2023北京海淀高三（上）期末

数　　学

2023.01

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|-2\le x\le 3\}$， $B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A $[-2,3]$　　　B. $[0,3]$　　　C. $(0,+\infty)$　　　D. $[-2,+\infty)$

2. 在复平面内，复数 $\dfrac{1}{2-i}$ 对应的点位于（　）

A 第一象限　　　B. 第二象限　　　C. 第三象限　　　D. 第四象限

3. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}-1$，在下列区间中，包含 $f(x)$ 零点的区间是（　　）

A. $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　　　B. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　　C. $(1,2)$　　　D. $(2,3)$

4. 已知 $a=\lg 5,b=\sin\dfrac{\pi}{7},c=2^{\frac{1}{3}}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　　D. $a<c<b$

5. 若圆 $x^2+y^2-2x-2ay+a^2=0$ 截直线 $x-2y+1=0$ 所得弦长为 2，则 $a=$（　　）

A. -1　　　B. 0　　　C. 1　　　D. 2

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=3$，$a_4+a_6=-10$.若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_8=$（　　）

A. -32　　　B. -80　　　C. -192　　　D. -224

7. 某校高一年级计划举办足球比赛，采用抽签的方式把全年级6个班分为甲、乙两组，每组3个班，则高一（1）班、高一（2）班恰好都在甲组的概率是（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　　B. $\dfrac{1}{4}$　　　C. $\dfrac{1}{5}$　　　D. $\dfrac{1}{6}$

8. 设 α、β 是两个不同的平面，直线 $m\subset\alpha$，则“对 β 内的任意直线 l，都有 $m\perp l$”是“$\alpha\perp\beta$”的（　　）

A 充分而不必要条件　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f\left(x\right)=\cos 2x$ 在区间 $\left[t,t+\frac{\pi}{3}\right]\left(t\in \mathbf{R}\right)$ 上的最大值为 $M\left(t\right)$，则 $M\left(t\right)$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

10. 在实际生活中，常常要用到如图 1 所示的“直角弯管”.它的制作方法如下：如图 2，用一个与圆柱底面所成角为 45° 的平面截圆柱，将圆柱截成两段，再将这两段重新拼接就可以得到“直角弯管”.在制作“直角弯管”时截得的截口是一个椭圆，若将圆柱被截开的一段（如图 3）的侧面沿着圆柱的一条母线剪开，并展开成平面图形，则截口展开形成的图形恰好是某正弦型函数的部分图象（如图 4）.记该正弦型函数的最小正周期为 T，截口椭圆的离心率为 e.若圆柱的底面直径为 2，则（　　）


图 1

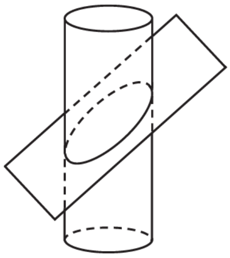


图 2

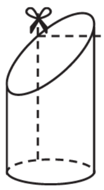


图 3

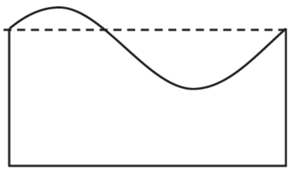


图 4

A. $T=2\pi,e=\frac{1}{2}$　　B. $T=2\pi,e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

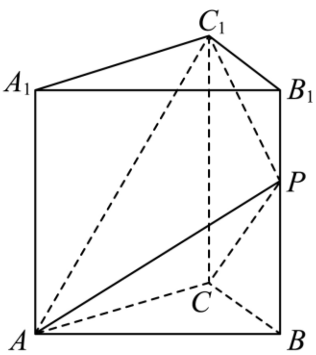
C. $T=4\pi,e=\frac{1}{2}$　　D. $T=4\pi,e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 抛物线 $y^2=2x$ 的焦点坐标为____.

12. 在 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式中，x^2 的系数为__________.

13. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，P 是棱 BB_1 上一点，$AB=AA_1=2$，则三棱锥 $P-ACC_1$ 的体积为__________.



14. 设 O 为原点，双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，点 P 在 C 的右支上.则 C 的渐近线方程是

__________；$\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$的取值范围是__________.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-2x+2t$，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^x-t$.给出下列四个结论：

①当 $t=0$ 时，函数 $y=f\left(x\right)g\left(x\right)$ 有最小值；

②$\exists t\in\mathbf{R}$，使得函数 $y=f\left(x\right)g\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递增；

③$\exists t\in\mathbf{R}$，使得函数 $y=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 没有最小值；

④$\exists t\in\mathbf{R}$，使得方程 $f\left(x\right)+g\left(x\right)=0$ 有两个根且两根之和小于 2.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

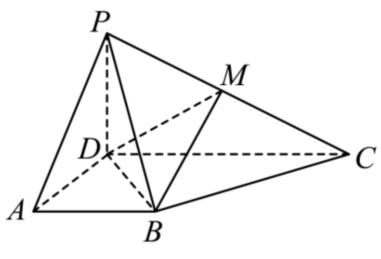
16. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$.用五点法画 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12}\right]$ 上的图象时，取点列表如下：

x	$-\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{12}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{11\pi}{12}$
$f\left(x\right)$	0	1	0	-1	0

（1）直接写出 $f\left(x\right)$ 的解析式及其单调递增区间；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，$f\left(B\right)=\dfrac{1}{2},b=2\sqrt{3},a+c=6$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD,AD\perp DC,AB\,/\!/\,DC,AB=\dfrac{1}{2}DC,PD=AD=1$，$M$ 为棱 PC 的中点.



