2022 北京一零一中初二（下）期中

数　学

（本卷满分 100 分，考试时间 90 分钟）

命题：初二备课组　　　审核：初中数学组

一、选择题：（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 下列二次根式中，最简二次根式是（　　）

A. $-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　C. $\sqrt{18}$　　D. $\sqrt{a^2}$

2. 在▱$ABCD$ 中，$\angle A$∶$\angle B$∶$\angle C$∶$\angle D$ 的值可以是（　　）

A 1∶2∶3∶4　　B. 1∶2∶2∶1

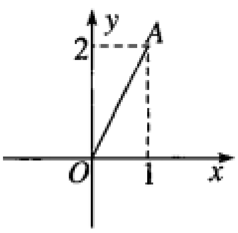
C. 1∶1∶2∶2　　D. 2∶3∶2∶3

3. 关于 $\sqrt{8}$ 的叙述正确的是（　　）

A. 在数轴上不存在表示 $\sqrt{8}$ 的点　　B. $\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

C. 与 $\sqrt{8}$ 最接近的整数是 3　　D. $\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

4. 如图，已知点 A 的坐标为 $(1,2)$，则线段 OA 的长为(　　)



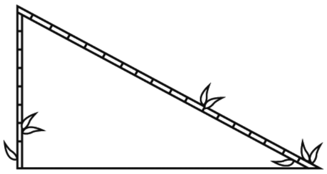
A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

5. 下列条件中，不能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是（　）

A. $\angle A=\angle C,\angle B=\angle D$　　B. $AB//CD,AB=CD$

C. $AB=CD,AD//BC$　　D. $AB//CD,AD//BC$

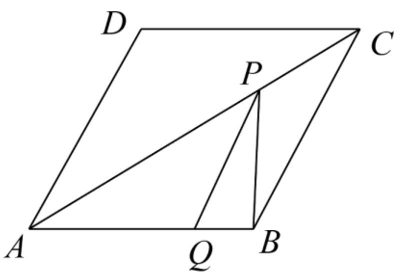
6. 如图，《九章算术》中的“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去根六尺，问折高者几何？意思是：一根竹子，原高一丈（一丈＝十尺），一阵风将竹子折断，其竹梢恰好抵地，抵地处离竹子底部 6 尺远，求折断处离地面的高度．设竹子折断处离地面 x 尺，根据题意，可列方程为（　　）



A. $x^2+6^2=10^2$　　B. $(10-x)^2+6^2=x^2$

C. $x^2+(10-x)^2=6^2$　　D. $x^2+6^2=(10-x)^2$

7. 如图，在▱$ABCD$中，AD＝4，$\angle D$＝120°，AC平分$\angle DAB$，P是对角线AC上的一个动点，点Q是AB边上的一个动点，则 $PB+PQ$的最小值是（　　）



A. 4　　　　B. $2\sqrt{3}$　　　　C. $2\sqrt{3}+1$　　　　D. 3

8. 已知m、n是两个连续自然数$(m<n)$，且$q=mn$，设$p=\sqrt{q+n}+\sqrt{q-m}$，则下列对p　表述中正确的是（　　）

A. 总是偶数　　　　B. 总是奇数

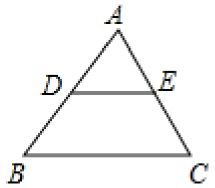
C. 总是无理数　　　　D. 有时是有理数，有时是无理数

二、填空题：（本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

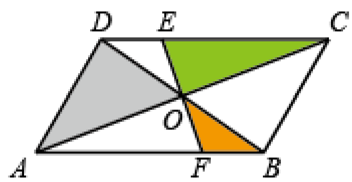
9. 要使二次根式$\sqrt{2x-4}$在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 ________.

10. 命题“平行四边形的对角线互相平分”的逆命题是____________________.

11. 在△ABC中，D、E分别为AB和AC中点，若BC＝12，则DE的长为__________.



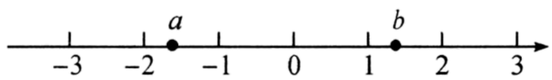
12. 如图，▱$ABCD$　对角线AC和BD相交于点O，过点O的直线分别交CD和AB于点E、F，且AB＝7，BC＝4，$\angle DAB$＝60°，那么图中阴影部分的面积为__________.



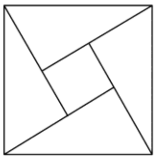
13. 在Rt△ABC中，$\angle ACB$＝90°，AC＝4，AB＝5．点P在直线AC上，且BP＝6，则线段AP的长为___________.

14. 已知$\sqrt{a-2}+|b+1|=0$，则$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{a}}+\sqrt{a-2b}$＝________.

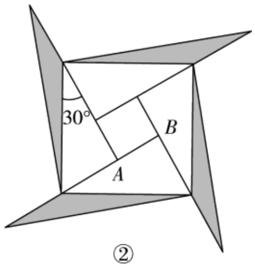
15. 实数a，b在数轴上的位置如图所示，化简$\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(b-1)^2}$的结果是__________.



16. 图①是我国古代著名的“赵爽弦图”的示意图，它是由四个全等的直角三角形围成的．若直角三角形的一个锐角为30°，将各三角形较短的直角边分别向外延长一倍，得到图②所示的“数学风车”，设$AB=2$，则图中阴影部分面积为__________.



①



②

三、解答题：（本大题共10小题，第17题8分，第18，19，20，23题，每小题5分，第21，22，24，25题，每小题6分，第26题8分，共60分）

17. 计算：

(1) $4\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$；

(2) $(4\sqrt{3}+6\sqrt{6})\div 2\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

18. 已知：△ABC.

求作：平行四边形$ABCD$.

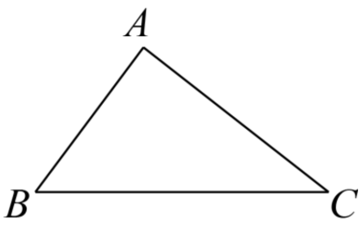
小聪同学的做法如下：

①以点C为圆心，AB长为半径作弧；

②以点A为圆心，BC长为半径作弧；

③两弧在BC上方交于点D，连接AD，CD.

