# 2023 北京民大附中高二（上）期末

# 数　　学

## 第一部分（共 100 分）

### 一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 在复平面内，复数 $(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$ 对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 经过点 $P(-1,0)$ 且倾斜角为 $60°$ 的直线的方程是（　　）

A. $\sqrt{3}x-y-1=0$

B. $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$

C. $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$

D. $x-\sqrt{3}y+1=0$

3. 已知直线 $l$ 经过点 $A(1,1,2),B(0,1,0)$，平面 $\alpha$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(-2,0,-4)$，则（　　）

A. $l//\alpha$

B. $l\perp\alpha$

C. $l\subset\alpha$

D. $l$ 与 $\alpha$ 相交，但不垂直

4. 已知抛物线 $y^2=ax$ 上的点 $M\left(\frac{1}{2},y_0\right)$ 到其焦点的距离是 $1$，那么实数 $a$ 的值为（　　）

A $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

5. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $M$ 满足 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$．若 $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a},\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{b},\overrightarrow{A_1A}=\vec{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的是（　　）

A. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

B. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

C. $-\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$

D. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

6. 已知直线 $l:y=kx+b$，$\odot O:x^2+y^2=1$，则“$|b|<1$”是“直线 $l$ 与 $\odot O$ 相交”的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 $l$ 是底面 $ABCD$ 所在平面内的一条动直线，记直线 $A_1C$ 与直线 $l$ 所成的角为 $\alpha$，则 $\sin\alpha$ 的最小值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

8. 已知 $A,B$（异于坐标原点）是圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 与坐标轴的两个交点，则下列点 $M$ 中，使得 $\triangle MAB$ 为钝角三角形的是（　　）

A. $M\left(0,0\right)$　　B. $M\left(4,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$　　C. $M\left(2,1-\sqrt{5}\right)$　　D. $M\left(1,2\sqrt{2}\right)$

9. “天问一号”是执行中国首次火星探测任务的探测器，该名称源于屈原长诗《天问》，寓意探求科学真理征途漫漫，追求科技创新永无止境．图（1）是“天问一号”探测器环绕火星的椭圆轨道示意图，火星的球心是椭圆的一个焦点．过椭圆上的点 $P$ 向火星被椭圆轨道平面截得的大圆作两条切线 $PM,PN$，则 $\angle MPN$ 就是“天问一号”在点 $P$ 时对火星的观测角．图（2）所示的 $Q$，$R$，$S$，$T$ 四个点处，对火星的观测角最大的是（　　）

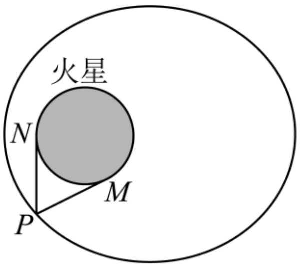


图1

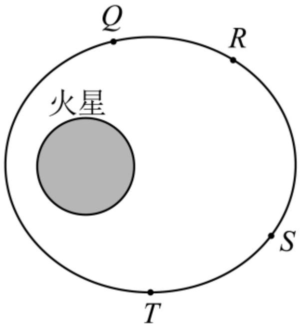
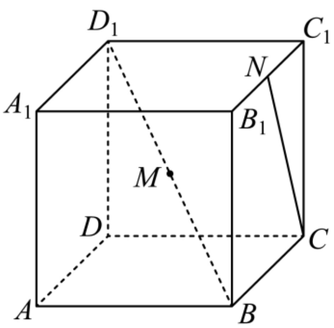


图2

A. $Q$　　B. $R$　　C. $S$　　D. $T$

10. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$M$，$N$ 分别为 $BD_1,B_1C_1$ 的中点，$P$ 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面上的动点．下列叙述正确的是（　　）




A. 当点 $P$ 在侧面 $AA_1D_1D$ 上运动时，直线 $CN$ 与平面 $BMP$ 所成角的最大值为 $\dfrac{\pi}{2}$

B. 当点 $P$ 为棱 $A_1B_1$ 的中点时，$CN /\!/$ 平面 $BMP$

C. 当点 $P$ 在棱 $BB_1$ 上时，点 $P$ 到平面 $CNM$ 距离的最小值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

D. 当点 $P\notin NC$ 时，满足 $MP\perp$ 平面 $NCP$ 的点 $P$ 共有 2 个

## 二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 若复数 $z$ 满足 $\left(1+\mathrm{i}\right)\cdot z=\mathrm{i}^3$，则 $\left|z\right|=$__________.

12. 已知直线 $l_1:ax-y+2=0$，直线 $l_2:x-(a+1)y-1=0$．若 $l_1\perp l_2$，则实数 $a=$__________.

13. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\sqrt{2}x$，则该双曲线的离心率为___________.

14. 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1$，$F_2$.$A(0,b)$，且 $\triangle AF_1F_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形．过 $F_1$ 垂直于 $AF_2$ 的直线交椭圆 $M$ 于 $B$，$C$ 两点，则 $\triangle ABC$ 的周长为___________.

15. 古希腊数学家阿波罗尼斯在其著作《圆锥曲线论》中，系统地阐述了圆锥曲面的定义和利用圆锥曲面生成圆锥曲线的方法，并探究了许多圆锥曲线的性质．其研究的问题之一是“三线轨迹”问题：给定三条直线，若动点到其中两条直线的距离的乘积与到第三条直线距离的平方之比等于常数，求该点的轨迹.