（1）证明：$BM\,//$ 平面 PAD；

（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求二面角 $P-DM-B$ 的余弦值.

条件①：$PB=\sqrt{3}$；条件②：$BD\perp BC$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18. H 地区农科所统计历年冬小麦每亩产量的数据，得到频率分布直方图（如图 1），考虑到受市场影响，

预测该地区明年冬小麦统一收购价格情况如表1（该预测价格与亩产量互不影响）.

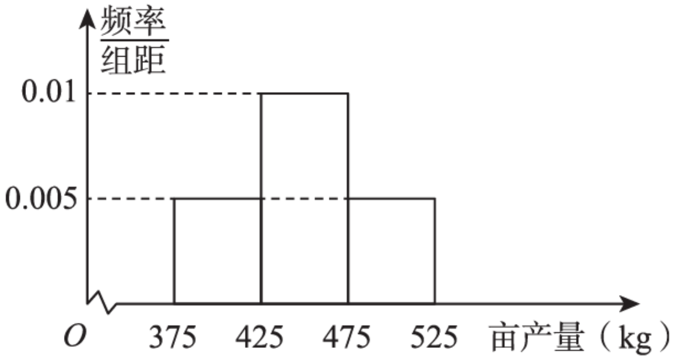


图1

明年冬小麦统一收购价格（单位：元/kg）	2.4	3
概率	0.4	0.6

表1

假设图1中同组的每个数据用该组区间的中点值估算，并以频率估计概率.

（1）试估计H地区明年每亩冬小麦统一收购总价为1500元的概率；

（2）设H地区明年每亩冬小麦统一收购总价为X元，求X的分布列和数学期望；

（3）H地区农科所研究发现，若每亩多投入125元的成本进行某项技术改良，则可使每亩冬小麦产量平均增加50kg.从广大种植户的平均收益角度分析，你是否建议农科所推广该项技术改良？并说明理由.

19. 已知函数$f\left(x\right)=x\ln\left(x+1\right)$.

（1）判断0是否为$f\left(x\right)$的极小值点，并说明理由；

（2）证明：$\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}>-\dfrac{1}{2}x+1$.

20. 已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$过点$P\left(-2,1\right)$和$Q\left(2\sqrt{2},0\right)$.

（1）求椭圆E的方程；

（2）过点$G\left(0,2\right)$作直线l交椭圆E于不同的两点A,B，直线PA交y轴于点M，直线PB交y轴于点N.若$\left|GM\right|\cdot\left|GN\right|=2$，求直线$l$的方程.

21. 对于一个有穷正整数数列Q，设其各项为$a_1,a_2,\cdots,a_n$，各项和为$S\left(Q\right)$，集合$\left\{\left(i,j\right)\mid a_i>a_j,1\le i<j\le n\right\}$中元素的个数为$T\left(Q\right)$.

（1）写出所有满足$S\left(Q\right)=4,T\left(Q\right)=1$　数列Q；

（2）对所有满足$T\left(Q\right)=6$的数列Q，求$S\left(Q\right)$的最小值；

（3）对所有满足$S\left(Q\right)=2023$的数列Q，求$T\left(Q\right)$的最大值.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】D

【解析】

【分析】利用并集的定义可求得集合 $A\cup B$.

【详解】因为集合 $A=\left\{x\middle|-2\le x\le 3\right\}$，$B=\left\{x\middle|x>0\right\}$，因此，$A\cup B=\left[-2,+\infty\right)$.

故选：D.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】根据复数除法运算化简复数，从而根据对应点的坐标得到结果.

【详解】$\dfrac{1}{2-i}=\dfrac{2+i}{\left(2-i\right)\left(2+i\right)}=\dfrac{2+i}{5}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$

$\therefore$对应的点坐标为：$\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5}\right)$

$\therefore$对应的点位于第一象限

本题正确选项：A

【点睛】本题考查复数对应的复平面的点的问题，关键是能够通过复数的除法运算化简复数，属于基础题.

3. 【答案】D

【解析】

【分析】先判断出函数在定义域上连续且单调递增，计算出端点值，利用零点存在性定理得到答案.

【详解】$f\left(x\right)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}-1$定义域为$\left(0,+\infty\right)$，在定义域上连续且单调递增，

其中 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}-4-1<0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2-1<0$，$f\left(1\right)=\sqrt{1}-1-1<0$，

$f\left(2\right)=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}-1<0$，$f\left(3\right)=\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}-1>0$，

由零点存在性定理可得：包含 $f\left(x\right)$零点的区间为$\left(2,3\right)$.