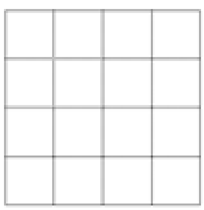
四边形$ABCD$即为所求平行四边形.



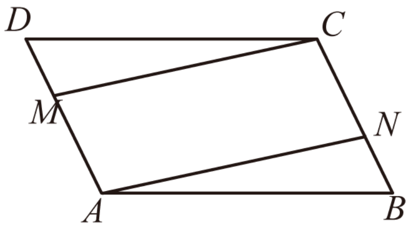
（1）请你根据小聪的做法，使用直尺和圆规完成作图（保留作图痕迹）；

（2）作图依据是：____________________________________.

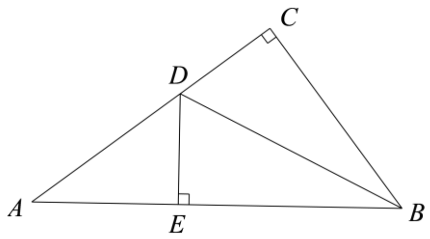
19. 如图，在4×4的正方形网格中，每个小方格的顶点叫做格点，以格点为顶点画△ABC，使$AB=\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{10}$．标出顶点位置，并判断△ABC形状为__________三角形.



20. 如图，在▱$ABCD$中，M，N是AD，BC上的两点且$DM=BN$，连接CM，AN．求证：$CM=AN$.



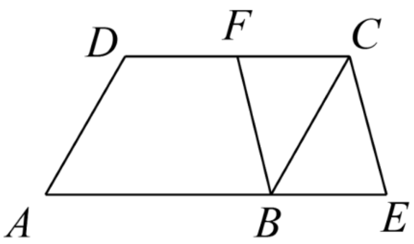
21. 如图，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，BD 平分$\angle ABC$交 AC 于点 D，$DE\perp AB$ 交 AB 于点 E，已知 $CD=6$，$AD=10$．



(1) 求线段 AE 的长；

(2) 求$\triangle ABC$ 的面积．

22. 如图，在▱$ABCD$ 中，F 是 CD 的中点，延长 AB 到点 E，使 $BE=\dfrac{1}{2}AB$，连结 BF，CE．



（1）求证：四边形 $BECF$　平行四边形；

（2）若 $AB=6$，$AD=4$，$\angle A=60^{\circ}$，求 CE 的长．

23. 已知 $x=2\sqrt{2}+\sqrt{7}$， $y=2\sqrt{2}-\sqrt{7}$，试求代数式 $x^{2}-5xy+y^{2}$ 的值．

24. 已知 $y=\sqrt{x^{2}-10x+25}-x+6$，当 x 分别取1，2，3，…，2022时，求所对应 y 值的总和．

25. 小明在解方程 $\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2$ 时采用了下面　方法：

$\left(\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}\right)\left(\sqrt{24-x}+\sqrt{8-x}\right)=\sqrt{\left(24-x\right)^{2}}-\left(\sqrt{8-x}\right)^{2}$

$=\left(24-x\right)-\left(8-x\right)=16$

$\because\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2$，

$\therefore\sqrt{24-x}+\sqrt{8-x}=8$．

将这两式相加可得 $\begin{cases}\sqrt{24-x}=5\\\sqrt{8-x}=3\end{cases}$ 解得 $x=-1$．

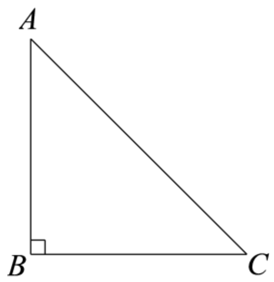
经检验 $x=-1$ 是原方程的解.

请你学习小明的方法，解下列方程：

（1）$\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}=4$；

（2）$\sqrt{9x^2+8x-3}-\sqrt{9x^2-4x-3}=2$

26. 如图，在△ABC 中，AB＝BC，∠ABC＝90°，D 是线段 AC 上一点（AD＞CD），连接 BD，过点 A 作 BD 的垂线，交 BD 于点 E，交 BC 于点 F.



(1) 依题意补全图形；

(2) 若∠CAE＝α，求∠CBD 的大小（用含 α 的式子表示）；

(3) 若点 P 在线段 AF 上，AP＝BD，连接 DP，BP， 用等式表示线段 AB，BP，DP 之间的数量关系，并证明你的结论.

参考答案

一、选择题：（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 下列二次根式中，最简二次根式是（　　）

A. $-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　C. $\sqrt{18}$　　D. $\sqrt{a^2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义逐一判断即可；

【详解】解：A．2 是不能开方的整数，因此$\sqrt{2}$是最简二次根式，本选项符合题意；

B．$\frac{1}{3}$是分数，因此$\sqrt{\frac{1}{3}}$不最简二次根式，本选项不符合题意；

C．$18=2\times9$，$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，因此$\sqrt{18}$不最简二次根式，本选项不符合题意；

D．$\sqrt{a^2}=|a|$，因此$\sqrt{a^2}$不最简二次根式，本选项不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题考查最简二次根式的定义，注意：被开方数不能含开的尽方的因数或因式；被开方数的因数是整数，因式是整式；解题关键熟记最简二次根式的定义．

2. 在▱$ABCD$ 中，$\angle A$∶$\angle B$∶$\angle C$∶$\angle D$ 的值可以是（　　）

A. 1∶2∶3∶4　　B. 1∶2∶2∶1

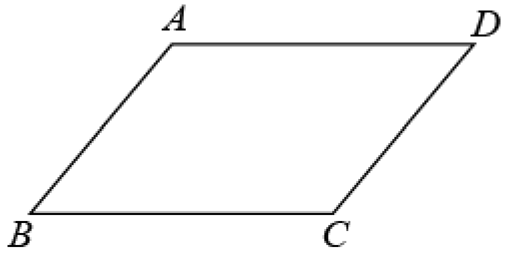
C. 1∶1∶2∶2　　D. 2∶3∶2∶3

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质得到$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$\angle B+\angle C=180°$，$\angle A+\angle D=180°$，根据以上结论即可选出答案．

详解】解：如图，



∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

∴$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D$ 的值可以是$2:3:2:3$.

