



2023 北京海淀高三（上）期末

数 学

2023.01

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

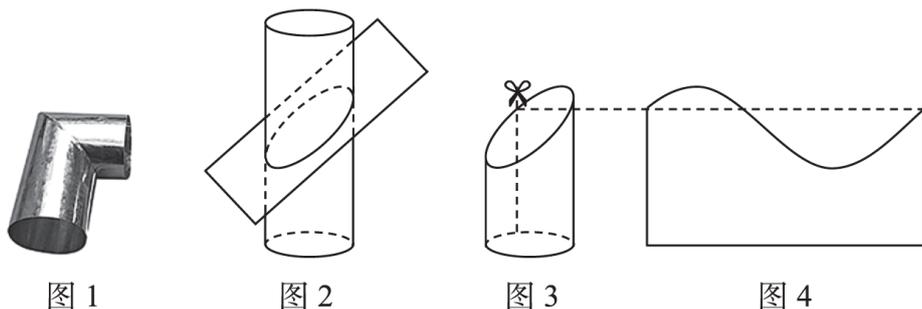
1. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()
A. $[-2, 3]$ B. $[0, 3]$ C. $(0, +\infty)$ D. $[-2, +\infty)$
2. 在复平面内, 复数 $\frac{1}{2-i}$ 对应的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$, 在下列区间中, 包含 $f(x)$ 零点的区间是 ()
A. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$
4. 已知 $a = \lg 5, b = \sin \frac{\pi}{7}, c = 2^{\frac{1}{3}}$, 则 ()
A. $a < b < c$ B. $b < a < c$
C. $b < c < a$ D. $a < c < b$
5. 若圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2ay + a^2 = 0$ 截直线 $x - 2y + 1 = 0$ 所得弦长为 2, 则 $a =$ ()
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
6. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 = 3, a_4 + a_6 = -10$. 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n + a_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_8 =$ ()
A. -32 B. -80 C. -192 D. -224
7. 某校高一年级计划举办足球比赛, 采用抽签的方式把全年级 6 个班分为甲、乙两组, 每组 3 个班, 则高一 (1) 班、高一 (2) 班恰好都在甲组的概率是 ()
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$
8. 设 α, β 是两个不同的平面, 直线 $m \subset \alpha$, 则 “对 β 内的任意直线 l , 都有 $m \perp l$ ” 是 “ $\alpha \perp \beta$ ” 的 ()
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件



9. 已知函数 $f(x) = \cos 2x$ 在区间 $\left[t, t + \frac{\pi}{3}\right]$ ($t \in \mathbf{R}$) 上的最大值为 $M(t)$, 则 $M(t)$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

10. 在实际生活中, 常常要用到如图 1 所示的“直角弯管”. 它的制作方法如下: 如图 2, 用一个与圆柱底面所成角为 45° 的平面截圆柱, 将圆柱截成两段, 再将这两段重新拼接就可以得到“直角弯管”. 在制作“直角弯管”时截得的截面是一个椭圆, 若将圆柱被截开的一段 (如图 3) 的侧面沿着圆柱的一条母线剪开, 并展开成平面图形, 则截面展开形成的图形恰好是某正弦型函数的部分图象 (如图 4). 记该正弦型函数的最小正周期为 T , 截面椭圆的离心率为 e . 若圆柱的底面直径为 2, 则 ()



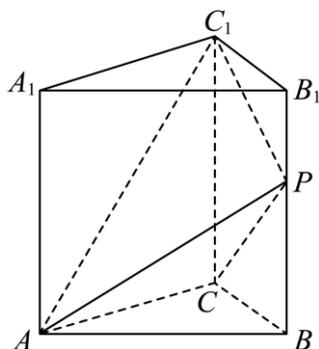
- A. $T = 2\pi, e = \frac{1}{2}$ B. $T = 2\pi, e = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 C. $T = 4\pi, e = \frac{1}{2}$ D. $T = 4\pi, e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点坐标为_____.

12. 在 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式中, x^2 的系数为_____.

13. 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, P 是棱 BB_1 上一点, $AB = AA_1 = 2$, 则三棱锥 $P - ACC_1$ 的体积为_____.



14. 设 O 为原点, 双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F , 点 P 在 C 的右支上. 则 C 的渐近线方程是



_____； $\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 的取值范围是_____.

15. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2t$, $g(x) = e^x - t$. 给出下列四个结论:

- ① 当 $t = 0$ 时, 函数 $y = f(x)g(x)$ 有最小值;
- ② $\exists t \in \mathbf{R}$, 使得函数 $y = f(x)g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增;
- ③ $\exists t \in \mathbf{R}$, 使得函数 $y = f(x) + g(x)$ 没有最小值;
- ④ $\exists t \in \mathbf{R}$, 使得方程 $f(x) + g(x) = 0$ 有两个根且两根之和小于 2.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$). 用五点法画 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}]$ 上的图象时, 取点列表如下:

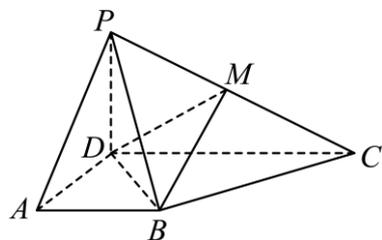
表如下:

x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0

- (1) 直接写出 $f(x)$ 的解析式及其单调递增区间;
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中, $f(B) = \frac{1}{2}, b = 2\sqrt{3}, a + c = 6$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面

$ABCD, AD \perp DC, AB \parallel DC, AB = \frac{1}{2}DC, PD = AD = 1$, M 为棱 PC 的中点.



