2023北京一零一中高三（上）统练五

数　　学

一、选择题共10小题．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $P=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$， $Q=\left\{x\in\mathbf{N}\mid \dfrac{x}{x-2}\le 0\right\}$，则 $P\cap Q=$（　）

A. $\{x\mid 0\le x\le 1\}$　　B. $\{x\mid -1\le x\le 0\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1\}$

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2=3$， $a_3+a_4=9$，则 a_1a_6 的值为

A. 14　　B. 18　　C. 21　　D. 27

3. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，已知 $a=3$， $b=\sqrt{6}$， $A=\dfrac{\pi}{3}$，则角 B 等于

（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{3\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$　　D. 以上都不对

4. 将 $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象通过平移变换，得到一个奇函数的图像，则这个变换可以是．

A. 左移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　　B. 右移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　　C. 左移 π 个单位　　D. 右移 π 个单位

5. 在 $\triangle ABC$ 中，“$A>\dfrac{\pi}{6}$”是“$\sin A>\dfrac{1}{2}$”的（　）

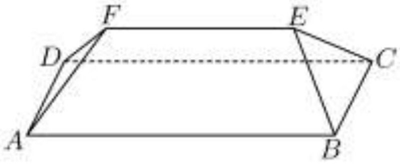
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 在下列函数中，最小值是 2 的是

A. $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$　　B. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}(x>0)$

C. $y=\sin x+\dfrac{1}{\sin x},x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　D. $y=7^x+7^{-x}$

7. 坡屋顶是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素．安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之美．如图，某坡屋顶可视为一个五面体，其中两个面是全等的等腰梯形，两个面是全等的等腰三角形．若 $AB=25\text{m},BC=AD=10\text{m}$，且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\dfrac{\sqrt{14}}{5}$，则该五面体的所有棱长之和为（　）



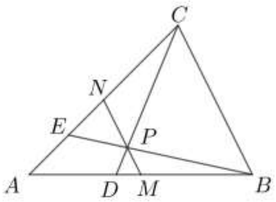
A. 102m　　B. 112m

C. 117m　　D. 125m

8. 若曲线 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$ 存在与直线 $y=kx$ 垂直的切线，则 k 的取值范围是（　）

A. $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$　B. $\left[-\dfrac{1}{2e^3},0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$　C. $\left[-\sqrt{e^3},0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$　D. $\left(-\infty,0\right)\cup\left[2e^3,+\infty\right)$

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，M，N 分别为 AB，AC 边上的中点，P 是线段 MN 上的一个动点（不含端点），CP 与 AB 交于点 D，BP 与 AC 交于点 E，$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 的最小值为（　）



A. 2　B. 4　C. 6　D. 8

10. 已知等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n，下列结论正确的是（　）

A. 若 $q>0$，则 $\left\{a_n\right\}$ 是递增数列或递减数列

B.若 $a_1>0$，$a_1\geqslant S_{2023}$，则 $q\in\left(-1,0\right)$

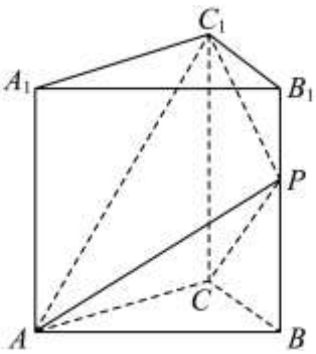
C. 若 $q^2<1$，则 $\exists M\in\mathbf{R}$，使得 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\left|S_n\right|\le M$

D.若 $a_2\sqrt{a_1-a_3}\leqslant 0$，则 S_n 有最大值

二、填空题共 5 小题.

11. 设 $a\in R$．若复数 $z=\mathrm{i}(1+a\mathrm{i})$ 为纯虚数，则 $a=$________，$z^2=$________.

12. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，P 是棱 BB_1 上一点，$AB=AA_1=2$，则三棱锥 $P-ACC_1$ 的体积为__________.



13. 已知角α的终边与单位圆$x^2+y^2=1$的交点为$P\left(x,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则$\sin 2\alpha=$ ______.

14. 已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，若$\vec{a}+t\vec{b}$与$t\vec{a}+\vec{b}$的夹角为锐角，则实数t的取值范围是 ____________.

15. 在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，O为正方形$A'B'C'D'$的中心.动点P沿着线段CO从点C向点O移动，有下列四个结论：

①存在点P，使得$PA'=PB$

②三棱锥$A'-BDP$的体积保持不变；

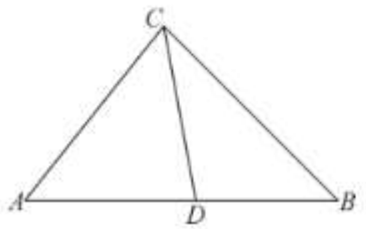
③$\triangle PA'B$的面积越来越小；

④线段$A'B$上存在点Q，使得$PQ\perp A'B$，且$PQ\perp OC$.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题共 6 小题．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

16. 如图，在$\triangle ABC$中，D为AB边上一点，且$DA=DC$，已知$B=\dfrac{\pi}{4}$，$BC=1$.



（1）若$\triangle ABC$是锐角三角形，$DC=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，求角 A 的大小；

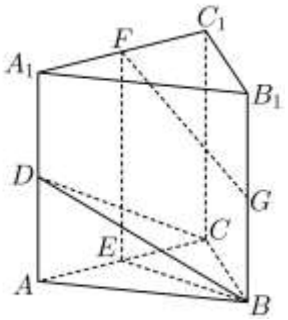
（2）若$\triangle BCD$的面积为$\dfrac{1}{6}$，求AB的长.

17. 已知函数$f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\left[\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1\right]$.

（1）求函数$f(x)$的最大值.

