北京景山学校2023~2024学年度第一学期期中考试

九年级 数学

2023年11月

本试卷共9页，共100分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分 选择题

一、选择题（本题共16分，每小题2分）第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1.剪纸艺术是最古老的中国民间艺术之一，先后入选中国国家级非物质文化遗产名录和人类非物质文化遗产代表作名录．以下剪纸中，为中心对称图形的是（　　）

A

B

C

D

2.抛物线 $y=(x-1)^2+2$ 的顶点坐标是（　　）

A.（-1，2）　　B.（1，-2）　　C.（1，2）　　D.（-1，-2）

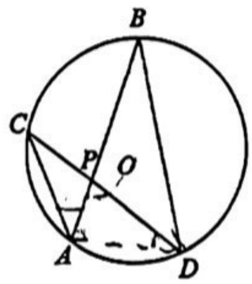
3.将一元二次方程 $x^2-8x+10=0$ 通过配方转化为 $(x+a)^2=b$ 的形式，下列结果中正确的是（　　）

A. $(x-4)^2=6$　　B. $(x-8)^2=6$　　C. $(x-4)^2=-6$　　D. $(x-8)^2=54$

4. 把抛物线 $y=2x^2+4$ 向右平移1个单位长度，再向下平移3个单位长度，得到的抛物线的解析式为（　　）

A. $y=2(x-1)^2+7$　　B. $y=2(x+1)^2+7$

C. $y=2(x-1)^2+1$　　D. $y=2(x+1)^2+1$



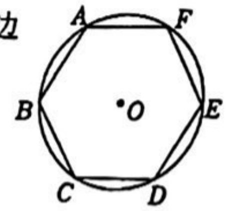
5.如图，在⊙O中，弦AB，CD相交于点P，$\angle CAB=40°$，$\angle ABD=30°$，则$\angle APD$的度数为（　　）

A. 30°　　B. 35°　　C. 40°　　D. 70°

6. 不透明袋子中装有无差别的两个小球，分别写有"问天"和"梦天"．随机取出一个小球后，放回并摇匀，再随机取出一个小球，则两次都取到写有"问天"的小球的概率为（　　）

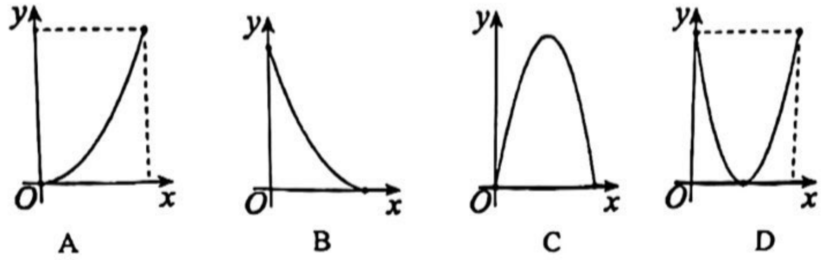
A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

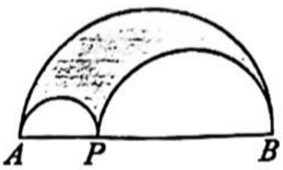
7．如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，若⊙O 的周长是 12π，则正六边形的边长是（　　）



A．$2\sqrt{3}$　　B．3　　C．6　　D．$3\sqrt{3}$

8．如图，动点 P 在线段 AB 上（不与点 A，B 重合），分别以 AB，AP，BP 为直径作半圆，记图中所示的阴影部分面积为 y，线段 AP 的长为 x．当点 P 从点 A 移动到点 B 时，y 随 x 的变化而变化，则表示 y 与 x 之间关系的图象大致是（　　）





第二部分 填空题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9.在平面直角坐标系中，点（5，1）关于原点对称的点的坐标是______．

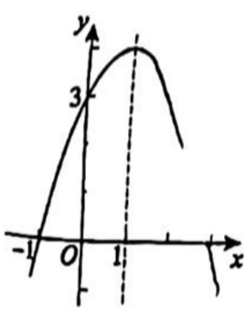
10.关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 有一个根是 $x=1$，则 $m=$______．