- (1) 证明: $BM \parallel$ 平面 PAD ;
- (2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求二面角 $P-DM-B$ 的余弦值.

条件①: $PB = \sqrt{3}$; 条件②: $BD \perp BC$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

18. H 地区农科所统计历年冬小麦每亩产量的数据, 得到频率分布直方图 (如图 1), 考虑到受市场影响,



预测该地区明年冬小麦统一收购价格情况如表 1（该预测价格与亩产量互不影响）.

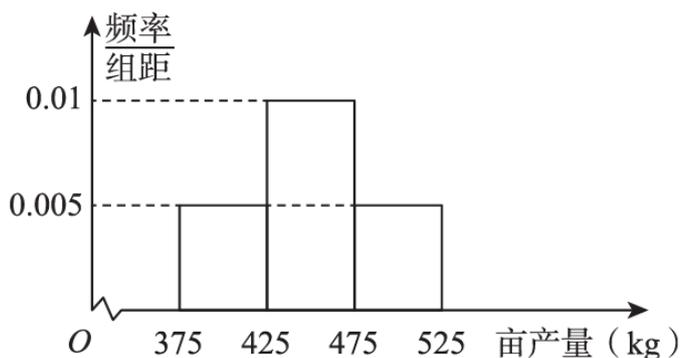


图 1

明年冬小麦统一收购价格（单位：元/kg）	2.4	3
概率	0.4	0.6

表 1

假设图 1 中同组的每个数据用该组区间的中点值估算，并以频率估计概率.

- (1) 试估计 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 1500 元的概率；
- (2) 设 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 X 元，求 X 的分布列和数学期望；
- (3) H 地区农科所研究发现，若每亩多投入 125 元的成本进行某项技术改良，则可使每亩冬小麦产量平均增加 50kg. 从广大种植户的平均收益角度分析，你是否建议农科所推广该项技术改良？并说明理由.

19. 已知函数 $f(x) = x \ln(x+1)$.

(1) 判断 0 是否为 $f(x)$ 的极小值点，并说明理由；

(2) 证明： $\frac{f(x)}{x^2} > -\frac{1}{2}x + 1$.

20. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $P(-2, 1)$ 和 $Q(2\sqrt{2}, 0)$.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 过点 $G(0, 2)$ 作直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 A, B ，直线 PA 交 y 轴于点 M ，直线 PB 交 y 轴于点 N . 若 $|GM| \cdot |GN| = 2$ ，求直线 l 的方程.

21. 对于一个有穷正整数数列 Q ，设其各项为 a_1, a_2, \dots, a_n ，各项和为 $S(Q)$ ，集合

$\{(i, j) \mid a_i > a_j, 1 \leq i < j \leq n\}$ 中元素的个数为 $T(Q)$.

(1) 写出所有满足 $S(Q) = 4, T(Q) = 1$ 数列 Q ；

(2) 对所有满足 $T(Q) = 6$ 的数列 Q ，求 $S(Q)$ 的最小值；

(3) 对所有满足 $S(Q) = 2023$ 的数列 Q ，求 $T(Q)$ 的最大值.



参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】D

【解析】

【分析】利用并集的定义可求得集合 $A \cup B$.

【详解】因为集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x | x > 0\}$ ，因此， $A \cup B = [-2, +\infty)$.

故选：D.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】根据复数除法运算化简复数，从而根据对应点的坐标得到结果.

【详解】 $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

\therefore 对应的点坐标为： $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

\therefore 对应的点位于第一象限

本题正确选项：A

【点睛】本题考查复数对应的复平面的点的问题，关键是能够通过复数的除法运算化简复数，属于基础题.

3. 【答案】D

【解析】

【分析】先判断出函数在定义域上连续且单调递增，计算出端点值，利用零点存在性定理得到答案.

【详解】 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$ 定义域为 $(0, +\infty)$ ，在定义域上连续且单调递增，

其中 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - 4 - 1 < 0$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 - 1 < 0$ ， $f(1) = \sqrt{1} - 1 - 1 < 0$ ，

$f(2) = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - 1 < 0$ ， $f(3) = \sqrt{3} - \frac{1}{3} - 1 > 0$ ，

由零点存在性定理可得：包含 $f(x)$ 零点的区间为 $(2, 3)$.

故选：D

4. 【答案】B

【解析】

【分析】根据指数函数的单调性、正弦函数的单调性、对数函数的单调性进行求解即可/

【详解】因为 $\lg\sqrt{10} < \lg 5 < \lg 10$ ，所以 $\frac{1}{2} < a < 1$ ，



因为 $\sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{\pi}{6}$, 所以 $b < \frac{1}{2}$,

因为 $2^{\frac{1}{3}} > 2^0$, 所以 $c > 1$, 因此 $b < a < c$,

故选: B

5. 【答案】C

【解析】

【分析】分析可知直线 $x - 2y + 1 = 0$ 过圆心, 由此可求得实数 a 的值.