（2）若方程$f(x)=-2$在$[0,m]$上恰有 2 个解，求m的取值范围.

18. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$平面ABC，D，E，F，G分别为AA_1，AC，A_1C_1，BB_1的中点，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=AA_1=2$.



（1）求证：$AC\perp$平面 BEF；

（2）求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值；

（3）证明：直线 FG 与平面 BCD 相交．

19. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1\left(a>0\right)$的焦点在 x 轴上，且经过点 $E(2,\sqrt{2})$，左顶点为 D，右焦点为 F.

（1）求椭圆 C 的离心率和 $\triangle DEF$ 的面积；

（2）已知直线 $y=kx+1$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点．过点 B 作直线 $y=4$ 的垂线，垂足为 G．判断直线 AG 是否与 y 轴交于定点？请说明理由．

20. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{ax}(x-1)^2$.

（1）若 $a=1$，求 $f\left(x\right)$在$\left(0,f\left(0\right)\right)$处切线方程；

（2）求 $f\left(x\right)$的极大值与极小值；

（3）证明：存在实数 M，当 $a>0$ 时，函数 $y=f\left(x\right)-M$ 有三个零点.

21. 对于一个 n 行 n 列的数表 $A_{n\times n}(n\geqslant 2)$，用 $a_{i,j}$ 表示数表中第 i 行第 j 列的数，其中 $a_{i,j}\in\mathbf{Z}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，且数表 $A_{n\times n}$ 满足以下两个条件：

①$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1,j}=n$；

②$a_{i+1,j+1}=a_{i,j}$，规定 $a_{i+1,n+1}=a_{i+1,1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1,j=1,2,\cdots,n)$．

（1）已知数表 $A_{3\times 3}$ 中，$a_{1,1}=3$，$a_{1,2}=-1$．写出 $a_{1,3}$，$a_{2,2}$，$a_{3,1}$ 的值；

（2）若 $a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-k=\max\left\{a_{1,1}-1,a_{1,1}+a_{1,2}-2,\cdots,a_{1,1}+\cdots+a_{1,n}-n\right\}(k\in\{1,2,\cdots,n\})$，其中 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数．规定 $a_{1,n+1}=a_{1,1}$．证明：$a_{1,k+1}-1\leqslant 0$；

（3）证明：存在 $m\in\{1,2,\cdots,n\}$，对于任意 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $a_{m,1}+a_{m,2}+\cdots+a_{m,l}\leqslant l$．

参考答案

一、选择题共 10 小题．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】D

【分析】化简集合Q，再根据交集的定义计算．

【详解】由$Q=\left\{x\in\mathbf{N}\mid\frac{x}{x-2}\le 0\right\}$，则$Q=\{0,1\}$，则$P\cap Q=\{0,1\}$．

故选：D

2.【答案】A

【详解】$\because$等差数列$\{\mathrm{a_n}\}$中，$\mathrm{a_2}=3$，$\mathrm{a_3}+\mathrm{a_4}=9$，$\therefore a_2+d+a_2+2d=9\Rightarrow d=1$

$\therefore a_1=a_2-d=2$

$a_6=a_2+4d=7,\therefore a_1a_6=14$，故选 A.

3.【答案】A

【分析】根据正弦定理，求出$\sin B$的值，然后根据大边对大角，即可得到结果.

【详解】由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得，

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{3}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$b<a$，

所以$B<A$，故B为锐角，所以$B=\frac{\pi}{4}$，

故选：A.

4.【答案】C

【详解】分析：将函数的对称中心平移至原点即可得函数为奇函数.

详解：由$y=2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$，令$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\mathrm{k}\pi,\mathrm{k}\in\mathrm{Z}$.

解得$x=\pi+3\mathrm{k}\pi,\mathrm{k}\in\mathrm{Z}$.

即对称中心为$\left(\pi+3\mathrm{k}\pi,0\right),?\mathrm{k}\in\mathrm{Z}$.

只需将$y=2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$左移$\pi$个单位可得一个奇函数的图像，

故选 C.

点睛：本题主要考查了三角函数的中心对称性和函数的左右平移，属于中档题，难度不大.

5.【答案】B

【分析】结合正弦函数的性质由$\sin A>\frac{1}{2}$，可得$\frac{\pi}{6}<A<\frac{5\pi}{6}$，再根据充分条件和必要条件的定义判断即可.

【详解】在$\triangle ABC$中，$A\in(0,\pi)$，

由$\sin A>\frac{1}{2}$，可得$\frac{\pi}{6}<A<\frac{5\pi}{6}$，

所以“$A>\frac{\pi}{6}$”是“$\sin A>\frac{1}{2}$”的必要不充分条件.

故选：B.

6.【答案】D

【详解】A. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$, 当$x<0$时$y\le -2$，不满足；

B. $y=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\ge 1$，当且仅当$x=0$时成立，因为x>0，故等号不成立，不满足；

C. y=sin x+$\frac{1}{\sin x}$，0<x<$\frac{\pi}{2}$，所以$\sin x\in(0,1)$, y=sin x+$\frac{1}{\sin x}>2$，不满足；

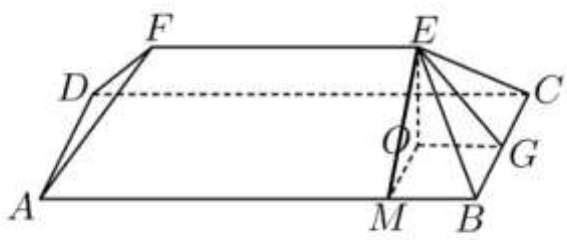
D. $y=7^x+7^{-x}\ge 2\sqrt{7^x\times 7^{-x}}=2$，当且仅当$=0$时成立，满足，

故选 D.