故选：D

4. 【答案】B

【解析】

【分析】根据指数函数的单调性、正弦函数的单调性、对数函数的单调性进行求解即可/

【详解】因为$\lg\sqrt{10}<\lg5<\lg10$，所以$\dfrac{1}{2}<a<1$，

因为$\sin\frac{\pi}{7}<\sin\frac{\pi}{6}$，所以$b<\frac{1}{2}$，

因为$2^{\frac{1}{3}}>2^0$，所以$c>1$，因此$b<a<c$，

故选：B

5. 【答案】C

【解析】

【分析】分析可知直线$x-2y+1=0$过圆心，由此可求得实数a的值.

【详解】圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-a)^2=1$，圆心为$C(1,a)$，圆的半径为$r=1$，

因为若圆$x^2+y^2-2x-2ay+a^2=0$截直线$x-2y+1=0$所得弦长为2，

所以，直线$x-2y+1=0$过圆心C，则$1-2a+1=0$，解得$a=1$.

故选：C.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】求出等差数列$\{a_n\}$的通项公式，可求得数列$\{b_n\}$的通项公式，推导出数列$\{b_n\}$为等差数列，再利用等差数列的求和公式可求出S_8的值.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_4+a_6=2a_5=-10$，所以，$a_5=-5$，

$\therefore d=\frac{a_5-a_1}{4}=-2$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=3-2(n-1)=-2n+5$，

所以，$b_n=a_n+a_{n+1}=-2n+5-2(n+1)+5=-4n+8$，

则$b_{n+1}-b_n=-4(n+1)+8-(-4n+8)=-4$，所以，数列$\{b_n\}$为等差数列，

因此，$S_8=\frac{8(b_1+b_8)}{2}=4\times(4-24)=-80$.

故选：B

7. 【答案】C

【解析】

【分析】利用组合数的概念结合古典概型即可求解.

【详解】由题意得，把全年级6个班分为甲、乙两组共有$\mathrm{C}_6^3\mathrm{C}_3^3=20$种方法，

高一（1）班、高一（2）班恰好都在甲组共有$\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^3=4$种方法，

所以高一（1）班、高一（2）班恰好都在甲组的概率是$\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^3}{\mathrm{C}_6^3\mathrm{C}_3^3}=\frac{1}{5}$，

故选:C

8. 【答案】A

【解析】

【分析】利用线面垂直的定义、面面垂直的判定定理结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】因为α、β是两个不同的平面，直线$m\subset\alpha$，

若对β内的任意直线l，都有$m\perp l$，根据线面垂直的定义可知$m\perp\beta$，

$\because m\subset\alpha$，$\therefore\alpha\perp\beta$，

所以，“对β内的任意直线l，都有$m\perp l$”$\Rightarrow$“$\alpha\perp\beta$”；

若$\alpha\perp\beta$，因为$m\subset\alpha$，对β内的任意直线l，m与l的位置关系不确定，

所以，“对β内　任意直线l，都有$m\perp l$”$\not\Leftarrow$“$\alpha\perp\beta$”.

因此，“对β内的任意直线l，都有$m\perp l$”是“$\alpha\perp\beta$”的充分而不必要条件.

故选：A.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】根据$f\left(x\right)$在$x=t$取最大值，可判断$\left[t,t+\frac{\pi}{3}\right]\left(t\in\mathbf{R}\right)$要么在$f\left(x\right)$的单调减区间上，要么满足左端点到对称轴$\frac{\pi}{2}+k\pi$不小于右端点，即可得$k\pi\le t\le\frac{\pi}{3}+k\pi$，进而可求$M\left(t\right)$的最小值.

【详解】$f\left(x\right)=\cos2x$的周期为π，$f\left(x\right)=\cos2x$的单调递增区间为$\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$, $k\in Z$,单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right]$，$k\in Z$

当$x=t$取最大值，故可知$\left[t,t+\frac{\pi}{3}\right]\not\subset\left[\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right]$，

当$k\pi\le t<t+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+k\pi$时，即$k\pi\le t\le\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in Z$, $f\left(x\right)$在$\left[t,t+\frac{\pi}{3}\right]\left(t\in\mathbf{R}\right)$单调递减，显然满足最大值为$M\left(t\right)$，

当$k\pi\le t<\frac{\pi}{2}+k\pi<t+\frac{\pi}{3}$时，要使$M\left(t\right)$是最大值，则需满足

$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-t\ge\frac{\pi}{3}+t-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\Rightarrow k\pi\le t\le\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in Z$

综上可知当$k\pi\le t\le\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$时，$f\left(x\right)$在$x=t$取最大值$M\left(t\right)$，

$M\left(t\right)=2\cos2t$在$k\pi\le t\le\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$单调递减，故当$t=\frac{\pi}{3}+k\pi$时，$M\left(t\right)$取最小值，且最小值为$-\frac{1}{2}$，

故选：D

10. 【答案】B

【解析】

【分析】由条件求出椭圆的长半轴长a和短半轴长b，由此可求a,b，再求离心率e，再求圆柱侧面展开图的底边边长，由此可得正弦型函数的周期.