小明打算使用解析几何　方法重新研究此问题，他先将问题特殊化如下：

给定条直线 $l_1:y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$，$l_2:y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$，$l_3:x=1$，动点 $P$ 到直线 $l_1$、$l_2$ 和 $l_3$ 的距离分别为 $d_1$、$d_2$ 和 $d_3$，且满足 $\dfrac{d_1d_2}{d_3^2}=\dfrac{1}{5}$，记动点 $P$ 的轨迹为曲线 $C$．给出下列四个结论：

①曲线 $C$ 关于 $x$ 轴对称；

②曲线 $C$ 上的点到坐标原点的距离的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

③平面内存在两个定点，曲线 $C$ 上有无数个点 $P$ 到这两个定点的距离之差为 $\sqrt{2}$；

④ $d_1+d_2$ 的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ .

其中所有正确结论的序号是___________.

## 三、解答题（共 4 小题，共 40 分）

16. 已知直线 $l_1:y=1$ 与直线 $l_2:y=kx-2$ 交于点 A，点 A 关于坐标原点的对称点为 $C$，点 $B$ 在直线 $l_1$ 上，点 $D$ 在直线 $l_2$ 上.

（1）当 $k=1$ 时，求点 $C$ 的坐标；

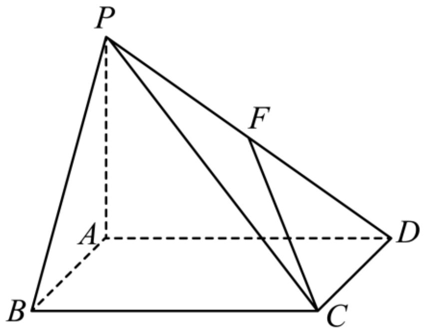
（2）当四边形 $ABCD$ 为菱形时，求 $k$ 的值.

17. 已知曲线 $M$ 上的任意一点到点 $(1,0)$ 的距离比它到直线 $x=-2$ 的距离小 1.

（1）求曲线 $M$ 的方程；

（2）设点 $E(0,1)$．若过点 $A(2,1)$ 的直线与曲线 $M$ 交于 $B$，$C$ 两点，求 $\triangle EBC$ 的面积的最小值.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 $F$ 为 $PD$ 的中点.




（1）已知点 $G$ 为线段 $BC$ 的中点，求证：$CF /\!/$ 平面 $PAG$；

（2）若 $PA=AB=2$，直线 $PC$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $30°$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择几个作为已知，使四棱锥 $P-ABCD$ 唯一确定，求：

（ⅰ）直线 $CD$ 到平面 $ABF$ 的距离；

（ⅱ）二面角 $B-AF-C$ 的余弦值.

条件①：$PA \perp$ 平面 $ABCD$；

条件②：$AD=2\sqrt{2}$；

条件③：平面 $PAB \perp$ 平面 $PAD$.

19. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 2，长轴长为 4.

（1）求椭圆 $E$ 的方程；

（2）过点 $M(-3,0)$ 且与 $x$ 轴不重合　直线 $l$ 与椭圆 $E$ 交于不同的两点 $B$，$C$，点 $B$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $B'$. 问：平面内是否存在定点 $P$，使得 $B'$ 恒在直线 $PC$ 上？若存在，求出点 $P$ 的坐标；若不存在，说明理由.

## 第二部分（共 50 分）

### 一、选择题（共 3 小题，每小题 4 分，共 12 分）

20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中满足，$a_2=1$，$a_4=3$，则等差数列前 4 项的和为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

21. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_5=4$，则 $a_3$ 的值为（　　）

A　1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

22. “实数 $a$，$b$，$c$ 成等比数列”是“$b^2=ac$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 充要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

### 二、填空题（共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

23. 数列 $\{a_n\}$ 满足，$a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+2n(n\geq 2)$，则 $a_4=$________.

24. 在 9 与 1 之间插入 5 个数，使这 7 个数成等比数列，则插入的 5 个数的乘积为________.

25. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2+a_4=4$，$a_5+a_7=16$，则 $a_8+a_{10}=$________.

## 三、解答题（共两小题，共 23 分）

26. 设数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，$S_n=n^2-n+1$，$n\in \mathrm{N}^*$.

（1）写出$a_1$，$a_2$，$a_3$的值;

（2）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式.

27. 在等差数列$\left\{a_n\right\}$中满足，$a_3=-16$，$S_9=-72$.

（1）求等差数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式

（2）若数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项的和为$S_n$，判断$S_n$是否有最小值，若$S_n$有最小值，求此时$n$的值；若$S_n$没有最小值，说明理由

# 参考答案

## 第一部分（共 100 分）

### 一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 【答案】A

【解析】

【分析】计算得到复数的代数形式，即可得答案.

【详解】$(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})=2+6\mathrm{i}-\mathrm{i}+3=5+5\mathrm{i}$

其对应的点$\left(5,5\right)$位于第一象限

故选：A.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】首先求出直线的斜率，再利用点斜式求出直线方程；

【详解】由倾斜角为$60^\circ$知，直线的斜率$k=\sqrt{3}$，

因此，其直线方程为$y-0=\sqrt{3}(x+1)$，即$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$

故选：B

3. 【答案】B

【解析】

【分析】根据平面$\alpha$的法向量与直线$l$的方向向量的关系即可求解.