故选 D.

【点睛】本题主要考查对平行四边形的性质的理解和掌握，能根据平行四边形的性质进行判断是解此题的关键，题目比较典型，难度适中.

3. 关于$\sqrt{8}$的叙述正确的是（　　）

A. 在数轴上不存在表示$\sqrt{8}$的点

B. $\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

C. 与$\sqrt{8}$最接近的整数是3

D. $\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据数轴上的点与实数是一一对应的关系，实数的运算法则，二次根式的性质化简计算即可.

【详解】解：A、数轴上的点既可以表示有理数，也可以表示无理数，所以在数轴上存在表示$\sqrt{8}$的点，故选项错误；

B、$\sqrt{8}=2\sqrt{2}\neq\sqrt{2}+\sqrt{6}$,，故选项错误；

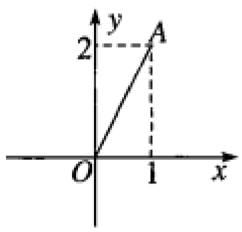
C、与$\sqrt{8}$最接近的整数是 3，故选项正确；

D、$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故选项错误.

故选 C.

【点睛】本题涉及了数轴上的点与实数是一一对应的关系，实数的运算法则，二次根式的性质化简等知识点，熟练掌握每一个知识点是正确解题的关键.

4. 如图，已知点 A 的坐标为$\left(1,2\right)$，则线段OA的长为(　　)



A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】根据勾股定理计算即可.

【详解】解：$OA=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

故选：B．

【点睛】本题考查的是勾股定理，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$．

5. 下列条件中，不能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是（　）

A. $\angle A=\angle C, \angle B=\angle D$　　B. $AB//CD, AB=CD$

C. $AB=CD, AD//BC$　　D. $AB//CD, AD//BC$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的判断方法一一判断即可解决问题．

【详解】解：A、∵ $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形，正确，故本选项错误；

B、∵$AB // CD$，$AB=CD$，

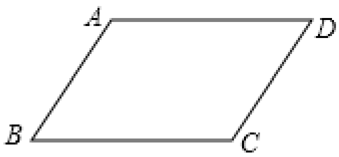
∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形，正确，故本选项错误；

C、根据 $AB=CD$，$AD // BC$ 可能得出四边形是等腰梯形，不一定推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形，错误，故本选项正确；

D、∵$AB // CD$，$AD // BC$，

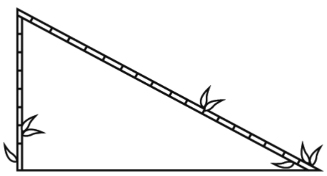
∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形，正确，故本选项错误；

故选：C．



【点睛】本题考查了平行四边形的判定的应用，注意：平行四边形的判定定理有：①有两组对角分别相等的四边形是平行四边形，②有两组对边分别相等的四边形是平行四边形，③有一组对边相等且平行的四边形是平行四边形，④对角线互相平分的四边形是平行四边形，⑤有两组对边分别平行的四边形是平行四边形．

6. 如图，《九章算术》中的“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去根六尺，问折高者几何？意思是：一根竹子，原高一丈（一丈＝十尺），一阵风将竹子折断，其竹梢恰好抵地，抵地处离竹子底部 6 尺远，求折断处离地面的高度．设竹子折断处离地面 x 尺，根据题意，可列方程为（　　）



A. $x^2+6^2=10^2$　　B. $(10-x)^2+6^2=x^2$

C. $x^2+(10-x)^2=6^2$　　D. $x^2+6^2=(10-x)^2$

【答案】D

【解析】

【分析】竹子折断后刚好构成一直角三角形，设竹子折断处离地面 x 尺，则斜边为（10-x）尺，利用勾股定理解题即可.

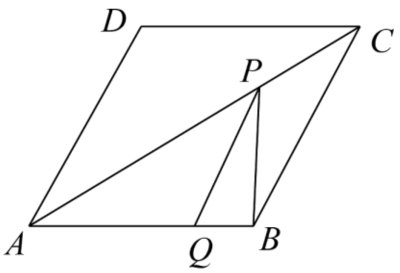
【详解】解：设竹子折断处离地面 x 尺，则斜边为（10-x）尺，

根据勾股定理得：$x^2+6^2=(10-x)^2$.

故选 D

【点睛】此题考查了勾股定理　应用，解题的关键是利用题目信息构造直角三角形，从而运用勾股定理解题.

7. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AD=4$，$\angle D=120°$，AC 平分$\angle DAB$，P 是对角线 AC 上的一个动点，点 Q 是 AB 边上的一个动点，则 $PB+PQ$ 的最小值是（　　）



A. 4　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}+1$　　D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】先根据题意证出四边形 $ABCD$ 是菱形，根据菱形的对称性可得，线段 AB 与 AD 关于 AC 对称，设点 Q'是点 Q 的对称点，则 $PB+PQ=PB+PQ'$， 当点 Q'运动到点 Q''时，即 $BQ''\perp AD$ 时，$PB+PQ'$最小，解直角三角形即可.