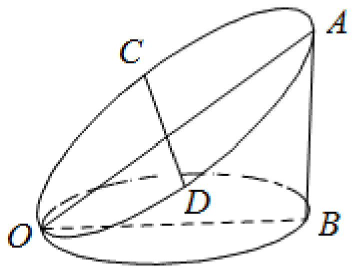
【详解】设截口椭圆的长半轴长为a，短半轴长为b，半焦距长为c，

因为圆柱的底面直径为2，所以$2b=CD=2$，故$b=1$，因为椭圆截面与底面的夹角为45°，所以$\angle AOB=45^{\circ}$，所以$2b=OB=OA\cos 45^{\circ}=2a\cos 45^{\circ}$，所以$a=\sqrt{2}$，所以$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，所以

$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

观察图4知，正弦型函数的最小正周期T为圆柱的侧面展开图的底边边长，即圆柱的底面圆的周长，所以$T=2\pi\times 1=2\pi$.

故选：B.



二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 【答案】($\frac{1}{2}$，0).

【解析】

【详解】试题分析：焦点在x轴的正半轴上，且p=1，利用焦点为（$\frac{p}{2}$，0），写出焦点坐标.

解：抛物线$y^2=2x$的焦点在x轴的正半轴上，且p=1，∴$\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$，故焦点坐标为（$\frac{1}{2}$，0），

故答案为（$\frac{1}{2}$，0）.

考点：抛物线的简单性质.

12. 【答案】-8

【解析】

【分析】利用二项式定理得到$\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$的展开通项，从而求得$x^2$的系数.

【详解】因为$\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$的展开通项为$T_{k+1}=C_4^k x^{4-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k=(-2)^k C_4^k x^{4-2k}$，

令 $4-2k=2$，得 $k=1$，此时 $T_2=(-2)^1 C_4^1 x^2=-2\times 4x^2=-8x^2$，

所以 x^2 的系数为 -8.

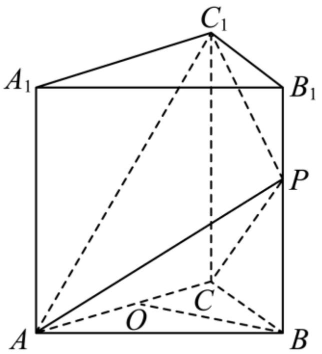
故答案　：-8.

13. 【答案】$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】利用线面垂直的判定定理确定三棱锥的高，再用椎体体积公式求解即可.

【详解】



取 AC 中点为 O,连接 OB，

因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，所以 $OB\perp AC$，

又因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC， $OB\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp OB$,

且 $AA_1\cap AC=A, AA_1, AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $OB\perp$ 平面 ACC_1A_1，

$OB=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$,即 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $OB=\sqrt{3}$，

又因为 $BB_1 // AA_1, BB_1\not\subset$ 平面 $ACC_1A_1, AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1,

所以 $BB_1 //$ 平面 ACC_1A_1，

又因为 P 是棱 BB_1 上一点，所以 P 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $OB=\sqrt{3}$,

所以 $V_{P-ACC_1}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ACC_1}\times OB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

故答案为: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

14. 【答案】　①. $y=\pm\sqrt{3}x$　　②. $(1,2]$

【解析】

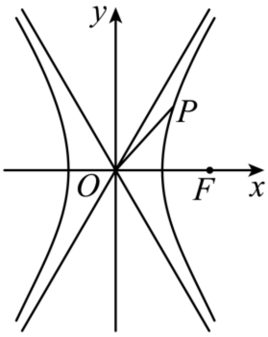
【分析】根据双曲线的标准方程与渐近线方程的关系可写出双曲线 C 的渐近线方程；求出 $<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OF}>$ 的取

值范围，可得出 $\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}=2\cos<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OF}>$，结合余弦函数的基本性质可求得 $\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$ 的取值范围.

【详解】在双曲线 C 中，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，则 $F(2,0)$，

所以，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{3}x$，

直线 $y=\sqrt{3}x$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，由题意可知 $0\le<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OF}><\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{1}{2}<\cos<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OF}>\le 1$，



所以，$\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}=\left|\overrightarrow{OF}\right|\cos<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OF}>=2\cos<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OF}>\in(1,2]$.

故答案为：$y=\pm\sqrt{3}x$；$(1,2]$.

15. 【答案】①②④

【解析】

【分析】利用函数的最值与单调性的关系可判断①③的正误；利用函数的单调性与导数的关系可判断②的正误；取 $t=-1$，利用导数研究函数的单调性，结合零点存在定理可判断④的正误.

