

高一数学 测试卷

2023. 11

班级: _____

姓名: _____

注
意
事
项

1. 本试卷共 4 页, 共 21 道小题, 满分 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 在答题卡上指定位置贴好条形码, 或填涂考号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上, 在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上, 选择题用 2B 铅笔作答, 其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 答题不得使用任何涂改工具。

出题人: 高一备课组

审核人: 高一备课组

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 则 $A \cup B =$

- (A) $\{x | x \leq 2\}$ (B) $\{x | x \geq -1\}$ (C) $\{x | x > -1\}$ (D) $\{x | x > 0\}$

2. 方程组 $\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$ 的解集是

- (A) $\{(1, -1), (-1, -1)\}$ (B) $\{(1, 1), (-1, 1)\}$
(C) $\{(1, -1), (-1, 1)\}$ (D) \emptyset

3. 已知命题 $p: \exists x > 1, x^2 - 1 > 0$. 则 $\neg p$ 是

- (A) $\forall x > 1, x^2 - 1 > 0$ (B) $\forall x > 1, x^2 - 1 \leq 0$
(C) $\exists x > 1, x^2 - 1 \leq 0$ (D) $\exists x \leq 1, x^2 - 1 \leq 0$

4. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则

- (A) $ac^2 > bc^2$ (B) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (C) $a^2 > b^2$ (D) $a^3 > b^3$

5. 已知 $x > 0, y > 0, 2x + y = 2$, 则 xy 的最大值是

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) 1

6. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1-x}$, 那么 $f(2) =$

- (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

7. 函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ 的零点个数是

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

8. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 “ $f(0) = 0$ ” 是 “ $f(x)$ 为奇函数” 的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 4, \\ \frac{1}{2}x, & x > 4. \end{cases}$ 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $(a, a+1)$ 上单调递增,

则实数 a 的取值范围是

- (A) $(-\infty, 1]$ (B) $[1, 4]$ (C) $[4, +\infty)$ (D) $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

10. 右图为某三岔路口交通环岛简化模型, 在某高峰时段, 单位时间进出路口 $A, B,$

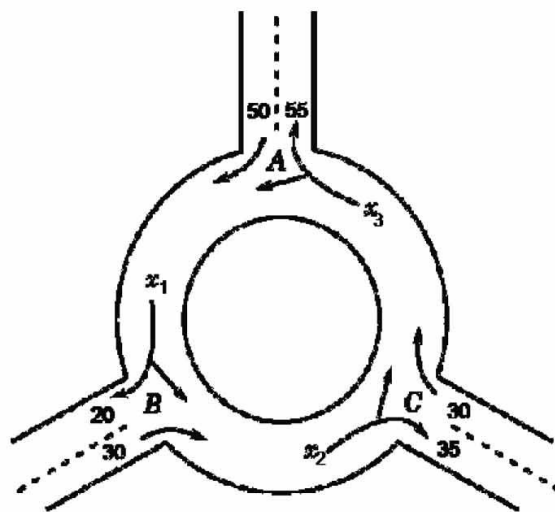
C 的机动车辆数如图所示: 图中 x_1, x_2, x_3

分别表示该时段单位时间通过路段 $\widehat{AB},$

$\widehat{BC}, \widehat{CA}$ 的机动车辆数 (假设: 单位时

间内, 在上述路段中, 同一路段上驶入

与驶出的车辆数相等), 则



- (A) $x_1 > x_2 > x_3$ (B) $x_1 > x_3 > x_2$ (C) $x_3 > x_2 > x_1$ (D) $x_2 > x_3 > x_1$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分.

11. 函数 $f(x) = \sqrt{2-x} + \frac{1}{x}$ 的定义域是_____.

12. 若关于 x 的方程 $x^2 - ax + a = 0$ 的两个实数根的平方和为 3, 则实数 $a =$ _____.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x+1}, & x > 0. \end{cases}$ 若 $f(x_0) = 2$, 则实数 $x_0 =$ _____;

函数 $f(x)$ 的值域为_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$. 能够说明“若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$,

则 $f(x)$ 是增函数”为假命题的一个函数是_____.

15. 调查显示, 垃圾分类投放可以带来约 0.34 元/千克的经济效益. 为激励居民垃圾分类, 某市准备给每个家庭发放一张积分卡, 每分类投放 1 kg 积分 1 分, 若一个家庭一个月内垃圾分类投放总量不低于 100 kg, 则额外奖励 x 分 (x 为正整数). 月底积分会按照 0.1 元/分进行自动兑换.