11.为响应国家号召打赢脱贫攻坚战，小明利用信息技术开了一家网络商店，将家乡的土特产销往全国．今年 6 月份盈利 12000 元，8 月份盈利 27000 元，求 6 月份到 8 月份盈利的月平均增长率．设 6 月份到 8 月份盈利的月平均增长率为 x，根据题意，可列方程为 ___________．

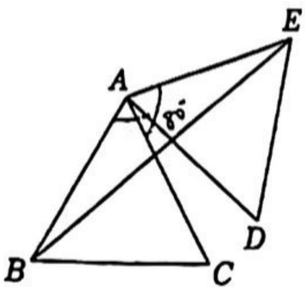
12.抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴及部分图象如图所示，则关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为_____．

13.如图，等边△ABC 绕顶点 A 逆时针旋转 80°得到△ADE，连接 BE，则∠ABE=_________°．

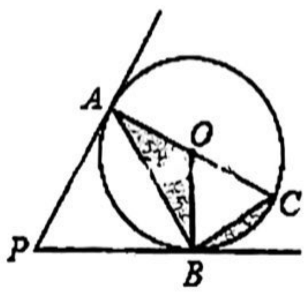
14. 如图，PA、PB 与⊙O 相切，切点分别为 A、B．PA=3，∠P=60°，若 AC 为⊙O 的直径，则圆中阴影部分的面积为________．



（第 12 题）

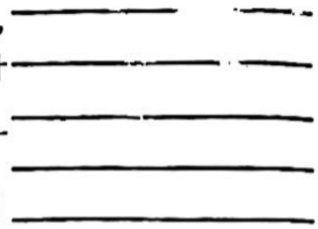


（第 13 题）



（第 14 题）

十八世纪法国的博物学家 C•布丰做过一个有趣的投针试验．如图，一个平面上画一组相距为 d 的平行线，用一根长度为 l（$l<d$）的针意投掷在这个平面上，针与直线相交的概率为 $\frac{2l}{\pi d}$，可以通过这一试验来估计 π 的近似值，某数学兴趣小组利用计算机模拟布丰投针试验，取 $l=\frac{d}{2}$，得到试验数据如下表：

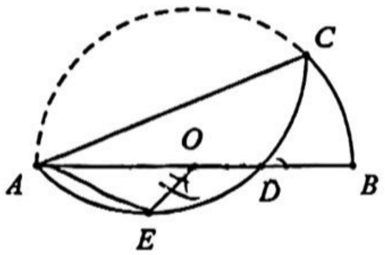


试验次数	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
相交频数	495	623	799	954	1123	1269	1434	1590
相交频率	0.3300	0.3115	0.3196	0.3180	0.3209	0.3173	0.3187	0.3180

可以估计出针与直线相交的概率为 ________（精确到 0.001），

由此估计 π 的近似值为 ________（精确到 0.001）．

16.如图，在半圆 O 中，直径 $AB=4$，C 是半圆上一点，将弧 AC 沿弦 AC 折叠交 AB 于 D，点 E 是弧 AD 的中点．连接 OE，则 OE 的最小值为________



第三部分 解答题

三、解答题（共 68 分，第 17-22 题，每题 5 分，第 23-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17．解方程：$x^2+4x+3=0$．

18．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 的部分图象经过点 $A(0,-3)$，$B(1,0)$．

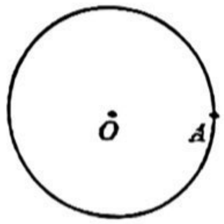
(1)求该抛物线的解析式；

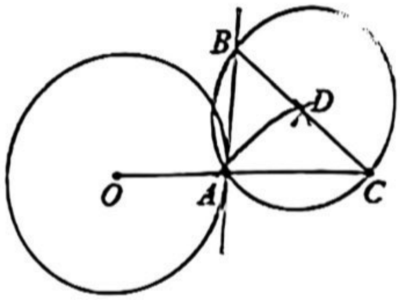
(2)结合函数图象，直接写出 $y<0$ 时 x 的取值范围．

面是小立设计的"过圆上一点作这个圆的切线"的尺规作图过程.