【详解】对于①，当 $t=0$ 时，$y=f(x)g(x)=(x^2-2x)e^x$，则 $y'=(x^2-2)e^x$，

由 $y'<0$ 可得 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，由 $y'>0$ 可得 $x<-\sqrt{2}$ 或 $x>\sqrt{2}$，

此时，函数 $y=(x^2-2x)e^x$ 的增区间为 $(-\infty,-\sqrt{2})$、$(\sqrt{2},+\infty)$，减区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，

当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$y=(x^2-2x)e^x>0$，当 $0<x<2$ 时，$y=(x^2-2x)e^x<0$，

故函数 $y=(x^2-2x)e^x$　$x=\sqrt{2}$ 处取得最小值，①对；

对于②，$y'=(2x-2)(e^x-t)+(x^2-2x+2t)e^x=(x^2-2)e^x+2t(e^x-x+1)$，

令 $h(x)=e^x-x+1$，其中 $x\ge 1$，则 $h'(x)=e^x-1>0$，

所以，函数 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以，$h(x)=e^x-x+1\ge h(1)=e>0$，

则 $x-e^x\le 1-e<0$，

由 $y'=(x^2-2)e^x+2t(e^x-x+1)\ge 0$ 可得 $2t\ge\frac{(2-x^2)e^x}{e^x-x+1}$，

构造函数 $p\left(x\right)=\dfrac{\left(2-x^{2}\right)\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-x+1}$，其中 $x\geq 1$，

则 $p'\left(x\right)=\dfrac{\left(x^{3}-4x+4-2x\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}-x+1\right)^{2}}=\dfrac{x\mathrm{e}^{x}\left(x^{2}-4+\dfrac{4}{x}-2\mathrm{e}^{x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{x}-x+1\right)^{2}}$，

令 $q\left(x\right)=x^{2}-4+\dfrac{4}{x}-2\mathrm{e}^{x}$，其中 $x\geq 1$，则 $q'\left(x\right)=2\left(x-\mathrm{e}^{x}\right)-\dfrac{4}{x^{2}}<0$，

所以，函数 $q\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递减，

故当 $x\geq 1$ 时，$q\left(x\right)\leq q\left(1\right)=1-2\mathrm{e}<0$，则 $p'\left(x\right)<0$，即 $p\left(x\right)$　$\left[1,+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore p\left(x\right)_{\max}=p\left(1\right)=1$，则 $2t\geq 1$，解得 $t\geq\dfrac{1}{2}$，②对；

对于③，$y=f\left(x\right)+g\left(x\right)=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$，$y'=2x-2+\mathrm{e}^{x}$，

因为函数 $y'=2x-2+\mathrm{e}^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\because y'|_{x=0}=-1<0$，$y'|_{x=1}=\mathrm{e}>0$，所以，存在 $x_{0}\in\left(0,1\right)$，使得 $y'=0$，

当 $x<x_{0}$ 时，$y'<0$，此时函数 $y=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$ 单调递减，

当 $x>x_{0}$ 时，$y'>0$，此时函数 $y=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$ 单调递增，

所以，对任意的实数 t，函数 $y=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$ 有最小值，③错；

对于④，令 $u\left(x\right)=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$，不妨令 $u\left(0\right)=1+t=0$，即取 $t=-1$，

由③可知，函数 $u\left(x\right)=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}-1$ 在 $\left(-\infty,x_{0}\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_{0},+\infty\right)$ 上单调递增，

因为 $x_{0}\in\left(0,1\right)$，则 $u\left(x_{0}\right)<u\left(0\right)=0$，$u\left(2\right)=\mathrm{e}^{2}-1>0$，

所以，存在 $x_{1}\in\left(x_{0},2\right)$，使得 $u\left(x_{1}\right)=0$，

此时函数 $u\left(x\right)$ 的零点之和为 $x_{1}+0=x_{1}<2$，④对.

故答案为：①②④.

【点睛】方法点睛：利用导数解决函数零点问题的方法：

（1）直接法：先对函数求导，根据导数的方法求出函数的单调区间与极值，根据函数的基本性质作出图象，然后将问题转化为函数图象与 x 轴的交点问题，突出导数的工具作用，体现了转化与化归思想、数形结合思想和分类讨论思想的应用；

（2）构造新函数法：将问题转化为研究两函数图象的交点问题；

（3）参变量分离法：由 $f\left(x\right)=0$ 分离变量得出 $a=g\left(x\right)$，将问题等价转化为直线 $y=a$ 与函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象的交点问题.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$；$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]\left(k\in \mathrm{Z}\right)$；

(2) $2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】(1) 根据"五点法"可得函数的解析式，根据正弦函数的性质即得；

(2) 由题可得 $B=\dfrac{\pi}{3}$，然后根据余弦定理及三角形面积公式即得.

【小问 1 详解】

由题可知函数的最小正周期为 π，

所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，

根据"五点法"可得 $2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in \mathrm{Z}$，可得 $k\pi-\dfrac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\in \mathrm{Z}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]\left(k\in \mathrm{Z}\right)$；

【小问 2 详解】

因为 $f\left(B\right)=\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，又 $B\in\left(0,\pi\right)$，$2B+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6}\right)$，

所以 $2B+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$，即 $B=\dfrac{\pi}{3}$，

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=\left(a+c\right)^2-2ac-2ac\cos B$，

所以 $\left(2\sqrt{3}\right)^2=6^2-3ac$，即 $ac=8$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

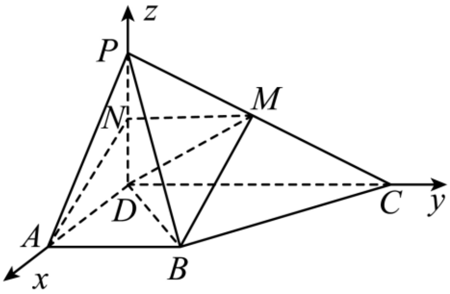
17. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】

【分析】(1)利用线面平行的判定定理证明；(2)利用空间向量的坐标运算求二面角的余弦值即可.