【详解】因为直线$l$经过点$A(1,1,2),B(0,1,0)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(-1,0,-2)$，又因为平面$\alpha$的一个法向量为$\vec{n}=(-2,0,-4)$，

且$\vec{n}=2\overrightarrow{AB}$，所以平面$\alpha$的一个法向量与直线$l$的方向向量平行，

则$l\perp\alpha$，

故选：$\mathrm{B}$.

4. 【答案】D

【解析】

【分析】利用抛物线焦半径公式可直接构造方程求得结果.

【详解】由抛物线方程知：抛物线焦点为$F\left(\frac{a}{4},0\right)(a>0)$，准线为$x=-\frac{a}{4}$，

由抛物线定义知：$\left|MF\right|=\frac{1}{2}+\frac{a}{4}=1$，解得：$a=2$.

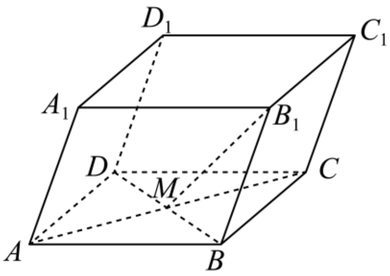
故选：D.

5. 【答案】C

【解析】

【分析】结合图形，由空间向量的线性运算可得.

【详解】




由点 $M$ 满足 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$，所以 $M$ 为 $AC$ 中点，

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $M$ 为 $BD$ 中点，

所以 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})$，

所以 $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\vec{c}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

故选：C

6. 【答案】A

【解析】

【分析】根据点到直线的距离公式，结合直线与圆的位置关系分别验证充分性，必要性即可得到结果.

【详解】由题意可得直线 $l: y=kx+b$ 与 $\odot O: x^2+y^2=1$ 相交，

则 $\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}<1 \Rightarrow b^2<k^2+1$

当 $|b|<1$ 时，满足 $b^2<k^2+1$，即“$|b|<1$”是“直线 $l$ 与 $\odot O$ 相交”的充分条件；

当直线 $l: y=kx+b$ 与 $\odot O: x^2+y^2=1$ 相交时，不一定有 $|b|<1$，比如 $b=2, k=3$ 也满足，所以“$|b|<1$”是“直线 $l$ 与 $\odot O$ 相交”的充分不必要条件.

故选:A

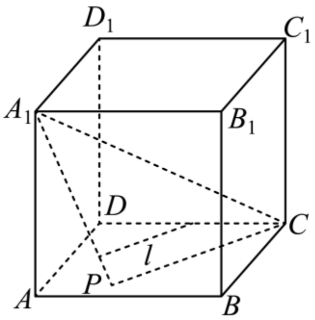
7. 【答案】A

【解析】

【分析】过 $C$ 作 $l$ 的平行线，过 $A_1$ 作该平行线的垂线，垂足为 $P$，则 $\angle A_1CP=\alpha$，$\sin\alpha=\frac{|A_1P|}{|A_1C|}$，

根据 $|A_1P|\geq|A_1A|$ 可求出结果.

【详解】如图：过 $C$ 作 $l$ 的平行线，过 $A_1$ 作该平行线的垂线，垂足为 $P$，




则 $\angle A_1CP=\alpha$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{|A_1P|}{|A_1C|}$，

设正方体的棱长为1，则 $|A_1C|=\sqrt{3}$，$|A_1P|\geq|A_1A|=1$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{|A_1P|}{|A_1C|}\geq\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,当且仅当 $P$ 与 A 重合时，取得等号，

所以 $\sin\alpha$ 的最小值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：A .

8. 【答案】D

【解析】

【分析】先求出直线 $AB$ 的方程，确定弦 $AB$ 为该圆的直径，再判断 A，B，C，D 各选项中的点 $M$ 与圆的位置关系，即可确定 $\triangle MAB$ 的形状，从而得解.

【详解】因为 $A$，$B$（异于坐标原点）是圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 与坐标轴的两个交点，

所以易得 $A(0,2)$，$B(4,0)$，则 $k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$，直线 $AB$ 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$，

显然圆心 $(2,1)$ 在直线 $AB$ 上，即弦 $AB$ 为该圆的直径，

对于 A，$(0-2)^2+(0-1)^2=5$，即 $M(0,0)$ 在圆上，则 $\triangle MAB$ 为直角三角形，故 A 错误；

对于 B，因为 $|AB|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$，$|AM|=\sqrt{16+\left(2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{20-6\sqrt{2}+\dfrac{9}{2}}$，

$|BM|=\sqrt{0+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以 $|AB|>|AM|$，$|AB|>|BM|$，即 $\angle AMB$ 为 $\triangle MAB$ 中的最大角，

因为 $(4-2)^2+(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1)^2>5$，即 $M\left(4,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 在圆外，即 $\angle AMB$ 为锐角，

所以 $\triangle MAB$ 为锐角三角形，故 B 错误；

对于 C，$(2-2)^2+(1-\sqrt{5}-1)^2=5$，即 $M(2,1-\sqrt{5})$ 在圆上，则 $\triangle MAB$ 直角三角形，故 C 错误；

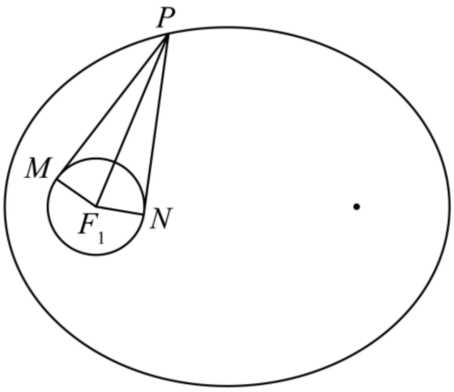
对于 D，$(1-2)^2+(2\sqrt{2}-1)^2<5$，即 $M(1,2\sqrt{2})$ 在圆内，则 $\triangle MAB$ 为钝角三角形，故 D 正确.