【详解】解：在▱$ABCD$ 中，$AD=4$，AC 平分$\angle DAB$，

∴▱$ABCD$ 是菱形，$AB=AD=4$，

∵$\angle D=120°$，

∴$\angle DAB=60°$，

∵▱$ABCD$ 是菱形，

∴线段 AB 与 AD 关于 AC 对称，

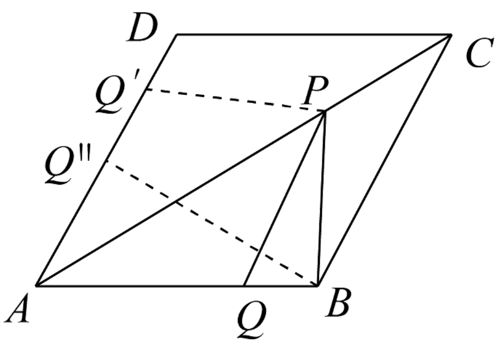
点 Q 关于 AC 对称的点在 AD 上，

设点 Q'是点 Q 的对称点，则 $PB+PQ=PB+PQ'$，

当点 Q'运动到点 Q''时，即 $BQ''\perp AD$ 时，$PB+PQ'$最小，

此时，$BQ''=AB\sin\angle DAB=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

∴$PB+PQ$ 的最小值是 $2\sqrt{3}$，



故答案选：B．

【点睛】本题主要考查了轴对称−最短路线问题，菱形的性质与判定，根据垂线段最短作出辅助线，确定点 Q'' 的位置是解答此题的关键．

8. 已知 m 、n 是两个连续自然数 $(m<n)$，且 $q=mn$，设 $p=\sqrt{q+n}+\sqrt{q-m}$，则下列对 p 的表述中正确的是（　　）

A. 总是偶数　　B. 总是奇数

C. 总是无理数　　D. 有时是有理数，有时是无理数

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可知，$n=m+1$，$q=mn$，代入 $p=\sqrt{q+n}+\sqrt{q-m}$，根据非负数的算术平方根求解即可．

【详解】由题意可知，$n=m+1$，$q=mn$，

而 $p=\sqrt{q+n}+\sqrt{q-m}$，

则 $p=\sqrt{mn+n}+\sqrt{mn-m}=\sqrt{n(m+1)}+\sqrt{m(n-1)}=m+1+m=2m+1$，

由于 m 是自然数，所以 $2m+1$ 是奇数，

故选 B

【点睛】本题考查了一个非负数的算术平方根，根据题意将 $n=m+1$，$q=mn$ 代入是解题的关键．

二、填空题：（本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

9. 要使二次根式 $\sqrt{2x-4}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 ________．

【答案】$x\geq2$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件列出关于 x 的不等式，求出 x 的取值范围即可．

【详解】解：∵二次根式$\sqrt{2x-4}$在实数范围内有意义，

∴2x-4≥0，解得 x≥2.

故答案为：x≥2.

【点睛】本题考查的是二次根式有意义的条件，即被开方数大于等于 0.

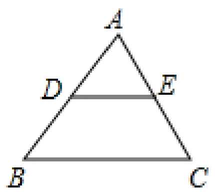
10. 命题“平行四边形的对角线互相平分”的逆命题是____________________.

【答案】如果一个四边形的对角线互相平分，那么这个四边形是平行四边形.

【解析】

【详解】解：对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另外一个命题的结论和条件，

那么这两个命题叫做互逆命题，其中一个命题叫做原命题，另外一个命题叫做原命题的逆命题.
因此，“平行四边形的对角线互相平分”的逆命题是“如果一个四边形的对角线互相平分，那么这个四边形是平行四边形”.
故答案为：如果一个四边形的对角线互相平分，那么这个四边形是平行四边形.
11. 在△*ABC* 中，*D*、*E* 分别为 *AB* 和 *AC* 中点，若 *BC*＝12，则 *DE* 的长为__________.



【答案】6

【解析】

【分析】直接利用三角形中位线定理可求 *DE*.

【详解】解：∵△*ABC* 中，*D*、*E* 分别是 *AB*、*AC* 的中点，

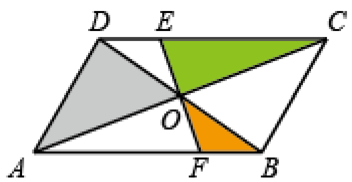
∴*DE* 为三角形 *ABC* 的中位线，

∴$DE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times12=6$

故答案为：6.

【点睛】本题考查了三角形中位线的性质，即三角形的中位线平行于第三边并等于第三边的一半.

12. 如图，▱*ABCD* 的对角线 *AC* 和 *BD* 相交于点 *O*，过点 *O* 的直线分别交 *CD* 和 *AB* 于点 *E*、*F*，且 *AB*＝7，*BC*＝4，∠*DAB*＝60°，那么图中阴影部分的面积为__________.



【答案】$7\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据四边形$ABCD$是平行四边形，$AD//BC$，$AD=BC$，$AO=OC$，$\angle DAO=\angle BCO$，证明$\Delta AOD\cong\Delta COB(SAS)$，即$\Delta AOD$和$\Delta COB$的面积相等，同理可证：$\Delta DOE$和$\Delta BOF$的面积相等，$\Delta COE$和$\Delta AOF$的面积相等，即阴影部分的面积等于平行四边形$ABCD$的面积的一半即可求解.

【详解】解：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD//BC$，$AD=BC$，$AO=OC$，

$\therefore \angle DAO=\angle BCO$，

在ΔAOD和ΔCOB中

$$\begin{cases}AD=BC\\AO=OC\\\angle DAO=\angle BCO\end{cases}$$

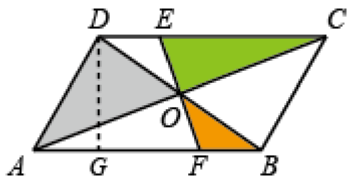
$\therefore \Delta AOD\cong\Delta COB(SAS)$，

即ΔAOD和ΔCOB的面积相等，

同理可证：ΔDOE和ΔBOF的面积相等，ΔCOE和ΔAOF的面积相等，

即阴影部分的面积等于平行四边形$ABCD$的面积的一半，

过点D作AB的垂线交于G点，



$\because \angle DAB=60°$，

$\therefore \angle ADG=30°$，

$\therefore AG=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC=2$，

$\therefore DG=\sqrt{AD^2-AG^2}=2\sqrt{3}$，

$\because$平行四边形$ABCD$的面积为：$AB\times DG=7\times2\sqrt{3}=14\sqrt{3}$，

$\therefore$阴影部分的面积是$7\sqrt{3}$，

故答案为：$7\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，全等三角形的性质和判定的应用、勾股定理，解题的关键是求出阴影部分的面积等于平行四边形$ABCD$的面积的一半.