【小问 1 详解】



如图，取 PD 中点为 N ，连接 AN,MN ，

则有 $MN//CD, MN=\frac{1}{2}CD,$

又因为 $AB//CD, AB=\frac{1}{2}CD,$ 所以 $AB//MN, AB=MN,$

所以四边形 $ABMN$ 是平行四边形，所以 $BM//AN$ ，

又因为 $BM\not\subset$ 平面 PAD ， $AN\subset$ 平面 PAD ，

所以 $BM//$ 平面 PAD .

【小问 2 详解】

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD, AD, DC\subset$ 平面 $ABCD,$

所以 $PD\perp AD, PD\perp DC,$ 且 $AD\perp DC,$

所以以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}$ 为 x,y,z 轴建系如图，

若选择①： $PB=\sqrt{3}$ ，因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD, BD\subset$ 平面 $ABCD,$

所以 $PD\perp BD$,所以 $BD=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$,则 $AB=\sqrt{2-1}=1$ ，

所以 $CD=2$,则 $D(0,0,0), B(1,1,0), P(0,0,1), C(0,2,0), M(0,1,\frac{1}{2})$,

因为 $DA\perp$ 平面 PDC ，所以 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$ 为平面 PDM 的一个法向量，

设平面 DMB 的法向量 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$ ， $\overrightarrow{DB}=(1,1,0), \overrightarrow{DM}=(0,1,\frac{1}{2})$,

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\vec{m}=x+y=0\\ \overrightarrow{DM}\cdot\vec{m}=y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$ ，令 $x=1, y=-1, z=2$,

所以 $\overrightarrow{m}=(1,-1,2)$,

设二面角 $P-DM-B$ 为 θ ， $\cos<\overrightarrow{DA},\overrightarrow{m}>=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{m}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,

因为由图可知二面角 $P-DM-B$ 为钝角，所以 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

若选择②： $BD\perp BC$ ，设 $AB=a$ ，则 $CD=2a$ ，

$BD=\sqrt{a^2+1}, BC=\sqrt{a^2+1}$，

因为 $BD\perp BC$，所以 $a^2+1+a^2+1=4a^2$ 解得 $a=1$，

则 $D(0,0,0), B(1,1,0), P(0,0,1), C(0,2,0), M(0,1,\frac{1}{2})$，

因为 $DA\perp$ 平面 PDC，所以 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$ 为平面 PDM 的一个法向量，

设平面 DMB 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0), \overrightarrow{DM}=(0,1,\frac{1}{2})$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\vec{m}=x+y=0\\ \overrightarrow{DM}\cdot\vec{m}=y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，令 $x=1, y=-1, z=2$，

所以 $\vec{m}=(1,-1,2)$，

设二面角 $P-DM-B$ 为 θ，$\cos<\overrightarrow{DA},\vec{m}>=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\vec{m}\right|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

因为由图可知二面角 $P-DM-B$ 为钝角，所以 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

18. 【答案】（1）0.15

（2）分布列答案见解析，$E\left(X\right)=1242$

（3）建议农科所推广该项技术改良，理由见解析

【解析】

【分析】（1）计算出亩产量是 500kg 的概率，结合表 1 以及独立事件的概率乘法公式可求得所求事件的概率；

（2）分析可知随机变量 X 的可能取值有 960、1080、1200、1350、1500，计算出随机变量 X 在不同取值下的概率，可得出随机变量 X 的分布列，进而可求得 $E\left(X\right)$ 的值；

（3）设增产前每亩冬小麦产量为 ξkg，增产后每亩冬小麦产量为 ηkg，则 $\eta=\xi+50$，

设增产后的每亩动漫小麦总价格为 Y 元，计算出增产的 50kg 会产生增加的收益，与 125 比较大小后可得出结论.

【小问 1 详解】

解：由图可知，亩产量是 400kg 的概率约为 $0.005\times50=0.25$，

亩产量是 450kg 的概率约为 $0.01\times50=0.5$，亩产量是 500kg 的概率约为 $0.005\times50=0.25$，

估计 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 1500 元的概率为 $0.25\times0.6=0.15$

【小问 2 详解】

解：由题意可知，随机变量 X 的可能取值有：960、1080、1200、1350、1500，

$P\left(X=960\right)=0.25\times0.4=0.1$，$P\left(X=1080\right)=0.5\times0.4=0.2$，

$P(X=1200)=0.25\times0.4+0.25\times0.6=0.25$，

$P(X=1350)=0.5\times0.6=0.3$，$P(X=1500)=0.25\times0.6=0.15$，

所以，随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	960	1080	1200	1350	1500
P	0.1	0.2	0.25	0.3	0.15

$E(X)=960\times0.1+1080\times0.2+1200\times0.25+1350\times0.3+1500\times0.15=1242$.