【详解】圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 1$, 圆心为 $C(1, a)$, 圆的半径为 $r = 1$,

因为若圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2ay + a^2 = 0$ 截直线 $x - 2y + 1 = 0$ 所得弦长为 2,

所以, 直线 $x - 2y + 1 = 0$ 过圆心 C , 则 $1 - 2a + 1 = 0$, 解得 $a = 1$.

故选: C.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】求出等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 可求得数列 $\{b_n\}$ 的通项公式, 推导出数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 再利用等差数列的求和公式可求出 S_8 的值.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_4 + a_6 = 2a_5 = -10$, 所以, $a_5 = -5$,

$$\therefore d = \frac{a_5 - a_1}{4} = -2, \therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 3 - 2(n-1) = -2n + 5,$$

$$\text{所以, } b_n = a_n + a_{n+1} = -2n + 5 - 2(n+1) + 5 = -4n + 8,$$

则 $b_{n+1} - b_n = -4(n+1) + 8 - (-4n + 8) = -4$, 所以, 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列,

$$\text{因此, } S_8 = \frac{8(b_1 + b_8)}{2} = 4 \times (4 - 24) = -80.$$

故选: B

7. 【答案】C

【解析】

【分析】利用组合数的概念结合古典概型即可求解.

【详解】由题意得, 把全年级 6 个班分为甲、乙两组共有 $C_6^3 C_3^3 = 20$ 种方法,

高一 (1) 班、高一 (2) 班恰好都在甲组共有 $C_4^1 C_3^3 = 4$ 种方法,

$$\text{所以高一 (1) 班、高一 (2) 班恰好都在甲组的概率是 } \frac{C_4^1 C_3^3}{C_6^3 C_3^3} = \frac{1}{5},$$

故选: C

8. 【答案】A



【解析】

【分析】利用线面垂直的定义、面面垂直的判定定理结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】因为 α 、 β 是两个不同的平面，直线 $m \subset \alpha$ ，

若对 β 内的任意直线 l ，都有 $m \perp l$ ，根据线面垂直的定义可知 $m \perp \beta$ ，

$\because m \subset \alpha, \therefore \alpha \perp \beta$ ，

所以，“对 β 内的任意直线 l ，都有 $m \perp l$ ” \Rightarrow “ $\alpha \perp \beta$ ”；

若 $\alpha \perp \beta$ ，因为 $m \subset \alpha$ ，对 β 内的任意直线 l ， m 与 l 的位置关系不确定，

所以，“对 β 内任意直线 l ，都有 $m \perp l$ ” \nRightarrow “ $\alpha \perp \beta$ ”.

因此，“对 β 内的任意直线 l ，都有 $m \perp l$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的充分而不必要条件.

故选：A.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】根据 $f(x)$ 在 $x=t$ 取最大值，可判断 $\left[t, t + \frac{\pi}{3}\right] (t \in \mathbf{R})$ 要么在 $f(x)$ 的单调减区间上，要么满足左端点到对称轴 $\frac{\pi}{2} + k\pi$ 不小于右端点，即可得 $k\pi \leq t \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$ ，进而可求 $M(t)$ 的最小值.

【详解】 $f(x) = \cos 2x$ 的周期为 π ， $f(x) = \cos 2x$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ ，单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$

当 $x=t$ 取最大值，故可知 $\left[t, t + \frac{\pi}{3}\right] \not\subset \left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right]$ ，

当 $k\pi \leq t < t + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时，即 $k\pi \leq t \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ， $f(x)$ 在 $\left[t, t + \frac{\pi}{3}\right] (t \in \mathbf{R})$ 单调递减，显然满足最大值为 $M(t)$ ，

当 $k\pi \leq t < \frac{\pi}{2} + k\pi < t + \frac{\pi}{3}$ 时，要使 $M(t)$ 是最大值，则需满足

$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - t \geq \frac{\pi}{3} + t - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \Rightarrow k\pi \leq t \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

综上所述可知当 $k\pi \leq t \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时， $f(x)$ 在 $x=t$ 取最大值 $M(t)$ ，

$M(t) = 2 \cos 2t$ 在 $k\pi \leq t \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 单调递减，故当 $t = \frac{\pi}{3} + k\pi$ 时， $M(t)$ 取最小值，且最小值为

$$-\frac{1}{2},$$



故选：D

10. 【答案】B

【解析】

【分析】由条件求出椭圆的长半轴长 a 和短半轴长 b ，由此可求 a, b ，再求离心率 e ，再求圆柱侧面展开图的底边边长，由此可得正弦型函数的周期.

【详解】设截面椭圆的长半轴长为 a ，短半轴长为 b ，半焦距长为 c ，

因为圆柱的底面直径为2，所以 $2b = CD = 2$ ，故 $b = 1$ ，因为椭圆截面与底面的夹角为 45° ，所以

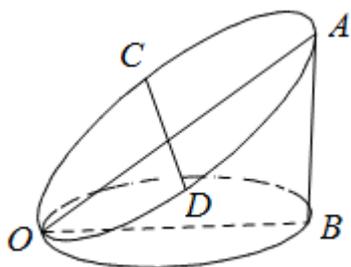
$\angle AOB = 45^\circ$ ，所以 $2b = OB = OA \cos 45^\circ = 2a \cos 45^\circ$ ，所以 $a = \sqrt{2}$ ，所以 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$ ，所以

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

观察图4知，正弦型函数的最小正周期 T 为圆柱的侧面展开图的底边边长，即圆柱的底面圆的周长，所以

$$T = 2\pi \times 1 = 2\pi.$$

故选：B.