故选：D.

9. 【答案】A

【解析】

【分析】连接点 $P$ 和椭圆的左焦点，由对称性和椭圆上点到焦点距离的特征得点 $P$ 位于条件中点 $Q$ 处，对火星的观测角最大.

【详解】


设火星半径为 $R$，椭圆左焦点为 $F_1$，连接 $PF_1$，则 $\angle MPN=2\angle MPF_1$，

因为 $\sin\angle MPF_1=\dfrac{R}{PF_1}$，所以 $PF_1$ 越小，$\angle MPF_1$ 越大，$\angle MPN$ 越大，

所以当点 $P$ 位于条件中点 $Q$ 处，对火星的观测角最大.

故选：A.

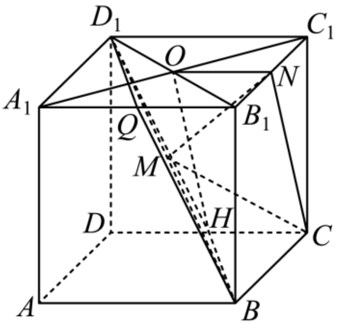
10. 【答案】C

【解析】

【分析】$NC$ 与 $MB$ 不可能垂直，故选项 A 错误；平移 $NC$ 与平面相交于一点 $H$，故选项 B 错误；利用体积相等即可求出点 $P$ 到平面 $CNM$ 的距离的最小值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 判断选项 C，当点 $P\notin NC$ 时，满足 $MP\perp$ 平面 $NCP$ 的点 $P$ 共有 1 个. 当点 P 为平面 $BCC_1B_1$ 的中心时，故判断选项 D

【详解】由于线面角的最大值为 $\dfrac{\pi}{2}$，

$\because$ $NC$ 与 $MB$ 不可能垂直，故直线 $CN$ 与平面 $BMP$ 所成角的最大值达不到 $\dfrac{\pi}{2}$.选项 A 错误；



取 $DC$ 的中点为 $H$， $A_1B_1$ 的中点为 $Q$ ,连接 $A_1C_1, B_1D_1$ 相交于点 $O$，连接 $OH, ON$，

$\because ON // HC$ 且 $ON = HC$

故 $OH // NC$

$\because H \in$ 平面 $HBQD_1, OH \not\subset$ 面 $HBQD_1$，故 $CN$ 不能与平面 $BMP$ 平行，故选项 B 错误；

$\because V_{P-CNM} = V_{M-PNC}$

$M$ 到平面 $PNC$ 的距离始终为 $\frac{1}{2}$，故当点 $P$ 运动到点 $B_1$ 时，$\triangle PNC$ 取得最小值为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{4}$，故

$V_{P-CNM} = V_{M-PNC} = \frac{1}{3}S_{\triangle PNC}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}=\frac{1}{3}S_{\triangle CNM}\cdot h$

$\because MC=\frac{\sqrt{3}}{2}, MN=\frac{\sqrt{2}}{2}, NC=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

$S_{\triangle MNC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{8}$

故 $h=\frac{\sqrt{6}}{6}$，故选项 C 正确.

当点 $P \notin NC$ 时，满足 $MP\perp$ 平面 $NCP$ 的点 $P$ 共有 1 个. 当点 $P$ 为平面 $BCC_1B_1$ 的中心时，故选项 D 错误

故选：C.

## 二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ##$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】利用复数的四则运算化简复数 $z$，利用复数的模长公式可求得 $|z|$.

【详解】由题意可得 $z=\frac{i^3}{1+i}=\frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，因此，$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. 【答案】$-\frac{1}{2}$ ##$-0.5$

【解析】

【分析】直接根据两直线垂直的公式计算即可.

【详解】由 $l_1\perp l_2$ 得 $a+(a+1)=0$，解得 $a=-\frac{1}{2}$

故答案为：$-\frac{1}{2}$

13. 【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据渐近线方程可得：$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，进而得到$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$.

【详解】因为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线为$y=\pm\sqrt{2}x$，

所以$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，则$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$.

14. 【答案】8

【解析】

【分析】由$\triangle AF_1F_2$面积为$\sqrt{3}$，且其为正三角形，可得$a$.后由中垂线性质结合椭圆定义可得答案.

【详解】如图，设$|OF_2|=c$，则$a^2=b^2+c^2$，因$\triangle AF_1F_2$面积为$\sqrt{3}$，且其为正三角形，又$|OA|=b$，则

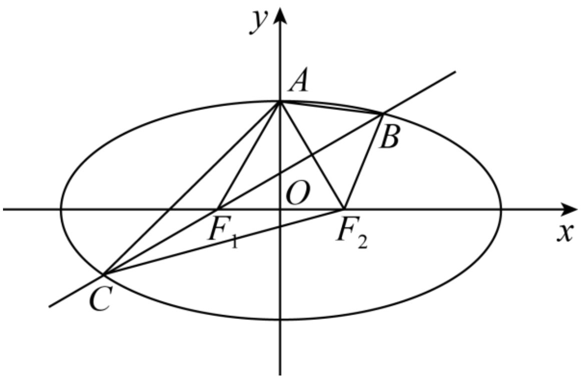
$$\begin{cases}b=\sqrt{3}c\\ \frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$$，则$a=2$.