7.【答案】C

【分析】先根据线面角的定义求得$\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\frac{\sqrt{14}}{5}$，从而依次求$EO$，$EG$，$EB$，$EF$，再把所有棱长相加即可得解.

【详解】如图，过E做$EO\perp$平面$ABCD$，垂足为O，过E分别做$EG\perp BC$，$EM\perp AB$，垂足分别为G，M，连接OG,OM，



由题意得等腰梯形所在的面、等腰三角形所在的面与底面夹角分别为$\angle EMO$和$\angle EGO$，

所以$\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\frac{\sqrt{14}}{5}$.

因为$EO\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，所以$EO\perp BC$，

因为$EG\perp BC$，$EO,EG\subset$平面EOG，$EO\cap EG=E$，

所以$BC\perp$平面EOG，因为$OG\subset$平面EOG，所以$BC\perp OG$，.

同理：$OM\perp BM$，又$BM\perp BG$，故四边形$OMBG$是矩形，

所以由 $BC=10$ 得 $OM=5$，所以 $EO=\sqrt{14}$，所以 $OG=5$，

所以在直角三角形 EOG 中，$EG=\sqrt{EO^2+OG^2}=\sqrt{\left(\sqrt{14}\right)^2+5^2}=\sqrt{39}$

在直角三角形 EBG 中，$BG=OM=5$，$EB=\sqrt{EG^2+BG^2}=\sqrt{\left(\sqrt{39}\right)^2+5^2}=8$，

又因为 $EF=AB-5-5=25-5-5=15$，

所有棱长之和为 $2\times25+2\times10+15+4\times8=117\,\text{m}$．

故选：C

8.【答案】D

【分析】对 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$ 求导后根据题意可得 $\dfrac{1-\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{k}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解. 令 $g(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，求导判断单调性求得值域，从而可得不等式 $-\dfrac{1}{k}\geq-\dfrac{1}{2\mathrm{e}^3}$，求解即可.

【详解】对 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$ 求导得 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，

当 $k=0$ 时，曲线 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 不存在与直线 $y=kx$ 垂直的切线，

当 $k\neq0$ 时，若曲线 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 存在与直线 $y=kx$ 垂直的切线，

只需 $\dfrac{1-\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{k}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

令 $g(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，求导得 $g'(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$，

所以当 $0<x<\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ 上单调递增，

则 $g(x)\geq g\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}^3}$，且当 $x\to0$ 时，$g(x)\to+\infty$，

所以 $-\dfrac{1}{k}\geq-\dfrac{1}{2\mathrm{e}^3}$，解得 $k\in(-\infty,0)\cup\left[2\mathrm{e}^3,+\infty\right)$，

所以 k 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup\left[2\mathrm{e}^3,+\infty\right)$.

故选：D.

9.【答案】C

【分析】设 $MP=tMN$，则 $t\in(0,1)$，利用三角形相似得到 $\lambda=\dfrac{1-t}{2-t}$，$\mu=\dfrac{t}{1+t}$，表达出

$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2+\frac{1}{t(1-t)}$，利用基本不等式求出最值即可.

【详解】设 $MP=tMN$，则 $t\in(0,1)$，

因为 M，N 分别为 AB，AC 边上的中点，所以 $MN=\frac{1}{2}BC$，$AM=MB, AN=NC$，

故 $MP=\frac{1}{2}tBC$，

因为 $\triangle DMP\backsim\triangle DBC$，所以 $DM=\frac{1}{2}tBD$，

设 $BD=x$，则 $DM=\frac{1}{2}tx, MB=x-\frac{1}{2}tx$，$AD=AM-DM=x-tx$，

故 $\frac{AD}{AB}=\frac{x-tx}{2x-tx}=\frac{1-t}{2-t}$，故 $\lambda=\frac{1-t}{2-t}$，

同理可得 $NP=(1-t)MN$，$NP=\frac{1}{2}(1-t)BC$，

因为 $\triangle ENP\backsim\triangle ECB$，所以 $EN=\frac{1}{2}(1-t)EC$，

设 $EC=y$，则 $EN=\frac{1}{2}(1-t)y, CN=y-\frac{1}{2}(1-t)y=\frac{1}{2}(1+t)y$，

$AC=(1+t)y$，$AE=(1+t)y-y=ty$，

故 $\frac{AE}{AC}=\frac{t}{1+t}$，$\mu=\frac{t}{1+t}$，

则 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{2-t}{1-t}+\frac{1+t}{t}=1+\frac{1}{1-t}+1+\frac{1}{t}=2+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{t}=2+\frac{1}{t(1-t)}$

因为 $t\in(0,1)$，由基本不等式得 $t(1-t)\le\left(\frac{t+1-t}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

当且仅当 $t=1-t$，即 $t=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，

故 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2+\frac{1}{t(1-t)}\ge 2+4=6$.

故选：C

10. 【答案】C

【分析】选项 ABD，举特例数列验证可知错误；选项 C，由前 n 项和公式，利用不等式性质放缩找到实数 M，证明即可.

【详解】选项 A，当 $q=1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为常数列，

$\{a_n\}$既不是递增数列，也不是递减数列，故 A 项错误；

选项 B，当$a_1=1,q=-1$时，$S_{2023}=S_{2022}+1=1=a_1$，

满足条件$a_1>0$，$a_1\geqslant S_{2023}$，但$q\notin(-1,0)$，故 B 项错误；

选项 C，若$q^2<1$，则$-1<q<1$且$q\neq 0$，$-1<q^n<1$，

故$0<1-q^n<2$，$\dfrac{|a_1|}{1-q}>0$，

则$|S_n|=\left|\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}\right|=\dfrac{|a_1|}{1-q}\left(1-q^n\right)\leq\dfrac{2|a_1|}{1-q}$，

故存在实数M，$M=\dfrac{2|a_1|}{1-q}$，使得$\forall n\in\mathbf{N}_+$，$|S_n|\leq M$.