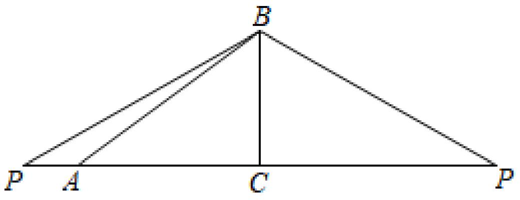
13. 在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$AB=5$．点P在直线AC上，且$BP=6$，则线段AP的长为__________.

【答案】$3\sqrt{3}-4$或$3\sqrt{3}+4$

【解析】

【分析】根据题意，作出图形，分类讨论，根据勾股定理求解即可.

【详解】解：如图，



∵ $\angle ACB=90°$，$AC=4$，$AB=5$

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

在Rt△BPC中，$PC=\sqrt{PB^2-BC^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

$\therefore PA=PC-AC=3\sqrt{3}-4$ 或 $PA=PC+AC=3\sqrt{3}+4$

故答案为：$3\sqrt{3}-4$ 或 $3\sqrt{3}+4$

【点睛】本题考查了勾股定理，根据题意作出图形，分类讨论是解题的关键.

14. 已知 $\sqrt{a-2}+|b+1|=0$，则 $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{9}{a}}+\sqrt{a-2b}=$________.

【答案】$\sqrt{2}+2$ ## $2+\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据非负性先分别求出 $a=2$，$b=-1$，再将 a，b 的值代入化简二次根式即可得出答案

【详解】解：∵ $\sqrt{a-2}+|b+1|=0$

$\therefore a-2=0$，$b+1=0$

$\therefore a=2$，$b=-1$

$\therefore \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{9}{a}}+\sqrt{a-2b}$

$=\dfrac{2}{3}\times\sqrt{\dfrac{9}{2}}+\sqrt{2-2\times(-1)}$

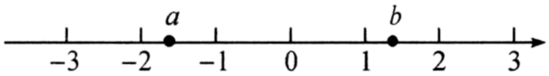
$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+2$

$=\sqrt{2}+2$

故答案为：$\sqrt{2}+2$.

【点睛】本题考查了绝对值非负性，二次根式的混合运算，熟练掌握运算法则是解题的关键.

15. 实数 a ， b 在数轴上的位置如图所示，化简 $\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(b-1)^2}$ 的结果是__________.



【答案】2

【解析】

【分析】先根据数轴点的位置关系判断绝对值里面的数与 0 的关系，再根据二次根式的性质即可求出答案．

【详解】解：由数轴上的位置即可得出：$-2<a<-1<0<1<b$

$\therefore a-b<0$ ， $a+1<0$ ， $b-1>0$

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(b-1)^2}$

$=|a-b|-|a+1|-|b-1|$

$=-(a-b)+(a+1)-(b-1)$

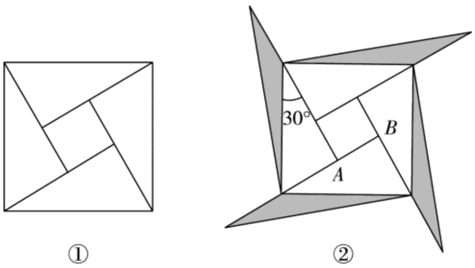
$=-a+b+a+1-b+1$

$=2$

故答案为：2．

【点睛】本题考查了实数与数轴、二次根式的性质与化简，掌握二次根式性质与化简的应用，根据数轴点的位置关系判断绝对值里面的数与 0 的关系是解题关键．

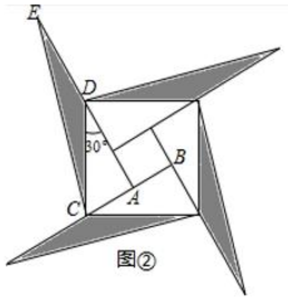
16. 图①是我国古代著名的“赵爽弦图”的示意图，它是由四个全等的直角三角形围成的．若直角三角形的一个锐角为 30°，将各三角形较短的直角边分别向外延长一倍，得到图②所示的“数学风车”，设 AB＝2，则图中阴影部分面积为__________.



【答案】$8+4\sqrt{3}$ ## $4\sqrt{3}+8$

【解析】

【详解】解：如图，



设 $AC=x$，则 $BC=AD=2+x$，

∵ $\angle ADC=30°$，

$\therefore AC=\frac{1}{2}AD$

$\therefore AD=\sqrt{3}AC$，

$\therefore 2+x=\sqrt{3}x$，

$\therefore x=\sqrt{3}+1$，

$\therefore AC=\sqrt{3}+1$，

∵ 将各三角形较短的直角边分别向外延长一倍，$DE=AC=\sqrt{3}+1$

∴ 图中阴影部分面积 $=4\times\frac{1}{2}AC^2=4\times\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}+1\right)^2=8+4\sqrt{3}$

故答案为 $8+4\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查旋转角的定义以及直角三角形的性质，本题关键在于用 AB 表示出 AC 的长度

三、解答题：（本大题共 10 小题，第 17 题 8 分，第 18，19，20，23 题，每小题 5 分，第 21，22，24，25 题，每小题 6 分，第 26 题 8 分，共 60 分）

17. 计算：

（1）$4\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$；

（2）$(4\sqrt{3}+6\sqrt{6})\div 2\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

【答案】（1）$6\sqrt{5}$

（2）$4+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）根据二次根式的性质化简，然后进行二次函数加减运算即可；

（2）根据二次根式的混合运算法则进行计算即可

【小问 1 详解】

解：原式 $=4\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

$=6\sqrt{5}$

【小问 2 详解】

解：原式$=2+3\sqrt{2}+2-\sqrt{2}$

$=4+2\sqrt{2}$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，掌握二次根式的运算法则是解题的关键．