二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 【答案】 $(\frac{1}{2}, 0)$.

【解析】

【详解】试题分析：焦点在 x 轴的正半轴上，且 $p=1$ ，利用焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$ ，写出焦点坐标.

解：抛物线 $y^2=2x$ 的焦点在 x 轴的正半轴上，且 $p=1$ ， $\therefore \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$ ，故焦点坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，

故答案为 $(\frac{1}{2}, 0)$.

考点：抛物线的简单性质.

12. 【答案】-8

【解析】

【分析】利用二项式定理得到 $(x - \frac{2}{x})^4$ 的展开通项，从而求得 x^2 的系数.

【详解】因为 $(x - \frac{2}{x})^4$ 的展开通项为 $T_{k+1} = C_4^k x^{4-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = (-2)^k C_4^k x^{4-2k}$ ，



令 $4 - 2k = 2$, 得 $k = 1$, 此时 $T_2 = (-2)^1 C_4^1 x^2 = -2 \times 4x^2 = -8x^2$,

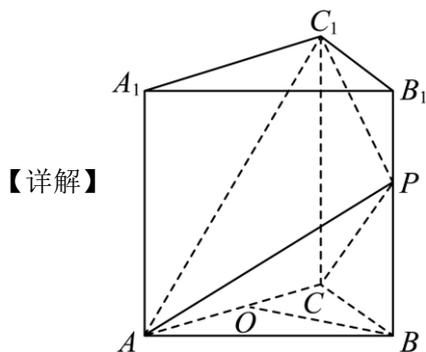
所以 x^2 的系数为 -8 .

故答案 : -8 .

13. 【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】利用线面垂直的判定定理确定三棱锥的高, 再用椎体体积公式求解即可.



取 AC 中点为 O , 连接 OB ,

因为 $\triangle ABC$ 为正三角形, 所以 $OB \perp AC$,

又因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $OB \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AA_1 \perp OB$,

且 $AA_1 \cap AC = A, AA_1, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $OB \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

$OB = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, 即 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $OB = \sqrt{3}$,

又因为 $BB_1 \parallel AA_1, BB_1 \not\subset$ 平面 $ACC_1A_1, AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $BB_1 \parallel$ 平面 ACC_1A_1 ,

又因为 P 是棱 BB_1 上一点, 所以 P 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $OB = \sqrt{3}$,

所以 $V_{P-ACC_1} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ACC_1} \times OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

14. 【答案】 ①. $y = \pm\sqrt{3}x$ ②. $(1, 2]$

【解析】

【分析】根据双曲线的标准方程与渐近线方程的关系可写出双曲线 C 的渐近线方程; 求出 $\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OF} \rangle$ 的取

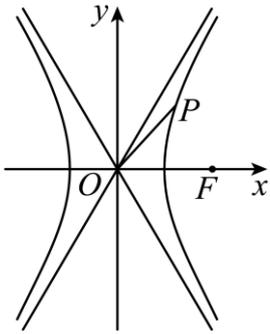


值范围, 可得出 $\frac{\overline{OP} \cdot \overline{OF}}{|\overline{OP}|} = 2 \cos \langle \overline{OP}, \overline{OF} \rangle$, 结合余弦函数的基本性质可求得 $\frac{\overline{OP} \cdot \overline{OF}}{|\overline{OP}|}$ 的取值范围.

【详解】在双曲线 C 中, $a=1, b=\sqrt{3}, c=\sqrt{a^2+b^2}=2$, 则 $F(2,0)$,

所以, 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm\sqrt{3}x$,

直线 $y = \sqrt{3}x$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$, 由题意可知 $0 \leq \langle \overline{OP}, \overline{OF} \rangle < \frac{\pi}{3}$, 则 $\frac{1}{2} < \cos \langle \overline{OP}, \overline{OF} \rangle \leq 1$,



所以, $\frac{\overline{OP} \cdot \overline{OF}}{|\overline{OP}|} = |\overline{OF}| \cos \langle \overline{OP}, \overline{OF} \rangle = 2 \cos \langle \overline{OP}, \overline{OF} \rangle \in (1, 2]$.

故答案为: $y = \pm\sqrt{3}x; (1, 2]$.

15. 【答案】①②④

【解析】

【分析】利用函数的最值与单调性的关系可判断①③的正误; 利用函数的单调性与导数的关系可判断②的正误; 取 $t = -1$, 利用导数研究函数的单调性, 结合零点存在定理可判断④的正误.