选项 D，当$q=1$时，$a_1=a_2=a_3$，$a_2\sqrt{a_1-a_3}=0$，

满足条件$a_2\sqrt{a_1-a_3}\leqslant 0$，设$a_n=2$，

则$S_n=2n$无最大值，故 D 项错误.

故选：C.

二、填空题共 5 小题.

11.【答案】 ①. 0 ②. -1

【分析】

【详解】解：$z=i(1+ai)=ai^2+i=-a+i$，

因为复数$z=\mathrm{i}(1+a\mathrm{i})$为纯虚数，所以$-a=0$，即$a=0$，

所以$z=i$，所以$z^2=i^2=-1$

故答案为：0；-1

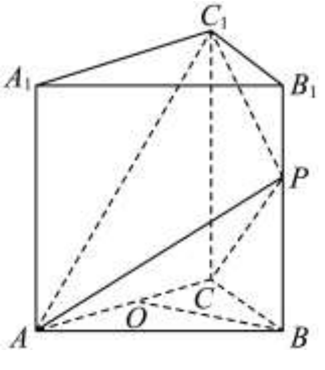
【点睛】一个复数的实部与虚部：

只需将已知的复数化为代数形式$z=a+bi(a,b\in R)$，则该复数的实部为a，虚部为b .

12.【答案】$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【分析】利用线面垂直的判定定理确定三棱锥的高，再用锥体体积公式求解即可.

【详解】



取 AC 中点为 O ,连接 OB ，

因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，所以 $OB\perp AC$ ，

又因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC ， $OB\subset$ 平面 ABC ，

所以 $AA_1\perp OB$,

且 $AA_1\cap AC=A, AA_1, AC\subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $OB\perp$ 平面 ACC_1A_1 ，

$OB=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$,即 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $OB=\sqrt{3}$ ，

又因为 $BB_1//AA_1, BB_1\not\subset$ 平面 $ACC_1A_1, AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $BB_1//$ 平面 ACC_1A_1 ，

又因为 P 是棱 BB_1 上一点，所以 P 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $OB=\sqrt{3}$,

所以 $V_{P-ACC_1}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ACC_1}\times OB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

13. 【答案】 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】由三角函数的定义，求得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，进而得到 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$ ，再利用正弦的倍角公式，即可求解，得到答案.

【详解】由三角函数的定义，可得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

又由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ，解得 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$,

由正弦的二倍角公式得： $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

故答案为 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了三角函数的定义，以及倍角公式的化简求值问题，其中解答中熟记三角函数的定义，合理利用正弦的倍角公式，准确运算是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

14. 【答案】 $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

【分析】利用数量积的定义，再根据条件得到 $-t^2+3t-1>0$ ，从而得到 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ，再去掉

$\vec{a}+t\vec{b}$ 与 $t\vec{a}+\vec{b}$ 共线同向时，t 的取值，即可求出结果.

【详解】因为 $\vec{a}+t\vec{b}$ 与 $t\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为锐角，又 $\cos\vec{a}+t\vec{b},t\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(t\vec{a}+\vec{b})}{\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\cdot\left|t\vec{a}+\vec{b}\right|}$，

所以 $(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(t\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}^2+(1+t^2)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}^2>0$，

又 $\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，所以 $t-(1+t^2)+2t=-t^2+3t-1>0$，

解得 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，又因 $\vec{a}+t\vec{b},t\vec{a}+\vec{b}\in[0,\pi]$，

当 $\vec{a}+t\vec{b},t\vec{a}+\vec{b}=0$ 时，也满足 $(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(t\vec{a}+\vec{b})>0$，此时不合题意，

当 $\vec{a}+t\vec{b}$ 与 $t\vec{a}+\vec{b}$ 共线同向时，有 $\vec{a}+t\vec{b}=\mu(t\vec{a}+\vec{b})$，从而得到 $\begin{cases}1=\mu t\\ \mu=t\end{cases}$，解得 $t=\pm1$，

又 $-1<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，所以实数 t 的取值范围是 $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},1\right)\cup\left(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$，

故答案为：$\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},1\right)\cup\left(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

15.【答案】①②③

【分析】对于①③④，以 A 为原点建立空间直角坐标系，表示出 P 点坐标，逐项分析即可；

对于②，说明 CO 平行于平面 $A'BD$ 即可.

【详解】如图，建立以 A 为原点的空间直角坐标系，设正方体棱长为 2，

则 $A\left(0,0,0\right)$，$B\left(2,0,0\right)$，$A'\left(0,0,2\right)$，$C\left(2,2,0\right)$，$O\left(1,1,2\right)$.

$\overrightarrow{AC}=\left(2,2,0\right),\overrightarrow{CO}=\left(-1,-1,2\right)$

设 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CO}=\left(-\lambda,-\lambda,2\lambda\right)$，其中 $\lambda\in[0,1]$.

则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\left(2-\lambda,2-\lambda,2\lambda\right)$，

即 $P\left(2-\lambda,2-\lambda,2\lambda\right)$.

对于①，假设存在点 P，因 $PA'=PB$，

则 $\sqrt{2\left(2-\lambda\right)^2+4\left(\lambda-1\right)^2}=\sqrt{\lambda^2+\left(2-\lambda\right)^2+4\lambda^2}$

$\Rightarrow 6\lambda^2-16\lambda+12=6\lambda^2-4\lambda+4\Rightarrow\lambda=\dfrac{2}{3}$，

即当 $\overrightarrow{CP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CO}$ 时，$PA'=PB$，故①正确；

对于②，取 BD 中点为 E，连接 $A'O$，$A'E$，EC .因 O 为正方形 $A'B'C'D'$ 的中心，

则 $A'O \parallel EC$，且 $A'O = EC$，故四边形 $A'ECO$ 为平行四边形，得 $A'E \parallel CO$.

