'E} + 1 = \frac{\sqrt{2}CE}{B'E} + 1 = \frac{\sqrt{2}B'D}{B'E} + 1 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 1 = 3.$$

若 CD 为平行四边形的一边, 如图3,

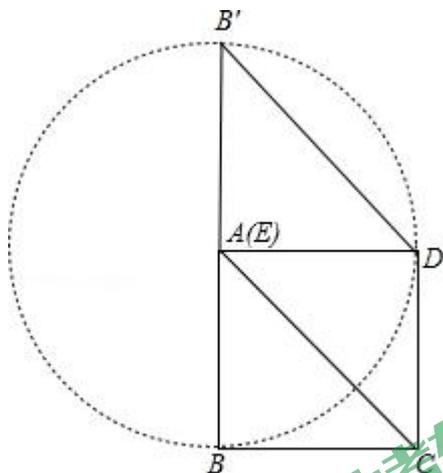


图3

点 E 与点 A 重合,

$$\therefore \frac{BE}{B'E} = 1.$$

综合以上可得 $\frac{BE}{B'E} = 3$ 或 1 .

【点评】本题是四边形综合题,考查了正方形的性质,等腰直角三角形的判定与性质,旋转的性质,等边三角形的判定与性质,相似三角形的判定与性质等知识,熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.