①当 $x = 10$ 时, 若某家庭某月产生 120 kg 生活垃圾, 该家庭该月积分卡能兑换_____元;

②为了保证每个家庭每月积分卡兑换的金额均不超过当月垃圾分类投放带来的收益的 40%, 则 x 的最大值为_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (本小题 14 分)

设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 + 5x > 0\}$, 集合 $B = \{x | |x - m| < 4\}$, 其中 $m \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $m = 2$ 时, 求 $A \cap B, (\complement_U A) \cup B$;

(II) 若 $B \subseteq A$, 求 m 的取值范围.

17. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 6$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $a = 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y = 5x$ 交点的坐标;

(II) 若函数 $f(x)$ 有两个不相等的负实数零点, 求 a 的取值范围;

(III) 若函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上不单调, 求 a 的取值范围.

18. (本小题 12 分)

已知 a, b 都是正实数,

(I) 试比较 $a^3 + b^3$ 与 $ab^2 + a^2b$ 的大小, 并证明;

(II) 当 $a + b = 1$ 时, 求证: $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$.

19. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$

(I) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性并证明;

(II) 用定义证明函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增;

(III) 画出函数 $f(x)$ 的图像,并直接写出函数 $f(x)$ 的值域.

20. (本小题 14 分)

某机床厂今年年初用 98 万元购入一台数控机床,并立即投入生产使用.已知该机床在使用过程中所需要的各种支出费用总和 t (单位:万元)与使用时间 x ($x \in \mathbf{N}^*$,单位:年)之间的函数关系式为: $t = 2x^2 + 10x$.该机床每年的生产总收入为 50 万元.设使用 x 年后数控机床的盈利额为 y 万元.(盈利额等于总收入减去购买成本及所有使用支出费用)

(I) 写出 y 与 x 之间的函数关系式;

(II) 从第几年开始,该机床开始盈利(盈利额为正值)?

(III) 使用若干年后,对该机床的处理方案有两种:

(1) 当盈利额达到最大值时,以 12 万元价格再将该机床卖出.

(2) 当年平均盈利额达到最大值时,以 30 万元价格再将该机床卖出;

研究一下哪种处理方案较为合理?请说明理由.

21. (本小题 15 分)

设 A 是实数集的非空子集,称集合 $B = \{uv \mid u, v \in A, \text{且 } u \neq v\}$ 为集合 A 的生成集.

(I) 当 $A = \{2, 3, 5\}$ 时,写出集合 A 的生成集 B ;

(II) 若 A 是由 5 个正实数构成的集合,求其生成集 B 中元素个数的最小值;

(III) 判断是否存在 4 个正实数构成的集合 A ,使其生成集 $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$,并说明理由.

高一数学 测试卷答案

一、BCBDB DBBDD

二、 $(-\infty, 0) \cup (0, 2]$ -1 $-1, (-\infty, 3]$ $f(x) = (x - \frac{1}{4})^2$ (答案不唯一) ①13, ②36

三、

16. (本小题 14 分)

解: (I) $A = \{x | x < -5 \text{ 或 } x > 0\}$, $\complement_U A = \{x | -5 \leq x \leq 0\}$

当 $m = 2$ 时, $B = \{x | -2 < x < 6\}$

$A \cap B = \{x | 0 < x < 6\}$

$(\complement_U A) \cup B = \{x | -5 \leq x < 6\}$ 7 分

(II) $B = \{x | m - 4 < x < m + 4\}$

依题意: $m + 4 \leq -5$ 或 $m - 4 \geq 0$

解得: $m \leq -9$ 或 $m \geq 4$

即 m 的取值范围为 $\{m | m \leq -9 \text{ 或 } m \geq 4\}$ 14 分

17. (本小题 15 分)

解: (I) 由 $f(x) = x^2 + 6 = 5x$, 即: $x^2 - 5x + 6 = 0$, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

所以函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y = 5x$ 的交点为 $(2, 10)$, $(3, 15)$ 5 分

(II) 若函数 $f(x)$ 有两个不相等的负实数零点 x_1, x_2

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = 4a^2 - 4(a+6) > 0 \\ x_1 x_2 = a+6 > 0 \\ x_1 + x_2 = 2a < 0 \end{cases} \quad \text{或者使用} \begin{cases} \Delta = 4a^2 - 4(a+6) > 0 \\ \text{对称轴 } x = a < 0 \\ f(0) = a+6 > 0 \end{cases}$$

解得 $-6 < a < -2$

所以 a 的取值范围是 $\{a | -6 < a < -2\}$ 11 分

(III) 依题意: 二次函数 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 6$ 的对称轴方程为 $x = a > 2$

即 a 的取值范围是 $\{a | a > 2\}$ 15 分

18. (本小题 12 分)