又 $CO \not\subset$ 平面 $A'BD$，$A'E \subset$ 平面 $A'BD$，则 CO 平行于平面 $A'BD$，

即点 P 到平面 $A'BD$ 的距离 d 为定值.又 $V_{A'-BDP} = V_{P-A'DB} = \frac{1}{3} S_{\triangle A'DB} \cdot d$

三棱锥 $A' - BDP$ 的体积保持不变.故②正确.

对于③，设 $\angle A'BP = \theta$，则 $S_{\triangle PA'B} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA'}\right|\left|\overrightarrow{BP}\right|\sin\theta$，注意到：

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\left\langle \overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BP}\right\rangle} = \sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{BP}}{\left|\overrightarrow{BA'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BP}\right|}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left|\overrightarrow{BA'}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{BP}\right|^2-\left(\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{BP}\right)^2}}{\left|\overrightarrow{BA'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BP}\right|}$$

则 $S_{\triangle PA'B} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{BA'}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{BP}\right|^2-\left(\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{BP}\right)^2}$.

又 $\overrightarrow{BA'} = \left(-2, 0, 2\right)$，$\overrightarrow{BP} = \left(-\lambda, 2-\lambda, 2\lambda\right)$，

则 $S_{\triangle PA'B} = \frac{1}{2}\sqrt{8\left(6\lambda^2-4\lambda+4\right)-36\lambda^2} = \sqrt{3\left(\lambda-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{8}{3}}$，

因 $f\left(\lambda\right) = 3\left(\lambda-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{8}{3}$ 在 $\left[0,1\right]$ 上递减，故当动点 P 沿着线段 CO 从点 C 向点 O 移动过程中，

$\triangle PA'B$ 的面积越来越小.故③正确.

对于④，假设存在满足题意的点 Q，设 $\overrightarrow{BQ} = \mu\overrightarrow{BA'} = \left(-2\mu, 0, 2\mu\right)$，其中 $\mu \in \left[0,1\right]$.

则 $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \left(2-2\mu, 0, 2\mu\right)$，

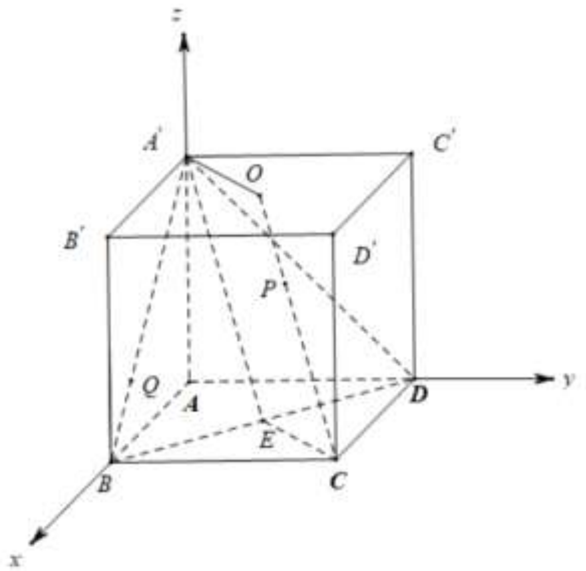
即 $Q\left(2-2\mu, 0, 2\mu\right)$，又 $P\left(2-\lambda, 2-\lambda, 2\lambda\right)$，则 $\overrightarrow{PQ} = \left(\lambda-2\mu, \lambda-2, 2\mu-2\lambda\right)$.

因 $PQ \perp A'B$，且 $PQ \perp OC$，$\overrightarrow{A'B} = \left(2, 0, -2\right)$，$\overrightarrow{OC} = \left(1, 1, -2\right)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{A'B} = 2\lambda-4\mu+4\lambda-4\mu=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OC} = \lambda-2\mu+\lambda-2+4\lambda-4\mu=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{4}{3} \\ \mu=1 \end{cases}$，

因 $\lambda=\frac{4}{3}>1$，与 $\lambda\in\left[0,1\right]$ 矛盾，故不存在相应点 Q.故④错误.

故答案为：①②③



【点睛】关键点点睛：本题为立体几何中的动点问题，难度较大.对于①③④，因直观图形较为复杂，故利用向量共线并引入参数表示出动点坐标.对于几何体体积不变问题，常转化为判断图形中是否存在线线平行或线面平行.

三、解答题共 6 小题．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

16.【答案】（1）$A=\frac{\pi}{3}$，（2）$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$.

【详解】【试题分析】(1)在 ΔBCD 中,利用正弦定理可求得 $\sin\angle BDC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,得到 $\angle BDC=\frac{\pi}{3}$,利用等腰的性质可知 $A=\frac{\pi}{3}$.(2)利用三角形的面积公式可求得 BD ,利用余弦定理可求得 CD ,由此求得 AB 的长.

【试题解析】

（1）在 $\triangle BCD$ 中，$B=\frac{\pi}{4}$，$BC=1$，$DC=\frac{\sqrt{6}}{3}$，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin B}$，

解得 $\sin\angle BDC=\frac{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle BDC=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\angle BDC=\frac{2\pi}{3}$.

又 $DA=DC$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）由题意可得 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BD\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{6}$，解得 $BD=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

由余弦定理得 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{4}=1+\frac{2}{9}-2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{9}$，解得 $CD=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

则 $AB=AD+BD=CD+BD=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$.

所以 AB 的长为 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$.

17.【答案】(1) $\sqrt{2}-1$;

(2) $\left[\frac{13\pi}{12},\frac{25\pi}{12}\right)$.

【分析】(1)利用倍角正余弦公式及辅助角公式化简 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)-1$,由正弦型函数的性质求最大值;

(2)首先求出 $f(x)=-2$ 的解,结合其定义域求出对应的前几个非负解,再由已知确定参数范围即可.