又直线$BC$过$F_1$，与$AF_2$垂直，$\triangle AF_1F_2$为正三角形，则直线$BC$为$AF_2$中垂线，

则$|AB|=|BF_2|$，$|AC|=|CF_2|$，又$|BC|=|BF_1|+|F_1C|$，

故$\triangle ABC$的周长$C=|BF_2|+|BF_1|+|F_1C|+|F_2C|$，又$C$，$B$在椭圆上，则由椭圆定义有$C=4a=8$.

故答案为：8




15. 【答案】①③④

【解析】

【分析】设点$P(x,y)$，求出点$P$的轨迹方程，根据曲线对称性的定义可判断①；化简曲线$C$的方程，利用两点间的距离公式结合二次函数的基本性质可判断②；化简曲线$C$的方程，根据双曲线的定义可判断③；对点$P$的位置进行分类讨论，利用二次函数的基本性质可求得$d_1+d_2$的最小值.

【详解】直线$l_1$的方程为$x-2y+1=0$，直线$l_2$的方程为$x+2y+1=0$，

设点 $P(x,y),x\neq 1$，则 $d_1=\dfrac{|x-2y+1|}{\sqrt{5}}$，$d_2=\dfrac{|x+2y+1|}{\sqrt{5}}$，$d_3=|x-1|$，

所以，$\dfrac{d_1d_2}{d_3^2}=\dfrac{|x-2y+1|\cdot|x+2y+1|}{5(x-1)^2}=\dfrac{1}{5}$，化简可得 $\left|(x+1)^2-4y^2\right|=(x-1)^2$.

对于①，在曲线 $C$ 上任取一点 $P(x,y)$，则点 $P$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $P_1(x,-y)$，

所以，$\left|(x+1)^2-4\times(-y)^2\right|=\left|(x+1)^2-4y^2\right|=(x-1)^2$，故点 $P_1$ 在曲线 $C$ 上，①对；

对于②，设点 $P(x,y)$.

当 $(x+1)^2\geq 4y^2$ 时，则曲线 $C$ 的方程可化为 $(x+1)^2-4y^2=(x-1)^2$，可得 $y^2=x$，

设坐标原点为 $O$，则 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x}\geq 0$，

且原点坐标满足方程 $\left|(x+1)^2-4y^2\right|=(x-1)^2$，此时 $\dfrac{d_1d_2}{d_3^2}=\dfrac{1}{5}$ 有意义，②错；

对于③，当 $(x+1)^2<4y^2$，则曲线 $C$ 的方程可化为 $4y^2-(x+1)^2=(x-1)^2$，

整理可得 $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}-x^2=1$，取双曲线 $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}-x^2=1$ 的焦点 $F_1\left(0,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$、$F_2\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

根据双曲线的定义可知，曲线 $C$ 上有无数个点 $P$，使得 $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$，③对；

对于④，当点 $P$ 在抛物线 $y^2=x$ 上，且 $x\neq 1$ 时，

$$d_1+d_2=\frac{|x-2y+1|+|x+2y+1|}{\sqrt{5}}=\frac{|y^2-2y+1|+|y^2+2y+1|}{\sqrt{5}}=\frac{2(y^2+1)}{\sqrt{5}}\geq\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

当且仅当 $y=0$ 时，等号成立，

当点 $P$ 在双曲线 $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}-x^2=1$ 的上支时，则 $y\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且 $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}(x^2+1)}$ 且 $x\neq 1$，

此时，$d_1+d_2=\dfrac{|x-2y+1|+|x+2y+1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\left|x-\sqrt{2(x^2+1)}+1\right|+\left|x+\sqrt{2(x^2+1)}+1\right|}{\sqrt{5}}$，

因为 $\left(\sqrt{2(x^2+1)}\right)^2-(x+1)^2=(x-1)^2>0$，

所以，$\sqrt{2(x^2+1)}>x+1$ 且 $\sqrt{2(x^2+1)}>-(x+1)$，

故 $d_1+d_2=\dfrac{\left|x-\sqrt{2(x^2+1)}+1\right|+\left|x+\sqrt{2(x^2+1)}+1\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2(x^2+1)}-(x+1)+\sqrt{2(x^2+1)}+(x+1)}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}{\sqrt{5}}\geq\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$，

当且仅当 $x=0$ 时，等号成立；

当点 $P$ 在双曲线 $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}-x^2=1$ 的下支时，同理可求得 $d_1+d_2$ 的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

综上所述，$d_1+d_2$ 的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，④对.

故答案为：①③④.

【点睛】关键点点睛：本题考查曲线有关几何性质的应用，解题的关键在于根据题中的几何关系求出曲线的方程，并对曲线的方程进行化简，进而通过曲线的方程对曲线的几何性质进行分析求解.