已知：⊙O 及圆上一点 A.

求作：直线 AB，使得 AB 为⊙O 的切线，A 为切点.





作法：如图，

(1)连接 OA 并延长到点 C；

(2)分别以点 A，C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 长为半径作弧，两弧交于点 D（点 D 在直线 OA 上方）；

(3)以点 D 为圆心，DA 长为半径作⊙D；

(4)连接 CD 并延长，交⊙D 于点 B，作直线 AB.

直线 AB 就是所求作的直线.

根据小立设计的尺规作图过程，完成下面的证明.（说明：括号里填推理的依据）

证明：连接 AD.

∵___①___$=AD$，

∴点 C 在⊙D 上，

∴CB 是⊙D 的直径.

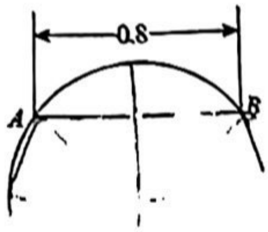
∴___②___$=90°$.（___③___）

∴$AB\perp$___④___.

∵OA 是⊙O 的半径，

∴AB 是⊙O 的切线.（___⑤___）

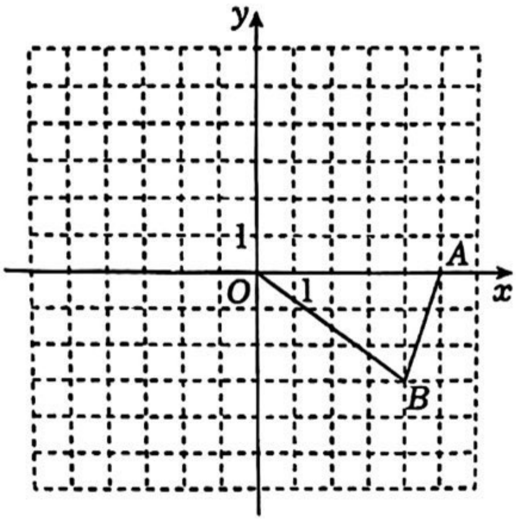
20. 圆管涵是公路路基排水中常用的涵洞结构类型，它不仅力学性能好，而且构造简单、施工方便. 某水平放置的圆管涵圆柱形排水管道的截面是直径为 1 m 的圆，如图所示，若水面宽 $AB=0.8$ m，求水的最大深度.



21．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，$\triangle OAB$ 的顶点坐标分别为 O（0，0），A（5，0），B（4，－3），将$\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转 90°得到$\triangle OA'B'$，点 A 旋转后的对应点为 A'.

（1）画出旋转后的图形$\triangle OA'B'$，并写出点 A'的坐标；

（2）求出点 B 旋转到 B'的路径长.



22．某中学开展"歌唱祖国红歌比赛"活动，七年级一班、二班都从："A.《歌唱祖国》、B.《我和我的祖国》、C.《唱支山歌给党听》、D.《保卫黄河》"四首歌中任意选择一首作为参赛曲目.

（1）七年级一班恰好抽到歌曲 C 的概率为________；

（2）比赛规定：各班歌唱不同歌曲，一班先随机抽取一首歌曲，不放回；二班再从剩余的歌曲中随机抽取一首，求出两个班恰好抽到 B、C 歌曲的概率.

23.已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+2m-1=0$ 有两个不相等的实数根.