【小问 1 详解】

$f(x)=-\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\left[\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\right]$,正切函数定义域知 $x\neq k\pi+\frac{5\pi}{6}$,即 $2x-\frac{5\pi}{12}\neq 2k\pi+\frac{5\pi}{4}$ ($k\in Z$).

$=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$

$=-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)-1$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)-1$,

当 $2x-\frac{5\pi}{12}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,即 $x=k\pi+\frac{11\pi}{24}$ ($k\in Z$)时 $f(x)$ 取到最大值,$f(x)_{\max}=\sqrt{2}-1$.

【小问 2 详解】

令 $f(x)=-2$,得 $\sin\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $2x-\frac{5\pi}{12}=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$ 或 $2k\pi+\frac{7\pi}{4}$ ($k\in Z$),

解得 $x=k\pi+\frac{5\pi}{6}$ 或 $x=k\pi+\frac{13\pi}{12}$ ($k\in Z$).

注意到函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\in R\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z\right\}$,

故 $f(x)=-2$ 的解为 $x=k\pi+\frac{13\pi}{12}$ ($k\in Z$).

取 $k=-1$,0,1,得到 $f(x)=-2$ 的前三个非负解为 $x_1=\frac{\pi}{12}$,$x_2=\frac{13\pi}{12}$,$x_3=\frac{25\pi}{12}$.

因此,若 $f(x)=-2$ 在 $[0,m]$ 上恰有 2 个解,那么 $[0,m]$ 应当包含 x_1,x_2 而不包含 x_3,

所以 m 的取值范围是 $\left[\frac{13\pi}{12},\frac{25\pi}{12}\right)$.

18.【答案】(1)证明见解析;(2) $-\frac{\sqrt{21}}{21}$;(3)证明见解析.

【分析】(1)由等腰三角形性质得 $AC\perp BE$,由线面垂直性质得 $AC\perp CC_1$,由三棱柱性质可得 $EF//CC_1$,因此 $EF\perp AC$,最后根据线面垂直判定定理得结论;

(2)根据条件建立空间直角坐标系,设各点坐标,利用方程组解得平面 BCD 一个法向量,根据向量数量积求得两法向量夹角,再根据二面角与法向量夹角相等或互补关系求结果;

(3)根据平面 BCD 一个法向量与直线 FG 方向向量数量积不为零,可得结论.

【详解】(1)在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,

∵$CC_1\perp$平面 ABC,∴四边形 A_1ACC_1 为矩形.

又 E,F 分别为 AC,A_1C_1 的中点,∴$AC\perp EF$.

∵$AB=BC$,E 为 AC 的中点,. ∴$AC\perp BE$,而 $BE\cap EF=B$,

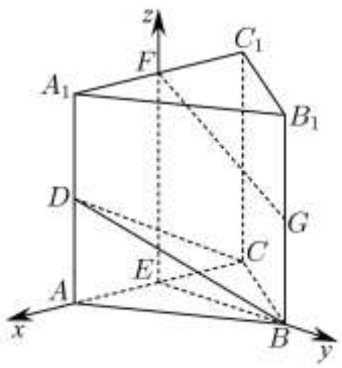
∴$AC\perp$平面 BEF.

(2)**[方法一]:【通性通法】向量法**

由(1)知 $AC\perp EF$,$AC\perp BE$,$EF// CC_1$. 又 $CC_1\perp$平面 ABC,∴$EF\perp$平面 ABC.

∵$BE\subset$平面 ABC,∴$EF\perp BE$.

如图建立空间直角坐称系 $E\text{-}xyz$.



由题意得 B(0,2,0),C(-1,0,0),D(1,0,1),F(0,0,2),G(0,2,1).

$\therefore \overrightarrow{CD}=(2,0,1),\overrightarrow{CB}=(1,2,0)$,

设平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$,

$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$,$\therefore\begin{cases}2a+c=0\\ a+2b=0\end{cases}$,

令 $a=2$,则 $b=-1$,$c=-4$,

∴平面 BCD 的一个法向量 $\vec{n}=(2,-1,-4)$,

又∵平面 CDC_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{EB}=(0,2,0)$，∴ $\cos\langle\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{EB}|}=-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

由图可得二面角 B-CD-C_1 为钝角，所以二面角 B-CD-C_1 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

［方法二］：【最优解】转化＋面积射影法

考虑到二面角 $B-CD-A$ 与二面角 $B-CD-C_1$ 互补，设二面角 $B-CD-C_1$ 为 θ，易知 $DC=\sqrt{5}$，

$DB=\sqrt{6}$，所以 $S_{\triangle DCE}=\dfrac{1}{2},S_{\triangle DCB}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

故 $\cos\theta=-\dfrac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle DCB}}=-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

［方法三］：转化＋三垂线法

二面角 $B-CD-A$ 与二面角 $B-CD-C_1$ 互补，并设二面角 $B-CD-A$ 为 θ，易知 $BE\perp$ 平面 ACD.

如图 3，作 $EH\perp CD$，垂足为 H，联结 BH．则 $\angle BHE$ 是二面角 $B-CD-A$ 的平面角，所以

$\angle BHE=\theta$，不难求出 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$，所以二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

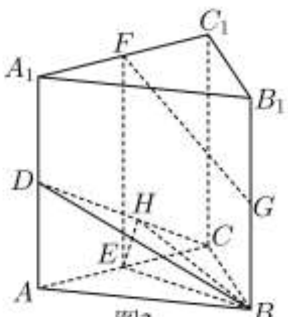


图3

（3）**［方法一］：【最优解】【通性通法】向量法**

平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(2,-1,-4)$，∵ G（0，2，1），F（0，0，2），

∴ $\overrightarrow{GF}=(0,-2,1)$，∴ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{GF}=-2$，∴ $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{GF}$ 不垂直，

∴ GF 与平面 BCD 不平行且不在平面 BCD 内，∴ GF 与平面 BCD 相交.