## 三、解答题（共 4 小题，共 40 分）

16. 【答案】（1）$C\left(-3,-1\right)$

（2）$k=\pm\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）当 $k=1$ 时，联立直线 $l_1$、$l_2$ 的方程，求出点 A 的坐标，再利用对称性可得出点 $C$ 的坐标；

（2）求出点 A 的坐标，设点 $B\left(t,1\right)$，求出点 $D$ 的坐标，根据点 $D$ 在直线 $l_2$ 上可得出 $t=-\dfrac{1}{k}$，由菱形的几何性质可得出 $OA\perp OB$，根据斜率关系可得出关于 $k$ 的等式，即可得解.

【小问 1 详解】

解：当 $k=1$ 时，直线 $l_2$ 的方程为 $y=x-2$，联立 $\begin{cases}y=1\\y=x-2\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$，即点 $A\left(3,1\right)$，

因为点 A 关于坐标原点的对称点为 $C$，故点 $C$ 的坐标为 $\left(-3,-1\right)$.

【小问 2 详解】

解：若 $k=0$，则 $l_1//l_2$，不合乎题意，所以，$k\neq 0$，

联立 $\begin{cases}y=1\\y=kx-2\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{k}\\y=1\end{cases}$，即点 $A\left(\dfrac{3}{k},1\right)$，

设点 $O$ 为坐标原点，则 $k_{OA}=\dfrac{1}{\frac{3}{k}}=\dfrac{k}{3}$，

设点 $B\left(t,1\right)$，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $AC$ 的中点为 $O$，则 $BD$ 的中点为 $O$，

所以点 $D\left(-t,-1\right)$，因为点 $D$ 在直线 $l_2$ 上，所以，$-kt-2=-1$，则 $t=-\dfrac{1}{k}$，即点 $B\left(-\dfrac{1}{k},1\right)$，

所以，$k_{OB}=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{k}}=-k$，

由菱形的几何性质可知$OA\perp OB$，所以，$k_{OA}k_{OB}=-\dfrac{k^2}{3}=-1$，解得$k=\pm\sqrt{3}$.

17. 【答案】(1) $y^2=4x$

(2) $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】(1) 利用抛物线的定义即可求解；

(2) 设直线$BC$的方程，联立直线与抛物线的方程，可知$\triangle EBC$的面积$S=|y_1-y_2|$，结合韦达定理及二次函数求最值，即可得解.

【小问1详解】

由已知得，曲线$M$上的任意一点到点$(1,0)$的距离与它到直线$x=-1$的距离相等，

所以曲线$M$的轨迹是以$(1,0)$为焦点，$x=-1$为准线的抛物线，

所以曲线$M$的方程为$y^2=4x$

【小问2详解】

设$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$

显然，过点$A(2,1)$的直线$BC$斜率不为0，设其方程为$x=my+2-m$

联立$\begin{cases}x=my+2-m\\y^2=4x\end{cases}$，整理得$y^2-4my+4(m-2)=0$

其中$\Delta=16m^2-16(m-2)=16(m^2-m+2)=16\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+28>0$，

由韦达定理得：$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=4(m-2)$，

所以$\triangle EBC$的面积$S=\dfrac{1}{2}\times|EA|\times|y_1-y_2|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{16m^2-16(m-2)}=4\sqrt{m^2-m+2}=4\sqrt{\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}}$

当$m=\dfrac{1}{2}$时，$S_{\min}=4\sqrt{\dfrac{7}{4}}=4\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=2\sqrt{7}$

所以$\triangle EBC$的面积的最小值为$2\sqrt{7}$

18. 【答案】(1) 证明过程见详解

(2) (ⅰ) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$；(ⅱ) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

【解析】

【分析】(1) 取 $AD$ 的中点 $E$，连接 $EF$， $EC$， $AG$， $PG$，利用中位线证明 $EF//$平面 $PAG$，再利用平行四边形对边平行证明 $CE//$平面 $PAG$，然后利用面面平行的判定得到平面 $PAG//$平面 $EFC$，最后由面面平行得到证明即可；

(2) 选择条件①和③

（i）设点 $D$ 到平面 $ABF$ 的距离为 $h$，利用等体积法即可求解；

（ii）建立空间直角坐标系，写出点的坐标，分别求出两个平面的法向量，进而求解即可.

【小问 1 详解】

取 $AD$ 的中点 $E$，连接 $EF$， $EC$， $AG$， $PG$；

因为 $E,F$ 分别为 $PD,AD$ 的中点，所以 $EF//PA$， $PA\subset$平面 $PAG$，

$EF\not\subset$平面 $PAG$，所以 $EF//$平面 $PAG$，

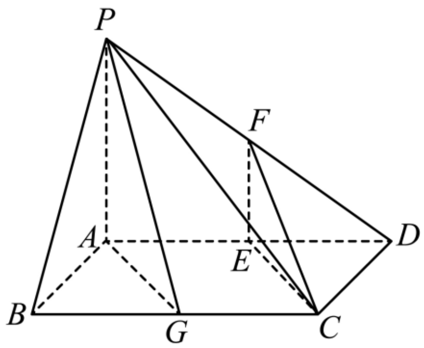
又因为 $G,E$ 分别为 $BC,AD$ 的中点，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

所以 $AE//GC$ 且 $AE=GC$，则四边形 $AGCE$ 为平行四边形，

所以 $CE//GA$， $GA\subset$平面 $PAG$， $CE\not\subset$平面 $PAG$，所以 $CE//$平面 $PAG$，

因为 $CE\cap EF=E$， $CE,EF\subset$平面 $EFC$，所以平面 $PAG//$平面 $EFC$，

因为 $FC\subset$平面 $EFC$，所以 $FC//$平面 $PAG$.