【小问 3 详解】

解：建议农科所推广该项技术改良，

设增产前每亩冬小麦产量为ξkg，增产后每亩冬小麦产量为ηkg，则$\eta=\xi+50$，

设增产后的每亩动漫小麦总价格为Y元，分析可知$E(Y)=E(X)+50\times(2.4\times0.4+3\times0.6)$，

所以，增产的50kg会产生增加的收益为$50\times(2.4\times0.4+3\times0.6)=138>125$，

故建议农科所推广该项技术改良.

19. 【答案】（1）0是$f(x)$的极小值点，理由见解析

（2）证明过程见解析

【解析】

【分析】（1）求$f(x)=x\ln(x+1)$的定义域，求导，得到$f'(0)=0$，且$x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，$x\in(0,+\infty)$时，$f'\ x\ >0$，故0是$f(x)$的极小值点；

（2）对不等式变形得到$\dfrac{\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x}{x}>0$，令$g(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x(x>-1)$，求导，得到其单调性，从而得到$g(x)$正负，故$\dfrac{\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x}{x}>0$恒成立，结论得证.

【小问 1 详解】

0是$f(x)$的极小值点，理由如下：

$f(x)=x\ln(x+1)$定义域为$(-1,+\infty)$，

$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$，其中$f'(0)=\ln1+\dfrac{0}{0+1}=0$，

当$x\in(-1,0)$时，$\ln(x+1)<0,\dfrac{x}{x+1}<0$，故$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}<0$，

当$x\in(0,+\infty)$时，$\ln(x+1)>0,\dfrac{x}{x+1}>0$，故$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}>0$，

故 $f\left(x\right)=x\ln\left(x+1\right)$ 在 $x\in\left(-1,0\right)$ 上单调递减，在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

故 0 是 $f\left(x\right)$ 的极小值点；

【小问 2 详解】

$\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}>-\dfrac{1}{2}x+1$ 等价于 $\dfrac{x\ln\left(x+1\right)}{x^2}>-\dfrac{1}{2}x+1$，

即 $\dfrac{\ln\left(x+1\right)+\dfrac{1}{2}x^2-x}{x}>0$，

令 $g\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)+\dfrac{1}{2}x^2-x\left(x>-1\right)$，

则 $g'\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}+x-1=\dfrac{x^2}{x+1}\left(x>-1\right)$，

当 $x>-1$ 时，$g'\left(x\right)\geq 0$，所以 $g\left(x\right)$ 在 $x>-1$ 上单调递增，

又 $g\left(0\right)=0$，

故当 $x>0$ 时，$g\left(x\right)>g\left(0\right)=0$，当 $-1<x<0$ 时，$g\left(x\right)<g\left(0\right)=0$，

则 $\dfrac{\ln\left(x+1\right)+\dfrac{1}{2}x^2-x}{x}>0$ 恒成立，

故 $\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}>-\dfrac{1}{2}x+1$.

20. 【答案】（1）$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）$y=x+2$ 或 $x=0$

【解析】

【分析】（1）两个点 $P\left(-2,1\right),Q\left(2\sqrt{2},0\right)$ 代入解方程即可.

(2)斜率不存在单独算出 $\left|GM\right|\cdot\left|GN\right|=2$ 是否成立；斜率存在时把 l 设出来与椭圆联立，韦达定理求出两根之和与两根之积用斜率 k 来表示，然后 $\left|GM\right|\cdot\left|GN\right|$ 用两个根表示，化简求值即可.

【小问 1 详解】

将点 $P\left(-2,1\right),Q\left(2\sqrt{2},0\right)$ 坐标代入椭圆 E 的方程，得 $\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ \dfrac{8}{a^2}=1,\end{cases}$ 解得 $a^2=8,b^2=2$，所以椭圆 E 的方程为：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$

【小问 2 详解】

若直线l的斜率不存在，即直线l为$x=0$时，A 和M重合，B和N点重合，分别为椭圆的上下顶点$\left(0,\sqrt{2}\right)\left(0,-\sqrt{2}\right)$，此时$|GM|\cdot|GN|=\left(2-\sqrt{2}\right)\times\left(2+\sqrt{2}\right)=2$，符合题意.

若直线l斜率存在，设直线AB的方程为$y=kx+2$，$A\left(x_1,y_1\right)$ $B\left(x_2,y_2\right)$ $\left(x_1\neq-2\text{且}x_2\neq-2\right)$，联立方程$\begin{cases}y=kx+2\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$得，$\left(4k^2+1\right)x^2+16kx+8=0$，$\Delta=\left(16k\right)^2-32\left(4k^2+1\right)=32\left(4k^2-1\right)>0,\therefore k^2>\dfrac{1}{4}$,

即$k>\dfrac{1}{2}$或$k<-\dfrac{1}{2}$

$x_1+x_2=\dfrac{-16k}{4k^2+1}$ $x_1\cdot x_2=\dfrac{8}{4k^2+1}$ $k_{PA}=\dfrac{y_1-2}{x_1+1}$，所以直线$PA$的方程为$y=\dfrac{y_1-1}{x_1+2}\left(x+2\right)+1$，取$x=0$得$M\left(0,\dfrac{2\left(y_1-1\right)}{x_1+2}+1\right)$，同理可得$M\left(0,\dfrac{2\left(y_2-1\right)}{x_2+2}+1\right)$