（1）求 m 的取值范围；

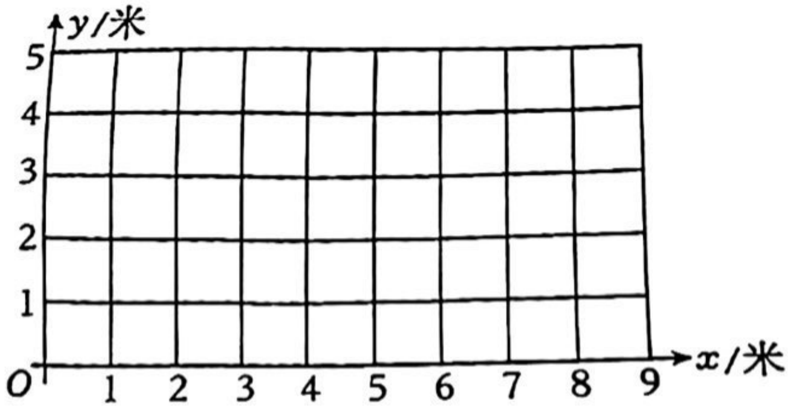
（2）若 m 为正整数，且该方程的根都是整数，求 m 的值.

24．图1是某农户的种植日光温室，其横截面如图2所示．一般由三部分组成（注：1. 前屋面（塑料顶棚），2. 防寒沟，3. 草帘，4. 后屋面，5. 北墙）现在以塑料顶棚横截面与地面的交点为坐标原点 O，地面所在的水平线 OA 所在直线为 x 轴，过点 O 垂直于 OA 的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，记顶棚某点距点 O 的水平距离为 x 米，距离地面的高度为 y 米，测量出如下数据：

x/米	0	1	2	3	4	5	6	7	…
y/米	0	1.1	2	2.7	3.2	3.5	3.6	3.5	…

请根据所给信息解决以下问题：

（1）如图，在网格中建立适当的平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接；



（2）请结合表中所给数据或所画图象，求出塑料顶棚所在曲线的解析式以及顶棚最高点距离地面的高度（不用写出 x 的取值范围）；

（3）设前屋面与后屋面的交点为 B，已知 B 点距离地面 3.3 米，求点 B 距离点 O 的水平距离．

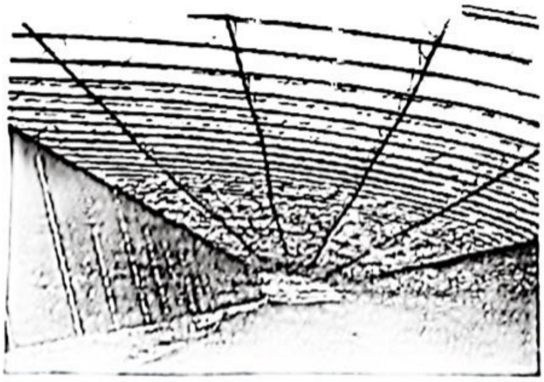
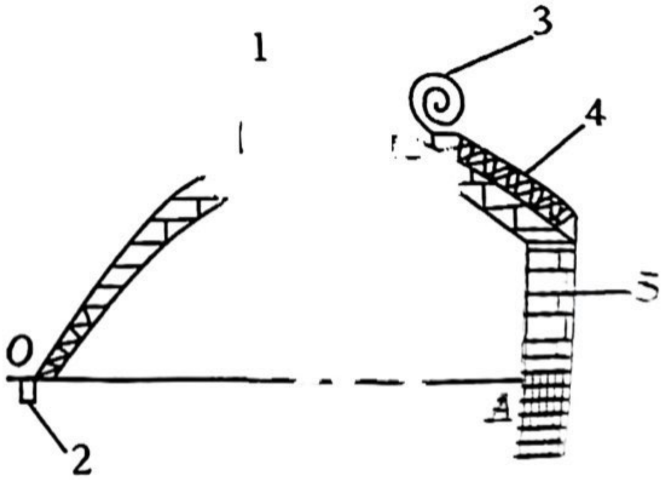


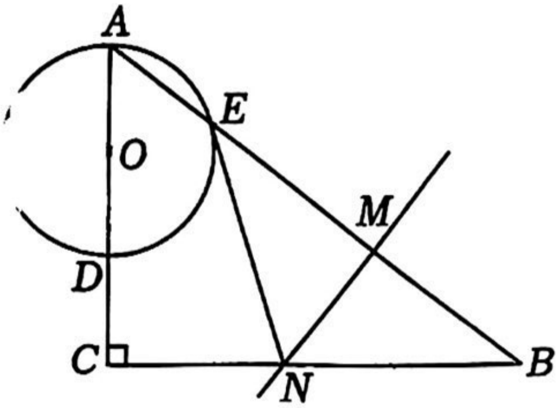
图1



25. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，在 AC 上取一点 D，以 AD 为直径作⊙O，与 AB 相交于点 E，作线段 BE 的垂直平分线 MN 交 BC 于点 N，连接 EN.