【小问 2 详解】

选择条件①和③

（i）因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，所以 $\angle PCA$ 即为直线 $PC$ 与平面 $ABCD$ 所成的角，

由题意可知： $\angle PCA=30°$，又 $PA=AB=2$，所以 $AC=2\sqrt{3}$.

因为平面 $PAD\perp$平面 $PAB$，且平面 $PAD\cap$平面 $PAB=PA$，因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，

所以 $AB\perp PA$，所以 $AB\perp$平面 $PAD$， $AD\subset$平面 $PAD$，所以 $AB\perp AD$，

则四边形 $ABCD$ 为矩形，因为 $AB=2,AC=2\sqrt{3}$，所以 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=2\sqrt{2}$，

设点 $D$ 到平面 $ABF$ 的距离为 $h$，由 $AB\perp$平面 $PAD$ 可知： $AB\perp AF$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAD$ 中， $PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=2\sqrt{3}$，

因为 $F$ 为 $PD$ 的中点，所以 $AF=\frac{1}{2}PD=\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot AF=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$， $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，

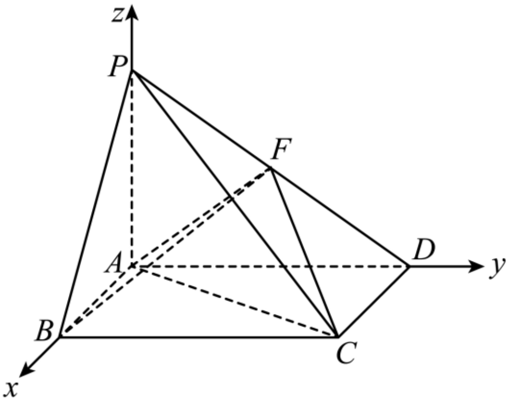
因为$DC//AB$，$AB\subset$平面$ABF$，$DC\not\subset$平面$ABF$，所以$DC//$平面$ABF$，

所以点$D$到平面$ABF$的距离也就是直线$CD$到平面$ABF$的距离.

因为$V_{D-ABF}=V_{F-ABD}$，即$\frac{1}{3}S_{\triangle ABF}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot\frac{1}{2}AP$，

也即$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times h=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times 1$，所以$h=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

故直线$CD$到平面$ABF$的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.




（ii）由（i）可知：$AB$，$AP$，$AD$两两垂直，分别以$AB$，$AP$，$AD$所在直线为$x$轴，$z$轴，$y$轴建立如图所示空间直角坐标系，则$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$F(0,\sqrt{2},1)$，$C(2,2\sqrt{2},0)$，则$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AF}=(0,\sqrt{2},1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2\sqrt{2},0)$，

设平面$ABF$的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，平面$AFC$的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则有$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，也即$\begin{cases}\sqrt{2}y_1+z_1=0\\ 2x_1=0\end{cases}$，令$z_1=2$，则$\vec{m}=(0,-\sqrt{2},2)$；

则有$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，也即$\begin{cases}\sqrt{2}y_2+z_2=0\\ 2x_2+2\sqrt{2}y_2=0\end{cases}$，令$z_1=2$，则$\vec{n}=(2,-\sqrt{2},2)$，

则$\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\vec{m}\bullet\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{6}{\sqrt{2+4}\times\sqrt{4+2+4}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

由图可知：二面角$B-AF-C$　锐二面角，

所以二面角$B-AF-C$的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

19. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）存在，$P\left(-\frac{4}{3},0\right)$

【解析】

【分析】（1）根据条件求出$a,b,c$，即可得椭圆$E$的方程；

（2）直线$l$为$x=ty-3$，$B\left(x_1,y_1\right),C\left(x_2,y_2\right)$，消去$x$得$\left(3t^2+4\right)y^2-18ty+15=0$，利用点$B',C$写出直线$B'C$的方程，利用韦达定理整理变形可得直线过定点.

【小问1详解】

由已知得$2c=2,2a=4$，则$c=1,a=2$，$\therefore b^2=a^2-c^2=3$

椭圆$E$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

【小问2详解】

设直线$l$为$x=ty-3$，$B\left(x_1,y_1\right),C\left(x_2,y_2\right)$，则$B'\left(x_1,-y_1\right)$

联立$\begin{cases}x=ty-3\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去$x$得$\left(3t^2+4\right)y^2-18ty+15=0$，

$\therefore \Delta=(18t)^2-60\left(3t^2+4\right)>0$，解得$t^2>\frac{5}{3}$

则$y_1+y_2=\frac{18t}{3t^2+4},y_1y_2=\frac{15}{3t^2+4}$，

又直线$B'C$的方程为$y=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_2\right)+y_2$

$$\therefore y=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}x-\frac{y_2x_2+y_1x_2}{x_2-x_1}+y_2=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}x-\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\left(x-\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}\right)$$

又$\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}=\frac{\left(ty_1-3\right)y_2+\left(ty_2-3\right)y_1}{y_2+y_1}=\frac{2ty_1y_2-3\left(y_1+y_2\right)}{y_2+y_1}=2t\times\frac{\frac{15}{3t^2+4}}{\frac{18t}{3t^2+4}}-3=-\frac{4}{3}$，

$\therefore y=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\left(x+\frac{4}{3}\right)$，恒过定点$\left(-\frac{4}{3},0\right)$

故存在定点$P\left(-\frac{4}{3},0\right)$，使得$B'$恒在直线$PC$上.