18. 已知：$\triangle ABC$．

求作：平行四边形 $ABCD$．

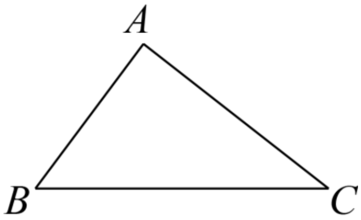
小聪同学　做法如下：

①以点 C 为圆心，AB 长为半径作弧；

②以点 A 为圆心，BC 长为半径作弧；

③两弧在 BC 上方交于点 D，连接 AD，CD．

四边形 $ABCD$ 即为所求平行四边形．



（1）请你根据小聪的做法，使用直尺和圆规完成作图（保留作图痕迹）；

（2）作图依据是：____．

【答案】（1）见解析　　（2）两组对边分别相等的四边形是平行四边形

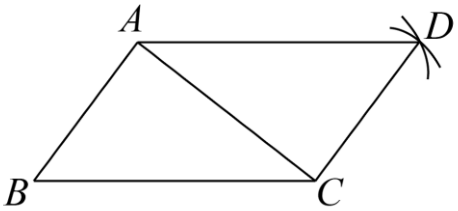
【解析】

【分析】（1）根据作图步骤即可作出图形；

（2）根据平行四边形的判定解决问题即可．

【小问 1 详解】

解：根据步骤即可得出平行四边形的图形



【小问 2 详解】

解：以点 C 为圆心，AB 长为半径作弧；得出 $AB=CD$

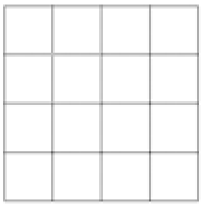
以点 A 为圆心，BC 长为半径作弧；得出 $AD=BC$

根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形即可得出四边形 $ABCD$ 即为所求平行四边形

∴作图依据是：两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

【点睛】本题考查了作图-复杂作图，平行四边形的判定等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

19. 如图，在 4×4 的正方形网格中，每个小方格的顶点叫做格点，以格点为顶点画△ABC，使 $AB=\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{10}$．标出顶点位置，并判断△ABC 形状为__________三角形.

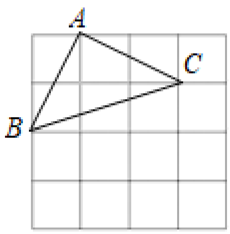


【答案】直角

【解析】

【分析】根据题意画出图形，再根据勾股定理逆定理即可得出答案.

【详解】解：如图：



∵ $AB=\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{10}$

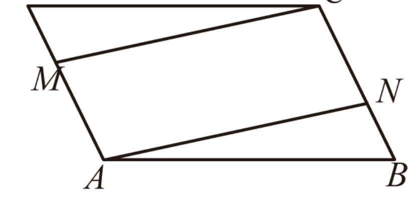
∴ $AB^2+AC^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=10=BC^2$

∴△ABC 形状为直角三角形

故答案为：直角.

【点睛】本题考查了在网格中判断直角三角形，熟练掌握勾股定理是解题的关键.

20. 如图，在▱$ABCD$ 中，M，N 是 AD，BC 上的两点且 $DM=BN$，连接 CM，AN．求证：$CM=AN$.



【答案】证明详见解析.

【解析】

【分析】求证△CDM和△ABN全等即可得到$CM=AN$.

【详解】证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$CD=AB$，$\angle D=\angle B$.

在△CDM和△ABN中，

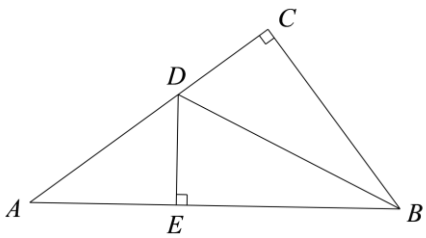
$$\begin{cases} CD=AB \\ \angle D=\angle B \\ DM=BN \end{cases}$$

∴△CDM≌△ABN(SAS)

∴$CM=AN$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质及全等三角形的判定和性质，熟练掌握证全等的方法是解题的关键.

21. 如图，Rt△ABC中，$\angle C$＝90°，BD平分$\angle ABC$交AC于点D，$DE\perp AB$交AB于点E，已知CD＝6，AD＝10.



（1）求线段AE的长；

（2）求△ABC的面积.

【答案】（1）8　（2）96

【解析】

【分析】（1）利用AAS证明$\triangle CBD\cong\triangle EBD$，即可得出$CD=DE$，再根据勾股定理即可求出$AE$的长；

（2）根据全等三角形的性质及勾股定求出$BE=BC=12$，$AB=20$，再根据三角形的面积公式即可得出答案.

【小问1详解】

解：∵BD平分$\angle ABC$，

$\therefore \angle CBD=\angle EBD$

∵$\angle C$＝90°，$DE\perp AB$

$\therefore \angle C=\angle BED=90°$

在$\triangle CBD$和△EBD中

$$\begin{cases}\angle C=\angle BED=90^\circ\\ \angle CBD=\angle EBD\\ BD=BD\end{cases}$$

$\therefore \triangle CBD \cong \triangle EBD$

$\therefore CD=DE=6$

在 $Rt\triangle AED$ 中，$AD=10$

$\therefore AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

【小问 2 详解】

由（1）知 $\triangle CBD \cong \triangle EBD$

$\therefore BC=BE$

设 $BC=BE=x$，则 $AB=x+8$

在$Rt\triangle ABC$ 中，根据 $AC^2+BC^2=AB^2$

即 $(6+10)^2+x^2=(x+8)^2$

解得：$x=12$

$\therefore BE=BC=12$

$\therefore AB=20$

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$

$=\frac{1}{2}AB\cdot DE+\frac{1}{2}CD\cdot BC$

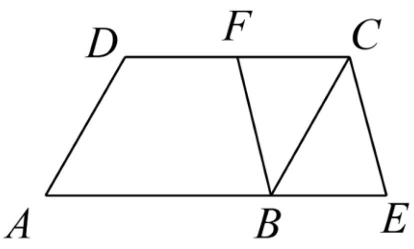
$=\frac{1}{2}\times 20\times 6+\frac{1}{2}\times 6\times 12$