【详解】对于①, 当 $t = 0$ 时, $y = f(x)g(x) = (x^2 - 2x)e^x$, 则 $y' = (x^2 - 2)e^x$,

由 $y' < 0$ 可得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 由 $y' > 0$ 可得 $x < -\sqrt{2}$ 或 $x > \sqrt{2}$,

此时, 函数 $y = (x^2 - 2x)e^x$ 的增区间为 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 、 $(\sqrt{2}, +\infty)$, 减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时, $y = (x^2 - 2x)e^x > 0$, 当 $0 < x < 2$ 时, $y = (x^2 - 2x)e^x < 0$,

故函数 $y = (x^2 - 2x)e^x$ 在 $x = \sqrt{2}$ 处取得最小值, ①对;

对于②, $y' = (2x - 2)(e^x - t) + (x^2 - 2x + 2t)e^x = (x^2 - 2)e^x + 2t(e^x - x + 1)$,

令 $h(x) = e^x - x + 1$, 其中 $x \geq 1$, 则 $h'(x) = e^x - 1 > 0$,

所以, 函数 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以, $h(x) = e^x - x + 1 \geq h(1) = e > 0$,

则 $x - e^x \leq 1 - e < 0$,

由 $y' = (x^2 - 2)e^x + 2t(e^x - x + 1) \geq 0$ 可得 $2t \geq \frac{(2 - x^2)e^x}{e^x - x + 1}$,



构造函数 $p(x) = \frac{(2-x^2)e^x}{e^x-x+1}$, 其中 $x \geq 1$,

$$\text{则 } p'(x) = \frac{(x^3-4x+4-2xe^x)e^x}{(e^x-x+1)^2} = \frac{xe^x \left(x^2 - 4 + \frac{4}{x} - 2e^x \right)}{(e^x-x+1)^2},$$

令 $q(x) = x^2 - 4 + \frac{4}{x} - 2e^x$, 其中 $x \geq 1$, 则 $q'(x) = 2(x-e^x) - \frac{4}{x^2} < 0$,

所以, 函数 $q(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

故当 $x \geq 1$ 时, $q(x) \leq q(1) = 1 - 2e < 0$, 则 $p'(x) < 0$, 即 $p(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore p(x)_{\max} = p(1) = 1$, 则 $2t \geq 1$, 解得 $t \geq \frac{1}{2}$, ②对;

对于③, $y = f(x) + g(x) = x^2 - 2x + e^x + t$, $y' = 2x - 2 + e^x$,

因为函数 $y' = 2x - 2 + e^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

$\therefore y'|_{x=0} = -1 < 0$, $y'|_{x=1} = e > 0$, 所以, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $y' = 0$,

当 $x < x_0$ 时, $y' < 0$, 此时函数 $y = x^2 - 2x + e^x + t$ 单调递减,

当 $x > x_0$ 时, $y' > 0$, 此时函数 $y = x^2 - 2x + e^x + t$ 单调递增,

所以, 对任意的实数 t , 函数 $y = x^2 - 2x + e^x + t$ 有最小值, ③错;

对于④, 令 $u(x) = x^2 - 2x + e^x + t$, 不妨令 $u(0) = 1 + t = 0$, 即取 $t = -1$,

由③可知, 函数 $u(x) = x^2 - 2x + e^x - 1$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $x_0 \in (0, 1)$, 则 $u(x_0) < u(0) = 0$, $u(2) = e^2 - 1 > 0$,

所以, 存在 $x_1 \in (x_0, 2)$, 使得 $u(x_1) = 0$,

此时函数 $u(x)$ 的零点之和为 $x_1 + 0 = x_1 < 2$, ④对.

故答案为: ①②④.

【点睛】方法点睛: 利用导数解决函数零点问题的方法:

(1) 直接法: 先对函数求导, 根据导数的方法求出函数的单调区间与极值, 根据函数的基本性质作出图象, 然后将问题转化为函数图象与 x 轴的交点问题, 突出导数的工具作用, 体现了转化与化归思想、数形结合思想和分类讨论思想的应用;

(2) 构造新函数法: 将问题转化为研究两函数图象的交点问题;

(3) 参变量分离法: 由 $f(x) = 0$ 分离变量得出 $a = g(x)$, 将问题等价转化为直线 $y = a$ 与函数 $y = g(x)$ 的图象的交点问题.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.



16. 【答案】(1) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$;

(2) $2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】(1) 根据“五点法”可得函数的解析式，根据正弦函数的性质即得；

(2) 由题可得 $B = \frac{\pi}{3}$ ，然后根据余弦定理及三角形面积公式即得.

【小问 1 详解】

由题可知函数的最小正周期为 π ,

所以 $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,

根据“五点法”可得 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 可得 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$;

【小问 2 详解】

因为 $f(B) = \sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$, $2B + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right)$,

所以 $2B + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, 即 $B = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a+c)^2 - 2ac - 2ac \cos B$,

所以 $(2\sqrt{3})^2 = 6^2 - 3ac$, 即 $ac = 8$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

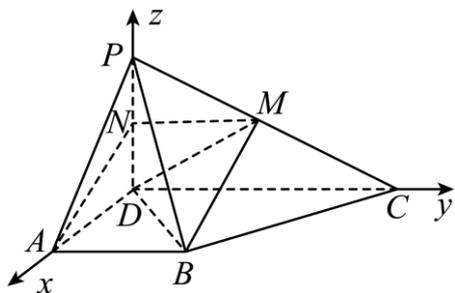
17. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】

【分析】(1) 利用线面平行的判定定理证明；(2) 利用空间向量的坐标运算求二面角的余弦值即可.