## 第二部分（共50分）

## 一、选择题（共3小题，每小题4分，共12分）

20. 【答案】D

【解析】

【分析】根据已知得到等差数列的通项公式,再应用等差数列前$n$项的和公式计算即可.

【详解】因为在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_2=1$，$a_4=3$，

则 $a_4-a_2=2d=2, a_2=a_1+d=1$

所以 $a_1=0, d=1$

即得 $a_n=a_1+(n-1)d=n-1$,

所以 $S_4=\frac{4(a_1+a_4)}{2}=\frac{4(0+3)}{2}=6$.

故选：D

21. 【答案】B

【解析】

【分析】根据等差数列性质求解即可.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$1+5=3+3$，$a_1+a_5=4$

所以 $2a_3=a_1+a_5=4$，故 $a_3=2$，

故选：B.

22. 【答案】A

【解析】

【分析】

根据等比数列的定义，结合充分条件、必要条件的判定方法，即可求解.

【详解】由实数 $a,b,c$ 成等比数列，可得 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$，即 $b^2=ac$，即充分性成立；

反之：如 $a=b=0$ 时，满足 $b^2=ac$，但实数 $a,b,c$ 不能构成等比数列，即必要性不成立,

所以“实数 $a,b,c$ 成等比数列”，是“$b^2=ac$”的充分不必要条件.

故选：A.

## 二、填空题（共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

23. 【答案】20

【解析】

【分析】根据递推关系即可求解.

【详解】由 $a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+2n(n\geq 2)$ 得 $a_2=a_1+4=6$，$a_3=a_2+6=12$，$a_4=a_3+8=20$，

故答案为：20

24. 【答案】$\pm 243$.

【解析】

【分析】根据等比数列的性质计算即可.

【详解】设这 7 个数组成的等比数列为 $\{a_n\}$,

则 $a_1=9, a_7=1$,

所以 $a_4^2=a_1a_7=9$，故 $a_4=\pm 3$

插入的 5 个数的积为 $a_2a_3a_4a_5a_6=(a_2a_6)\cdot(a_3a_5)\cdot a_4=(a_4)^5=\pm243$.

故答案为：$\pm243$.

25. 【答案】64

【解析】

【分析】利用等比数列的性质 $a_n=a_mq^{n-m}$ 化简求值即可.

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，

因为 $a_2+a_4=4$， $a_5+a_7=16$，

所以 $a_5+a_7=q^3\left(a_2+a_4\right)=16$，可得 $q^3=4$，

所以 $a_8+a_{10}=q^3\left(a_5+a_7\right)=4\times16=64$.

故答案为：64.

## 三、解答题（共两小题，共 23 分）

26. 【答案】(1) $a_1=1$， $a_2=2$， $a_3=4$；

(2) $a_n=\begin{cases}1, n=1\\ 2n-2, n\geq2, n\in\mathrm{N}^*\end{cases}$

【解析】

【分析】(1) 由条件取 $n=1, n=2, n=3$，结合 $S_n$ 的定义可求 $a_1$， $a_2$， $a_3$ 的值；

(2) 由 $S_n-S_{n-1}=a_n\left(n\geq2\right)$ 可求当 $n\geq2$ 时 $a_n$ 的表达式，由此可求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【小问 1 详解】

因为 $S_n=n^2-n+1$，取 $n=1$ 可得， $S_1=1$，故 $a_1=1$，

取 $n=2$ 可得 $S_2=4-2+1=3$，即 $a_1+a_2=3$，故 $a_2=2$，

当 $n=3$ 可得 $S_3=9-3+1=7$，即 $a_1+a_2+a_3=7$，故 $a_3=4$，

所以 $a_1=1$， $a_2=2$， $a_3=4$；

【小问 2 详解】

当 $n\geq2$ 时， $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-n+1-\left(n-1\right)^2+\left(n-1\right)-1=2n-2$，

又 $a_1=1$，不满足上式，

所以 $a_n=\begin{cases}1, n=1\\ 2n-2, n\geq2, n\in\mathrm{N}^*\end{cases}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1, n=1\\ 2n-2, n\geq2, n\in\mathrm{N}^*\end{cases}$.

27. 【答案】(1) $a_n=4n-28$；

（2）$S_n$ 有最小值-84，$S_n$ 取最小值时，$n=6$ 或 $n=7$.

【解析】

【分析】(1)利用等差数列通项公式和前 $n$ 项和公式列方程求公差和首项，由此可得通项公式；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$，结合二次函数性质求其最小值.

【小问 1 详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，因为 $a_3=-16$，$S_9=-72$，

所以 $a_1+2d=-16$，$9a_1+36d=-72$，

所以 $a_1=-24$，$d=4$，

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=4n-28$；

小问 2 详解】

因为 $a_n=4n-28$，所以 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=2n^2-26n=2\left(n-\dfrac{13}{2}\right)^2-\dfrac{169}{2}$，$n\in\mathrm{N}^*$，

当 $n=6$ 或 $n=7$ 时，$S_n$ 取最小值，最小值为-84，

所以 $S_n$ 有最小值-84，$S_n$ 取最小值时，$n=6$ 或 $n=7$.