由$|GM|\cdot|GN|=2$得$\left|\dfrac{2\left(y_1-1\right)}{x_1+2}+1-2\right|\cdot\left|\dfrac{2\left(y_2-1\right)}{x_2+2}+1-2\right|=2$，即$\left|\dfrac{2\left(y_1-1\right)}{x_1+2}-1\right|\cdot\left|\dfrac{2\left(y_2-1\right)}{x_2+2}-1\right|=2$，所以

$\left(2k-1\right)^2\left|\dfrac{x_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{x_2}{x_2+2}\right|=2$，即$\left(2k-1\right)^2\left|\dfrac{x_1x_2}{x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)+4}\right|=2$，即

$$\left(2k-1\right)^2\left|\dfrac{\dfrac{8}{4k^2+1}}{\dfrac{8}{4k^2+1}+\dfrac{-32k}{4k^2+1}+4}\right|=2$$

即$\left|\dfrac{\left(2k-1\right)^2}{4k^2-8k+3}\right|=1$，因为$k>\dfrac{1}{2}$，所以得$\left|\dfrac{2k-1}{2k-3}\right|=1$，即$k=1$，经检验符合题意，此时直线$l$为$y=x+2$

综上所述，直线l的方程为$y=x+2$或$x=0$.

21. 【答案】（1）1，2，1 或 3，1；

（2）7；（3）511566.

【解析】

【分析】(1)由题意可直接列举出数列Q；

(2)由题意可得$n\geq4$，分$n=4$、$n=5$和$n\geq6$分别求$S\left(Q\right)$的最小值即可得答案；

(3)由题意可得数列Q为$2,2,\cdots,2,1,1\cdots,1$的形式，设其中有x项为 2，有y项为 1，则有$2x+y=2023$，所以$T\left(Q\right)=-2x^2+2023x$，再利用二次函数的性质求$T\left(Q\right)$的最大值即可.

【小问 1 详解】

解：当$T\left(Q\right)=1$时，存在一组(i,j)，满足$a_i>a_j,1\le i<j\le n$，

又因为$a_1,a_2,\cdots,a_n$的各项均为正整数，且$S\left(Q\right)=a_1+a_2+\cdots+a_n=4$，

所以$a_n<4$，即$a_n\le 3$，且$i\ge 1,j\ge 2$，

当$i=1,j=2$时，满足条件的数列Q只能是：3,1；

当$i=1,j=3$时，满足条件的数列Q只能是：1，2，1；

当$i=1,j\ge 3$时，满足条件的数列Q不存在；

所以数列Q：1，2，1或3,1；

【小问2详解】

解：由题意可知$\mathrm{C}_n^2\ge 6$，所以$n\ge 4$，

①当$n=4$时，应有数列中各项均不相同，此时有$S\left(Q\right)\ge 1+2+3+4=10$；

②当$n=5$时，由于数列中各项必有不同的数，进而有$S\left(Q\right)\ge 6$.

若$S\left(Q\right)=6$，满足上述要求的数列中有四项为1，一项为2，此时$T\left(Q\right)\le 4$，不符合，

所以$S\left(Q\right)\ge 7$；

③当$n\ge 6$时，同②可得$S\left(Q\right)\ge 7$；

综上所述，有$S\left(Q\right)\ge 7$，同时当Q为2，2，1，1，1时，$S\left(Q\right)=7$，

所以$S\left(Q\right)$的最小值为7；

【小问3详解】

解：①存在大于1的项，否则此时有$T\left(Q\right)=0$；

②$a_n=1$,否则将a_n拆分成a_n个1后$T\left(Q\right)$变大；

③当$t=1,2,\cdots,n-1$时，有$a_t\ge a_{t+1}$，否则交换a_t,a_{t+1}顺序后$T\left(Q\right)$变为$T\left(Q\right)+1$，进一步有

$a_t-a_{t+1}\in\{0,1\}$，

否则有$a_t\ge a_{t+1}+2$，此时将a_t改为a_t-1，并在数列末尾添加一项1，此时$T\left(Q\right)$变大；

④各项只能为2或1，否则由①②③可得数列Q中有存在相邻的两项$a_t=3,a_{t+1}=2$，设此时Q中有x项为2，则将a_t改为2，并在数列末尾添加一项1后，$T\left(Q\right)$的值至少变为$T\left(Q\right)+x+1-x=T\left(Q\right)+1$；

⑤由上可得数列Q为$2,2,\cdots,2,1,1\cdots,1$的形式，设其中有x项为2，有y项为1，则有$2x+y=2023$，

从而有$T\left(Q\right)=xy=(2023-2x)x=-2x^2+2023x$，

由二次函数的性质可得，当且仅当$\begin{cases}x=506\\y=1011\end{cases}$时，$T\left(Q\right)$最大，为511566.

【点睛】关键点睛：本题考查了有穷数列的前n项和及满足集合$\left\{(i,j)\mid a_i>a_j,1\le i<j\le n\right\}$中元素的个

数，属于难点，在解答每一小问时，要紧扣Q还是一个正整数数列，进行逻辑推理，从而得出结论.