【小问 1 详解】



如图，取 PD 中点为 N ，连接 AN, MN ，

则有 $MN \parallel CD, MN = \frac{1}{2}CD$ ，

又因为 $AB \parallel CD, AB = \frac{1}{2}CD$ ，所以 $AB \parallel MN, AB = MN$ ，

所以四边形 $ABMN$ 是平行四边形，所以 $BM \parallel AN$ ，

又因为 $BM \not\subset$ 平面 PAD ， $AN \subset$ 平面 PAD ，

所以 $BM \parallel$ 平面 PAD 。

【小问 2 详解】

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, AD, DC \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PD \perp AD, PD \perp DC$ ，且 $AD \perp DC$ ，

所以以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}$ 为 x, y, z 轴建系如图，

若选择①： $PB = \sqrt{3}$ ，因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PD \perp BD$ ，所以 $BD = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$ ，则 $AB = \sqrt{2-1} = 1$ ，

所以 $CD = 2$ ，则 $D(0, 0, 0), B(1, 1, 0), P(0, 0, 1), C(0, 2, 0), M(0, 1, \frac{1}{2})$ ，

因为 $DA \perp$ 平面 PDC ，所以 $\overrightarrow{DA} = (1, 0, 0)$ 为平面 PDM 的一个法向量，

设平面 DMB 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$ ， $\overrightarrow{DB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{DM} = (0, 1, \frac{1}{2})$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \vec{m} = x + y = 0 \\ \overrightarrow{DM} \cdot \vec{m} = y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, y = -1, z = 2,$$

所以 $\vec{m} = (1, -1, 2)$ ，

$$\text{设二面角 } P-DM-B \text{ 为 } \theta, \cos \langle \overrightarrow{DA}, \vec{m} \rangle = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \vec{m}}{|\overrightarrow{DA}| |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

因为由图可知二面角 $P-DM-B$ 为钝角，所以 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 。

若选择②： $BD \perp BC$ ，设 $AB = a$ ，则 $CD = 2a$ ，



$$BD = \sqrt{a^2 + 1}, BC = \sqrt{a^2 + 1},$$

因为 $BD \perp BC$ ，所以 $a^2 + 1 + a^2 + 1 = 4a^2$ 解得 $a = 1$ ，

则 $D(0, 0, 0), B(1, 1, 0), P(0, 0, 1), C(0, 2, 0), M(0, 1, \frac{1}{2})$ ，

因为 $DA \perp$ 平面 PDC ，所以 $\overrightarrow{DA} = (1, 0, 0)$ 为平面 PDM 的一个法向量，

设平面 DMB 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$ ， $\overrightarrow{DB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{DM} = (0, 1, \frac{1}{2})$ ，

$$\text{所以} \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \vec{m} = x + y = 0 \\ \overrightarrow{DM} \cdot \vec{m} = y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}, \text{令 } x = 1, y = -1, z = 2,$$

所以 $\vec{m} = (1, -1, 2)$ ，

设二面角 $P-DM-B$ 为 θ ， $\cos \langle \overrightarrow{DA}, \vec{m} \rangle = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \vec{m}}{|\overrightarrow{DA}| |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，

因为由图可知二面角 $P-DM-B$ 为钝角，所以 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 。

18. 【答案】(1) 0.15

(2) 分布列答案见解析， $E(X) = 1242$

(3) 建议农科所推广该项技术改良，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 计算出亩产量是 500kg 的概率，结合表 1 以及独立事件的概率乘法公式可求得所求事件的概率；

(2) 分析可知随机变量 X 的可能取值有 960、1080、1200、1350、1500，计算出随机变量 X 在不同取值下的概率，可得出随机变量 X 的分布列，进而可求得 $E(X)$ 的值；

(3) 设增产前每亩冬小麦产量为 ξ kg，增产后每亩冬小麦产量为 η kg，则 $\eta = \xi + 50$ ，
设增产后的每亩冬小麦总价格为 Y 元，计算出增产的 50kg 会产生增加的收益，与 125 比较大小后可得出结论。

【小问 1 详解】

解：由图可知，亩产量是 400kg 的概率约为 $0.005 \times 50 = 0.25$ ，

亩产量是 450kg 的概率约为 $0.01 \times 50 = 0.5$ ，亩产量是 500kg 的概率约为 $0.005 \times 50 = 0.25$ ，

估计 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 1500 元的概率为 $0.25 \times 0.6 = 0.15$

【小问 2 详解】

解：由题意可知，随机变量 X 的可能取值有：960、1080、1200、1350、1500，

$P(X = 960) = 0.25 \times 0.4 = 0.1$ ， $P(X = 1080) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$ ，



$$P(X = 1200) = 0.25 \times 0.4 + 0.25 \times 0.6 = 0.25,$$

$$P(X = 1350) = 0.5 \times 0.6 = 0.3, \quad P(X = 1500) = 0.25 \times 0.6 = 0.15,$$

所以, 随机变量 X 的分布列如下表所示:

X	960	1080	1200	1350	1500
P	0.1	0.2	0.25	0.3	0.15

$$E(X) = 960 \times 0.1 + 1080 \times 0.2 + 1200 \times 0.25 + 1350 \times 0.3 + 1500 \times 0.15 = 1242.$$

【小问 3 详解】

解: 建议农科所推广该项技术改良,

设增产前每亩冬小麦产量为 ξ kg, 增产后每亩冬小麦产量为 η kg, 则 $\eta = \xi + 50$,

设增产后的每亩动漫小麦总价格为 Y 元, 分析可知 $E(Y) = E(X) + 50 \times (2.4 \times 0.4 + 3 \times 0.6)$,

所以, 增产的 50kg 会产生增加的收益为 $50 \times (2.4 \times 0.4 + 3 \times 0.6) = 138 > 125$,

故建议农科所推广该项技术改良.