［方法二］：几何转化

如图 4，取 A_1B_1 的中点 G'，分别在 BB_1,CC_1 取点 N，M，使 $4B_1N=BB_1,4C_1M=CC_1$．联结 $FG',G'N,NM,FM$．则平面 $DCB//$ 平面 $FGNM$，又 $FM\subset$ 平面 $FG'NM$，$FG\not\subset$ 平面 $FG'NM$，故直线 FG 与平面 BCD 相交.

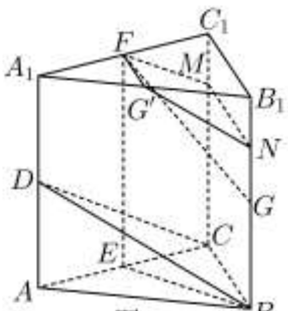


图4

［方法三］：根据相交的平面定义

如图 5，设 CD 与 EF 交于 P，联结 PB .

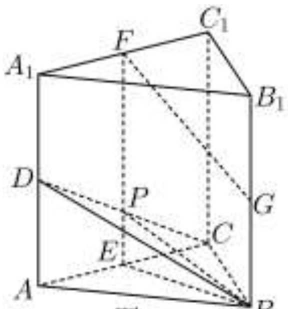


图5

因为 $EF \parallel BB_1$，且 $EF = BB_1$，所以 B,E,F,B_1 四点共面.

因为 $PF = \dfrac{3}{4}EF, BG = \dfrac{1}{2}BB_1$，所以 $PF \neq BG$.

又 $PF \parallel BG$，所以四边形 $PFGB$ 是梯形，即直线 FG 与直线 BP 一定相交.

因为 $BP \subset$ 平面 BCD，所以直线 FG 与平面 BCD 相交.

【整体点评】（2）方法一：直接利用向量法求出，属于通性通法；

方法二：根据二面角 $B-CD-A$ 与二面角 $B-CD-C_1$ 互补，通过转化求二面角 $B-CD-A$，利用面积射影法求出，是该问的最优解；

方法三：根据二面角 $B-CD-A$ 与二面角 $B-CD-C_1$ 互补，通过转化求二面角 $B-CD-A$，利用三垂线法求出；

（3）方法一：利用向量证明平面的法向量与直线的方向向量不垂直即可，既是该问的通性通法，也是最优解；

方法二：通过证明与平面 BCD 平行的平面与直线 FG 相交证出；

方法三：构建过直线 FG 且与平面 BCD 相交的平面，通过证明直线 FG 与交线相交证出.

19.【答案】（1）离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\triangle DEF$ 的面积为 $2+\sqrt{2}$；

（2）见解析.

【分析】（1）根据椭圆经过点 $E(2,\sqrt{2})$ 可求出 $a=2\sqrt{2}$，从而可求离心率，求出 D,F 的坐标，从而可求 $\triangle DEF$ 的面积；

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $G(x_2,4)$,联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，可得 $kx_1x_2=\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)$，$AG$ 的方程为 $y-4=\dfrac{4-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，令 $x=0$，得 $y=\dfrac{kx_1x_2+x_2-4x_1}{x_2-x_1}$，代入 $kx_1x_2=\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)$ 化简即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1(a>0)$ 经过点 $E(2,\sqrt{2})$，所以 $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{4}=1(a>0)$，解得 $a=2\sqrt{2}$.

所以椭圆 C：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$c=\sqrt{8-4}=2$，

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $D(-2\sqrt{2},0),F(2,0),E(2,\sqrt{2})$，

所以 $S_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{2}(2\sqrt{2}+2)\times\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$.

【小问 2 详解】

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $G(x_2,4)$，

则 AG 的方程为 $y-4=\dfrac{4-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，

令 $x=0$，则 $y=\dfrac{-x_2\left[4-(kx_1+1)\right]}{x_2-x_1}+\dfrac{4x_2-4x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{kx_1x_2+x_2-4x_1}{x_2-x_1}$ ①.

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，可得 $(1+2k^2)x^2+4kx-6=0$，

因为 $y=kx+1$ 过定点 $(0,1)$，$(0,1)$ 在椭圆内，所以 $y=kx+1$ 与椭圆恒有两个交点，

故 $\Delta>0$，$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{4k}{1+2k^2}\\ x_1x_2=-\dfrac{6}{1+2k^2}\end{cases}$

所以 $kx_1x_2=-\dfrac{6k}{1+2k^2}=\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)$.

代入①，可得 $y=\dfrac{\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)+x_2-4x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-\dfrac{5}{2}x_1+\dfrac{5}{2}x_2}{x_2-x_1}=\dfrac{5}{2}$，

故直线 AG 是否与 y 轴交于定点 $\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$.

【点睛】定点定值点睛：

(1)从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关.

(2)直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

20.【答案】(1) $x+y-1=0$

(2) 见解析　(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据导数的几何意义求出切线斜率即可得解；

(2) 求出函数导数，分类讨论得函数单调性，根据单调性求函数极值即可；

(3) 根据 (2) 判断函数大致变化趋势，由函数零点个数即函数图象与 x 轴交点个数可证明.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}(x-1)^{2}$，$f'(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}-1)$，

所以 $k=f'(0)=\mathrm{e}^{0}(0^{2}-1)=-1$，

又 $f(0)=\mathrm{e}^{0}(0-1)^{2}=1$，

所以切线方程为 $y-1=-(x-0)$，即 $x+y-1=0$.