$=60+36$

$=96$

【点睛】本题考查了全等三角形的性质、勾股定理，熟练掌握性质定理是解题的关键．

22. 如图，在▱$ABCD$ 中，F 是 CD 的中点，延长 AB 到点 E，使 $BE=\frac{1}{2}AB$，连结 BF，CE．



（1）求证：四边形 $BECF$ 是平行四边形；

（2）若 $AB=6$，$AD=4$，$\angle A=60^\circ$，求 CE 的长．

【答案】（1）见解析　（2）$\sqrt{13}$

【解析】

【分析】（1）根据平行四边形的性质得到 $AB\parallel CD$，且 $AB=DC$．由 F 是 CD 的中点，得到 $CF=\frac{1}{2}CD$．根据平行四边形的判定定理即可得到结论；

（2）如图，过点 C 作 $CH\perp BE$ 于点 H．解直角三角形得到 $BH=\frac{1}{2}CB$，CH，根据勾股定理即可得到结论．

【小问 1 详解】

证明：在▱$ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，且 $AB=DC$．

∵F 是 CD 的中点，

∴$CF=\frac{1}{2}CD$．

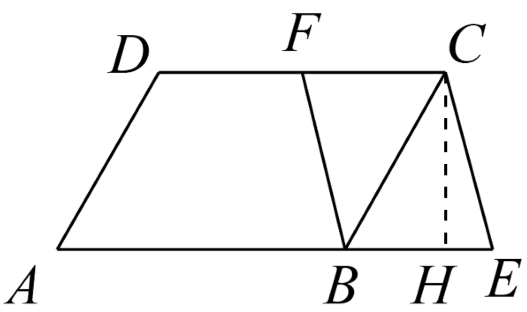
又∵$BE=\frac{1}{2}AB$，

∴$CF=BE$，且 $CF\parallel BE$，

∴四边形 $BECF$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

解：如图，过点 C 作 $CH\perp BE$ 于点 H．



在▱$ABCD$ 中，∵$\angle A=60°$，

∴$\angle CBE=60°$．

∵$AB=6$，$AD=4$，，

∴$CB=AD=4$，

∴$BH=\frac{1}{2}CB=2$，$CH=2\sqrt{3}$．

在▱$BECF$ 中，$BE=CF=\frac{1}{2}CD=3$，则 $EH=1$．

∴在 $Rt\triangle CHE$ 中，根据勾股定理知 $CE=\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{13}$．

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质、勾股定理．平行四边形的判定方法共有五种，应用时要认真领会它们之间的联系与区别，同时要根据条件合理、灵活地选择方法．

23. 已知 $x=2\sqrt{2}+\sqrt{7}$， $y=2\sqrt{2}-\sqrt{7}$，试求代数式 $x^2-5xy+y^2$ 的值.

【答案】25

【解析】

【分析】先将代数式 $x^2-5xy+y^2$ 变形为 $\left(x-y\right)^2-3xy$，再将 x 与 y 的值代入计算即可.

【详解】解： $x^2-5xy+y^2=x^2-2xy+y^2-3xy=\left(x-y\right)^2-3xy$，

将 $x=2\sqrt{2}+\sqrt{7}$， $y=2\sqrt{2}-\sqrt{7}$ 代入可得：

原式=$\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}-2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^2-3\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)$

=$\left(2\sqrt{7}\right)^2-3\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2\right]$

=28-3×1

=25

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算和代数式求值，解题的关键是将原代数式整理成方便代入计算的形式.

24. 已知 $y=\sqrt{x^2-10x+25}-x+6$，当 x 分别取1， 2 ， 3 ，…， 2022 时，求所对应 y 值的总和.

【答案】2042

【解析】

【分析】从第 5 个数开始代数式的值为 1，一共有 2018 个 1，再加上 9、7、5、3 就是对应值的总和.

【详解】解：原式=|x-5|-x+6，

当 x=1 时，原式=9，

当 x=2 时，原式=7，

当 x=3 时，原式=5，

当 x=4 时，原式=3，

当 x=5 时，原式=1

当 x=6 时，原式=1

.......，

x=5 以后每个代数式都　1，

∴有 2018 个 1，

∴2018+9+7+5+3=2042，

∴所求对应 y 值的总和为：2042.

【点睛】本题主要考查了二次根式的性质与化简、规律型数字的变化类，熟练掌握二次根式的性质与化简及发现数字变化规律是解题关键.

25. 小明在解方程$\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2$ 时采用了下面的方法：

$\left(\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}\right)\left(\sqrt{24-x}+\sqrt{8-x}\right)=\sqrt{\left(24-x\right)^{2}}-\left(\sqrt{8-x}\right)^{2}$

$=\left(24-x\right)-\left(8-x\right)=16$

$\because\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2$，

$\therefore\sqrt{24-x}+\sqrt{8-x}=8$.

将这两式相加可得$\begin{cases}\sqrt{24-x}=5\\\sqrt{8-x}=3\end{cases}$ 解得$x=-1$.

经检验$x=-1$是原方程的解.

请你学习小明的方法，解下列方程：

（1）$\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}=4$；

（2）$\sqrt{9x^{2}+8x-3}-\sqrt{9x^{2}-4x-3}=2$

【答案】（1）$x=\frac{1}{4}$

（2）$x=2$

【解析】

【分析】（1）先求出$\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}\right)$=4，即可得出$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}=1$，将这两式相加减即可得出答案，最后检验即可；

（2）先求出$\left(\sqrt{9x^{2}+8x-3}-\sqrt{9x^{2}-4x-3}\right)\left(\sqrt{9x^{2}+8x-3}+\sqrt{9x^{2}-4x-3}\right)=12x$，即可得出$\sqrt{9x^{2}+8x-3}+\sqrt{9x^{2}-4x-3}=6x$，将这两式相加减即可得出答案，最后检验即可.