19. 【答案】(1) 0 是 $f(x)$ 的极小值点, 理由见解析

(2) 证明过程见解析

【解析】

【分析】(1) 求 $f(x) = x \ln(x+1)$ 的定义域, 求导, 得到 $f'(0) = 0$, 且 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $x \in (0, +\infty)$

时, $f' x > 0$, 故 0 是 $f(x)$ 的极小值点;

(2) 对不等式变形得到 $\frac{\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x}{x} > 0$, 令 $g(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x (x > -1)$, 求导, 得到其单

调性, 从而得到 $g(x)$ 正负, 故 $\frac{\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x}{x} > 0$ 恒成立, 结论得证.

【小问 1 详解】

0 是 $f(x)$ 的极小值点, 理由如下:

$f(x) = x \ln(x+1)$ 定义域为 $(-1, +\infty)$,

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}, \quad \text{其中 } f'(0) = \ln 1 + \frac{0}{0+1} = 0,$$

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $\ln(x+1) < 0, \frac{x}{x+1} < 0$, 故 $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} < 0$,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln(x+1) > 0, \frac{x}{x+1} > 0$, 故 $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} > 0$,



故 $f(x) = x \ln(x+1)$ 在 $x \in (-1, 0)$ 上单调递减, 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增,

故 0 是 $f(x)$ 的极小值点;

【小问 2 详解】

$$\frac{f(x)}{x^2} > -\frac{1}{2}x+1 \text{ 等价于 } \frac{x \ln(x+1)}{x^2} > -\frac{1}{2}x+1,$$

$$\text{即 } \frac{\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x}{x} > 0,$$

$$\text{令 } g(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x (x > -1),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{x+1} + x - 1 = \frac{x^2}{x+1} (x > -1),$$

当 $x > -1$ 时, $g'(x) \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $x > -1$ 上单调递增,

$$\text{又 } g(0) = 0,$$

故当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $g(x) < g(0) = 0$,

$$\text{则 } \frac{\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x}{x} > 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{故 } \frac{f(x)}{x^2} > -\frac{1}{2}x+1.$$

20. 【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) $y = x + 2$ 或 $x = 0$

【解析】

【分析】(1) 两个点 $P(-2, 1), Q(2\sqrt{2}, 0)$ 代入解方程即可.

(2) 斜率不存在单独算出 $|GM| \cdot |GN| = 2$ 是否成立; 斜率存在时把 l 设出来与椭圆联立, 韦达定理求出两根之和与两根之积用斜率 k 来表示, 然后 $|GM| \cdot |GN|$ 用两个根表示, 化简求值即可.

【小问 1 详解】

$$\text{将点 } P(-2, 1), Q(2\sqrt{2}, 0) \text{ 坐标代入椭圆 } E \text{ 的方程, 得 } \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ \frac{8}{a^2} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } a^2 = 8, b^2 = 2, \text{ 所以椭圆 } E \text{ 的方}$$

$$\text{程为: } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$



【小问 2 详解】

若直线 l 的斜率不存在, 即直线 l 为 $x=0$ 时, A 和 M 重合, B 和 N 点重合, 分别为椭圆的上下顶点

$(0, \sqrt{2})(0, -\sqrt{2})$, 此时 $|GM| \cdot |GN| = (2 - \sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2}) = 2$, 符合题意.

若直线 l 斜率存在, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + 2$, $A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq -2$ 且 $x_2 \neq -2$), 联立方

$$\text{程} \begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{得, } (4k^2 + 1)x^2 + 16kx + 8 = 0, \Delta = (16k)^2 - 32(4k^2 + 1) = 32(4k^2 - 1) > 0, \therefore k^2 > \frac{1}{4},$$

$$\text{即 } k > \frac{1}{2} \text{ 或 } k < -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-16k}{4k^2 + 1} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{8}{4k^2 + 1} \quad k_{PA} = \frac{y_1 - 2}{x_1 + 2}, \text{ 所以直线 } PA \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1 - 2}{x_1 + 2}(x + 2) + 2, \text{ 取}$$

$$x = 0 \text{ 得 } M\left(0, \frac{2(y_1 - 2)}{x_1 + 2} + 2\right), \text{ 同理可得 } M\left(0, \frac{2(y_2 - 2)}{x_2 + 2} + 2\right)$$

$$\text{由 } |GM| \cdot |GN| = 2 \text{ 得 } \left|\frac{2(y_1 - 2)}{x_1 + 2} + 2 - 2\right| \cdot \left|\frac{2(y_2 - 2)}{x_2 + 2} + 2 - 2\right| = 2, \text{ 即 } \left|\frac{2(y_1 - 2)}{x_1 + 2} - 1\right| \cdot \left|\frac{2(y_2 - 2)}{x_2 + 2} - 1\right| = 2, \text{ 所以}$$