解: (I) 结论: $a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

证明: $(a^3 + b^3) - (ab^2 + a^2b) = (a^3 - ab^2) + (b^3 - a^2b)$

$$= a(a^2 - b^2) + b(b^2 - a^2) = (a+b)(a-b)^2$$

因为 a, b 都是正数, 所以 $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

即 $a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

..... 6分

(II) 证明: 因为 a, b, c 都是正数, 且 $a + b = 1$

$$\begin{aligned} \text{所以} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) &= \left(1 + \frac{a+b}{a}\right) \left(1 + \frac{a+b}{b}\right) = \left(2 + \frac{b}{a}\right) \left(2 + \frac{a}{b}\right) \\ &= 5 + 2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 5 + 4\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9 \end{aligned}$$

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

..... 12分

19. (本小题 15分)

解: (I) 函数 $f(x)$ 是奇函数, 证明如下:

函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 关于原点对称,

$$\text{且 } f(-x) = \frac{6(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-6x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

..... 5分

(II) 任取 $x_1, x_2 \in (0, 1)$ 且 $x_1 < x_2$

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{6x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{6x_2}{x_2^2 + 1} = \frac{6(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}$$

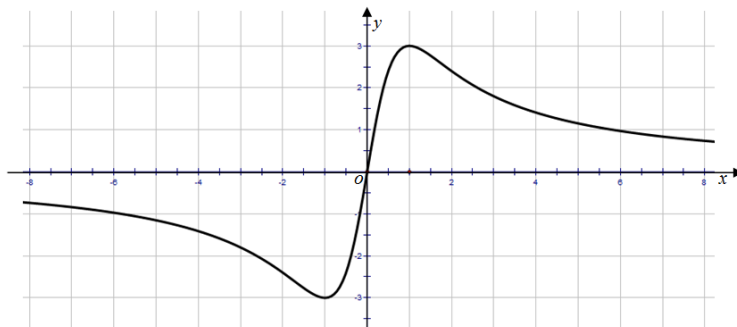
因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1x_2 - 1 < 0$, 即 $\frac{6(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} < 0$

从而 $f(x_1) < f(x_2)$

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增

..... 11分

(III)



函数 $f(x)$ 的值域为: $[-3, 3]$

..... 15分

20. (本小题 14 分)

解: (I) 依题得: $y = 50x - (2x^2 + 10x) - 98 = -2x^2 + 40x - 98. (x \in N^*)$ 2 分

(II) 解不等式 $-2x^2 + 40x - 98 > 0$, 得: $10 - \sqrt{51} < x < 10 + \sqrt{51}$

$\therefore x \in N^*, \therefore 3 \leq x \leq 17$, 故从第3年开始盈利. 7 分

(III) (1) $y = -2x^2 + 40x - 98 = -2(x-10)^2 + 102$,

当 $x = 10$ 时, $y_{\max} = 102$

10 年时, 盈利额达到最大值, 工厂共获利 $102 + 12 = 114$ 万元 10 分

$$(2) \frac{y}{x} = -2x + 40 - \frac{98}{x} = 40 - (2x + \frac{98}{x}) \leq 40 - 2\sqrt{2x \cdot \frac{98}{x}} = 12$$

当且仅当 $2x = \frac{98}{x}$ 时, 即 $x = 7$ 时, 等号成立.

7 年时, 年平均盈利额达到最大值, 工厂共获利 $12 \times 7 + 30 = 114$ 万元 13 分

工厂共获利的最大值相同, 而方案 (2) 所用的时间较短,

故方案 (2) 比较合理. 14 分

21. (本小题 15 分)

解: (I) $B = \{6, 10, 15\}$ 3 分

(II) 记 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, 不妨设 $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

则 $a_1a_2 < a_1a_3 < a_1a_4 < a_1a_5 < a_2a_5 < a_3a_5 < a_4a_5$.

所以集合 B 中元素个数大于或等于 7.

又因为若 $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 时, 集合 $B = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$, 且 B 中元素个数为 7.

所以集合 B 中元素个数的最小值为 7. 9 分

(III) 结论: 不存在集合 A , 使其生成集 $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$.

证明: 假设存在集合 A , 使其生成集 $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$,

不妨设 $A = \{a, b, c, d\}$, 其中 $0 < a < b < c < d$,

则 $B = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$.

由 $0 < a < b < c < d$, 得集合 B 中的最大数为 $cd = 16$, 最小数为 $ab = 2$.

又因为集合 B 中 6 个元素的乘积为 $ab \times ac \times ad \times bc \times bd \times cd = 2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 10 \times 16$,

所以 $(abcd)^3 = 2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 10 \times 16$,

即 $(2 \times 16)^3 = 2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 10 \times 16$, 此式显然不成立,

所以假设错误, 即不存在集合 A , 使其生成集 $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$ 15 分