（1）求证：EN 是⊙O 的切线；

（2）若 $AC=3$，$BC=4$，⊙O 的半径为 1，求线段 EN 的长.



26.在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2-(a+2)x+2$ 经过点 $A(-2,t)$， $B(m,p)$

（1）若 $t=0$，

①求此抛物线的对称轴；

②当 $p<t$ 时，直接写出 m 的取值范围；

（2）若 $t<0$，点 $C(n,q)$ 在该抛物线上，$m<n$ 且 $3m+3n\leqslant-4$，请比较 p，q 的大小，并说明理由.

27.在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，点D为直线AC上一个动点（点D不与点A，C重合），连接BD，将线段BD绕D点逆时针旋转$90°$得线段DE，连接CE．

（1）如图1，若点D在线段AC上．

①依题意补全图1；

②用等式表示线段CB，CD，CE之间的数量关系，并证明；

（2）若点D在线段CA的延长线上，且$AD<AC$，设$BC=m$，$BD=n$，直接写出CE的长（用含m，n的式子表示）．

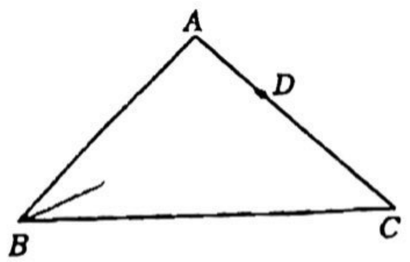
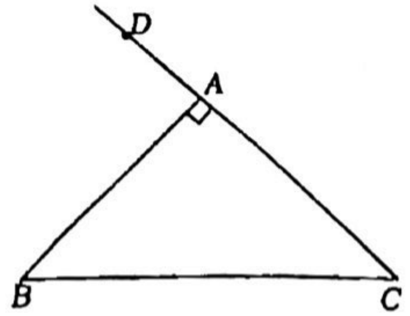


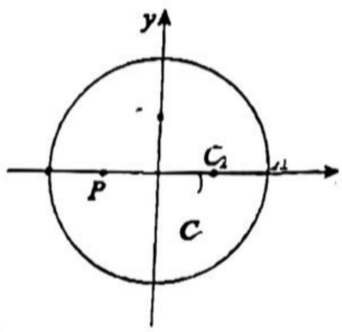
图1



备用图

平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的半径为 1，点 A 在⊙O 上，点 P 在⊙O 内，给出如下义：连接 AP 并延长交⊙O 于点 B，若 $AP=kAB$，则称点 P 是点 A 关于⊙O 的 k 倍特征点.

(1) 如图，点 A 的坐标为（1，0）.



①若点 P 的坐标为（$-\frac{1}{2}$，0），则点 P 是点 A 关于⊙O 的______倍特征点；

②在 C_1（0，$\frac{1}{2}$），C_2（$\frac{1}{2}$，0），C_3（$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$）这三个点中，点_______是点 A 关于⊙O 的 $\frac{1}{2}$ 倍特征点；

③直线 l 经过点 A，与 y 轴交于点 D，$\angle DAO=60°$. 点 E 在直线 l 上，且点 E 是点 A 关于⊙O 的 $\frac{1}{2}$ 倍特征点，求点 E 的坐标；

(2) 若当 k 取某个值时，对于函数 $y=-x+1$（$0<x<1$）的图象上任意一点 M，在⊙O 上都存在点 N，使得点 M 是点 N 关于⊙O 的 k 倍特征点，直接写出 k 的最大值和最小值.