$$(2k - 1)^2 \left|\frac{x_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{x_2}{x_2 + 2}\right| = 2, \text{ 即 } (2k - 1)^2 \left|\frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}\right| = 2, \text{ 即}$$

$$(2k - 1)^2 \left|\frac{\frac{8}{4k^2 + 1}}{\frac{8}{4k^2 + 1} + \frac{-32k}{4k^2 + 1} + 4}\right| = 2$$

$$\text{即 } \left|\frac{(2k - 1)^2}{4k^2 - 8k + 3}\right| = 1, \text{ 因为 } k > \frac{1}{2}, \text{ 所以得 } \left|\frac{2k - 1}{2k - 3}\right| = 1, \text{ 即 } k = 1, \text{ 经检验符合题意, 此时直线 } l \text{ 为}$$

$$y = x + 2$$

综上所述, 直线 l 的方程为 $y = x + 2$ 或 $x = 0$.

21. 【答案】(1) 1, 2, 1 或 3, 1;

(2) 7; (3) 511566.

【解析】

【分析】(1)由题意可直接列举出数列 Q ;

(2)由题意可得 $n \geq 4$, 分 $n = 4$ 、 $n = 5$ 和 $n \geq 6$ 分别求 $S(Q)$ 的最小值即可得答案;

(3)由题意可得数列 Q 为 $2, 2, \dots, 2, 1, 1, \dots, 1$ 的形式, 设其中有 x 项为 2, 有 y 项为 1, 则有 $2x + y = 2023$, 所以 $T(Q) = -2x^2 + 2023x$, 再利用二次函数的性质求 $T(Q)$ 的最大值即可.

【小问 1 详解】



解：当 $T(Q)=1$ 时，存在一组 (i, j) ，满足 $a_i > a_j, 1 \leq i < j \leq n$ ，

又因为 a_1, a_2, \dots, a_n 的各项均为正整数，且 $S(Q) = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 4$ ，

所以 $a_n < 4$ ，即 $a_n \leq 3$ ，且 $i \geq 1, j \geq 2$ ，

当 $i=1, j=2$ 时，满足条件的数列 Q 只能是：3, 1；

当 $i=1, j=3$ 时，满足条件的数列 Q 只能是：1, 2, 1；

当 $i=1, j \geq 3$ 时，满足条件的数列 Q 不存在；

所以数列 Q ：1, 2, 1 或 3, 1；

【小问 2 详解】

解：由题意可知 $C_n^2 \geq 6$ ，所以 $n \geq 4$ ，

①当 $n=4$ 时，应有数列中各项均不相同，此时有 $S(Q) \geq 1+2+3+4=10$ ；

②当 $n=5$ 时，由于数列中各项必有不同的数，进而有 $S(Q) \geq 6$ 。

若 $S(Q)=6$ ，满足上述要求的数列中有四项为 1，一项为 2，此时 $T(Q) \leq 4$ ，不符合，

所以 $S(Q) \geq 7$ ；

③当 $n \geq 6$ 时，同②可得 $S(Q) \geq 7$ ；

综上所述，有 $S(Q) \geq 7$ ，同时当 Q 为 2, 2, 1, 1, 1 时， $S(Q)=7$ ，

所以 $S(Q)$ 的最小值为 7；

【小问 3 详解】

解：①存在大于 1 的项，否则此时有 $T(Q)=0$ ；

② $a_n=1$ ，否则将 a_n 拆分成 a_n 个 1 后 $T(Q)$ 变大；

③当 $t=1, 2, \dots, n-1$ 时，有 $a_t \geq a_{t+1}$ ，否则交换 a_t, a_{t+1} 顺序后 $T(Q)$ 变为 $T(Q)+1$ ，进一步有

$$a_t - a_{t+1} \in \{0, 1\},$$

否则有 $a_t \geq a_{t+1} + 2$ ，此时将 a_t 改为 $a_t - 1$ ，并在数列末尾添加一项 1，此时 $T(Q)$ 变大；

④各项只能为 2 或 1，否则由①②③可得数列 Q 中有存在相邻的两项 $a_t=3, a_{t+1}=2$ ，设此时 Q 中有 x 项为

2，则将 a_t 改为 2，并在数列末尾添加一项 1 后， $T(Q)$ 的值至少变为 $T(Q) + x + 1 - x = T(Q) + 1$ ；

⑤由上可得数列 Q 为 $2, 2, \dots, 2, 1, 1, \dots, 1$ 的形式，设其中有 x 项为 2，有 y 项为 1，则有 $2x + y = 2023$ ，

从而有 $T(Q) = xy = (2023 - 2x)x = -2x^2 + 2023x$ ，

由二次函数的性质可得，当且仅当 $\begin{cases} x=506 \\ y=1011 \end{cases}$ 时， $T(Q)$ 最大，为 511566。

【点睛】 关键点睛：本题考查了无穷数列的前 n 项和及满足集合 $\{(i, j) \mid a_i > a_j, 1 \leq i < j \leq n\}$ 中元素的个



数，属于难点，在解答每一小问时，要紧扣 Q 还是一个正整数数列，进行逻辑推理，从而得出结论.