【小问 1 详解】

解：$\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}\right)$

$=\sqrt{\left(x+6\right)^{2}}-\sqrt{\left(x+2\right)^{2}}$

$=\left(x+6\right)-\left(x+2\right)$

$=x+6-x-2$

$=4$

$\because\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}=4$

$\therefore\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}=1$

将这两式相加减可得$\begin{cases}\sqrt{x+6}=\dfrac{5}{2}\\ \sqrt{x+2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

解得：$x=\dfrac{1}{4}$

经检验$x=\dfrac{1}{4}$是原方程的解.

【小问2详解】

$\left(\sqrt{9x^2+8x-3}-\sqrt{9x^2-4x-3}\right)\left(\sqrt{9x^2+8x-3}+\sqrt{9x^2-4x-3}\right)$

$=\sqrt{\left(9x^2+8x-3\right)^2}-\sqrt{\left(9x^2-4x-3\right)^2}$

$=\left(9x^2+8x-3\right)-\left(9x^2-4x-3\right)$

$=9x^2+8x-3-9x^2+4x+3$

$=12x$

$\therefore\sqrt{9x^2+8x-3}+\sqrt{9x^2-4x-3}=6x$

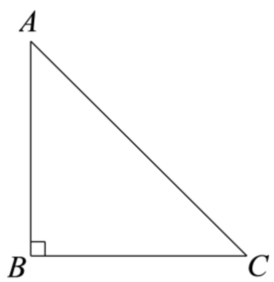
将这两式相加减可得$\begin{cases}\sqrt{9x^2+8x-3}=1+3x\\ \sqrt{9x^2-4x-3}=3x-1\end{cases}$

解得：$x=2$

经检验$x=2$是原方程的解.

【点睛】本题考查了解无理方程，能选择适当的方法解方程是解此题的关键，注意：解无理方程要检验.

26. 如图，在△ABC中，AB＝BC，∠ABC＝90°，D是线段AC上一点（AD＞CD），连接BD，过点A作BD的垂线，交BD于点E，交BC于点F.



（1）依题意补全图形；

（2）若∠CAE＝α，求∠CBD的大小（用含α的式子表示）；

（3）若点P在线段AF上，AP＝BD，连接DP，BP， 用等式表示线段AB，BP，DP之间的数量关系，并证明你的结论.

【答案】（1）见解析　（2）$45°-\alpha$

(3) $AB=\sqrt{2}BP+\frac{1}{2}PD$，证明见解析

【解析】

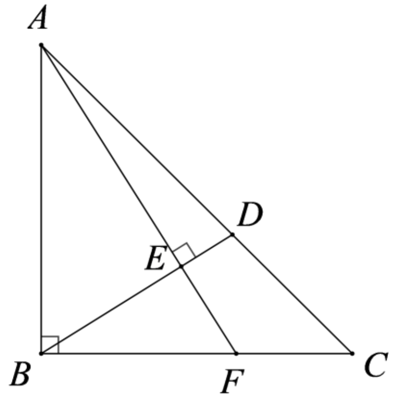
【分析】（1）根据题意画出图形解答即可；

（2）根据等腰三角形的性质可得$\angle BAC=\angle BCA=45°$，三角形的外角性质可得$\angle AFB=45°+\alpha$，直角三角形的两个锐角互余即可求解；

（3）延长DP交AB于点Q，延长BP，交AC于点G，证明$\triangle ABP\cong\triangle BCD$，$GD=GP$可得$\triangle GDP$是等腰直角三角形，根据勾股定理可得$GD=\frac{\sqrt{2}}{2}PD$，根据$AB=\sqrt{2}BG$可得出结论.

【小问1详解】

补全图形，如图所示：



【小问2详解】

$\because AB=BC$，$\angle ABC=90°$，

$\therefore \angle BAC=\angle BCA=45°$，

$\because \angle CAE=\alpha$，

$\therefore \angle AFB=45°+\alpha$

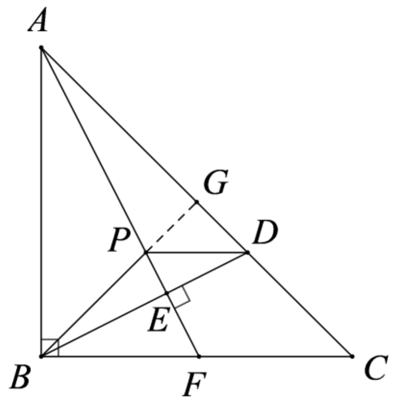
$\because AF\perp BE$

$\therefore \angle CBD=90°-\angle AFB=45°-\alpha$

【小问3详解】

$AB=\sqrt{2}BP+\frac{1}{2}PD$

如图，延长DP交AB于点Q，延长BP，交AC于点G，



$\because \angle BAC = 45°, \angle CAE = \alpha$

$\therefore \angle BAP = 45° - \alpha = \angle CBD$

又$\because AB = BC$， $AP = BD$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle BCD$

$\therefore BP = CD,$

$\therefore \angle ABP = \angle C = 45°$

$\therefore \angle PBF = 45°$

$\because \angle C = 45°$

$\therefore \angle BGC = 90°$

$\therefore AG = CG = BG$

$\because BP = CD$， $BG = GC$

$\therefore BP + PG = GD + DC$

$\therefore GD = GP$

$\therefore \triangle GDP$ 是等腰直角三角形

$\therefore GD = \dfrac{\sqrt{2}}{2} PD$

$\because BG \perp AC, \angle C = 45°$

$\therefore BC = \sqrt{2} BG$

$\because AB = BC$， $BG = BP + PG = BP + \dfrac{\sqrt{2}}{2} PD$

$\therefore AB = \sqrt{2} BG = \sqrt{2} BP + \dfrac{1}{2} PD$

即 $AB = \sqrt{2} BP + \dfrac{1}{2} PD$

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定，勾股定理，掌握勾股定理是解题的关键．