【小问 2 详解】

$f'\left(x\right)=a\mathrm{e}^{ax}(x-1)^{2}+2\mathrm{e}^{ax}(x-1)=\mathrm{e}^{ax}(x-1)(ax-a+2)$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=2(x-1)=0$，解得 $x=1$，

故 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

故 $x=1$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(1)=0$，无极大值；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=1-\dfrac{2}{a}$，

故当 $x<1-\dfrac{2}{a}$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $1-\dfrac{2}{a}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

故 $f(x)$ 的极大值为 $f(1-\dfrac{2}{a})=\mathrm{e}^{a-2}\left(\dfrac{2}{a}\right)^{2}=\dfrac{4\mathrm{e}^{a-2}}{a^{2}}$，极小值为 $f(1)=0$；

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=1-\dfrac{2}{a}$，

故当 $x<1$ 或 $x>1-\dfrac{2}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $1<x<1-\dfrac{2}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

故 $f(x)$ 的极大值为 $f(1-\dfrac{2}{a})=\mathrm{e}^{a-2}\left(\dfrac{2}{a}\right)^{2}=\dfrac{4\mathrm{e}^{a-2}}{a^{2}}$，极小值为 $f(1)=0$；

综上，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(1)=0$，无极大值；当 $a\neq 0$ 时，$f(x)$ 的极大值为

$f(1-\frac{2}{a})=\frac{4e^{a-2}}{a^2}$，极小值为 $f(1)=0$.

【小问 3 详解】

当 $a>0$ 时，由（2）知，$f(x)$ 在 $(-\infty,1-\frac{2}{a})$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

在 $(1-\frac{2}{a},1)$ 上单调递减，且 $x<1$ 时，$f\left(x\right)=e^{ax}(x-1)^2>0$ 恒成立，

$x\to+\infty$ 时，$f\left(x\right)=e^{ax}(x-1)^2\to+\infty$，

又 $f(x)$ 的极大值为 $f(1-\frac{2}{a})=\frac{4e^{a-2}}{a^2}$，极小值为 $f(1)=0$，

所以存在实数 $0<M<\frac{4e^{a-2}}{a^2}$ 时，函数 $y=f\left(x\right)-M$ 有三个零点.

21.【答案】（1）$a_{1,3}=1$，$a_{2,2}=3$，$a_{3,1}=-1$

（2）证明见详解　（3）证明见详解

【分析】（1）根据题意解答即可；

（2）令 $b_{1,s}=\sum_{j=1}^{s}a_{1,j}-s(s=1,2,\cdots,n,n+1)$，根据题意找到 $b_{1,k}$ 的不等式即可；

（3）本质是找到数表 $[b_{i,s}]$ 中某一行，满足该行的每一个数都小于等于 0 即可.

【小问 1 详解】

$a_{1,3}=3-a_{1,1}-a_{1,2}=1$，

$a_{2,2}=a_{1,1}=3$，

$a_{3,1}=a_{2,3}=a_{1,2}=-1$；

【小问 2 详解】

令 $b_{1,s}=\sum_{j=1}^{s}a_{1,j}-s(s=1,2,\cdots,n,n+1)$

由题意 $b_{1,k}=\max\{b_{1,1},b_{1,2},\cdots,b_{1,n}\}(k=1,2,\cdots,n)$，

所以一定有 $b_{1,k}\geq b_{1,k+1}$，即 $\sum_{j=1}^{k}a_{i,j}-k\geq\sum_{j=1}^{k+1}a_{i,j}-(k+1)$，

所以 $-k\geq a_{1,k+1}-k-k$，所以 $a_{1,k+1}-1\leqslant 0$；

【小问 3 详解】

由题意，对任意 $i=1,2,\cdots,n$ 均有 $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=n$，且类似于（2），令

$b_{i,s}=\sum_{j=1}^{s}a_{i,j}-s(s=1,2,\cdots,n)$，其中$b_{i,n}=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}-n=n-n=0$，

而$1\le s\le n-1$时，有

$b_{i,s}=\sum_{j=1}^{s}a_{i,j}-s=\sum_{j=2}^{s+1}a_{i+1,j-s}-s=\sum_{j=1}^{s+1}a_{i+1,j}-a_{i+1,1}-s$，

有$b_{i,s}=\sum_{j=1}^{s+1}a_{i+1,j}-(s+1)-a_{i+1,1}+1=b_{i+1,s+1}-b_{i+1,1}$，

所以当$\max\limits_{1\le j\le n}b_{i,j}=b_{i,k}(k=1,2,\cdots,n)$时，可推出$\max\{\max\limits_{2\le j\le n}(b_{i+1,j}-b_{i+1,1}),0\}=b_{i+1,k+1}-b_{i+1,1}$，

所以$\max\{\max\limits_{2\le j\le n}b_{i+1,j},b_{i+1,1}\}=\max b_{i+1,j}=b_{i+1,k+1}$，

假设$\max\limits_{1\le j\le n}b_{1,j}=b_{1,k}(k=1,2,\cdots,n)$，则有

$\max\limits_{1\le j\le n}b_{2,j}=b_{2,k+1}$，即$\max\limits_{1\le j\le n}b_{3,j}=b_{3,k+2}$，

所以$\max\limits_{1\le j\le n}b_{n-k+1,j}=b_{n-k+1,n}$，

由于$n-k+1=n,(n-1),\cdots,1$，符合i的取值，这样的递推存在，

所以$\exists m=n-k+1$，使得任意的$l\in\{1,2,\cdots,n\}$均有

$b_{m,l}\le\max\limits_{1\le j\le n}b_{m,j}=b_{m,n}=0$，

即$\sum_{j=1}^{l}a_{m,j}-l\le 0$，即$a_{m,1}+a_{m,2}+\cdots+a_{m,l}\leqslant l$.

【点睛】关键点点睛：本题关键在于理清题目条件，根据条件求解即可.