新定义与阅读理解创新型问题

一．选择题（共4小题）

1．（2020•荆州）定义新运算“$a*b$”：对于任意实数 a，b，都有 $a*b=(a+b)(a-b)-1$，其中等式右边是通常的加法、减法、乘法运算，例 $4*3=(4+3)(4-3)-1=7-1=6$．若 $x*k=x$（k 为实数）是关于 x 的方程，则它的根的情况为（　　）

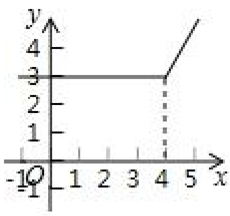
A．有一个实数根　　　　B．有两个相等的实数根

C．有两个不相等的实数根　　　　D．没有实数根

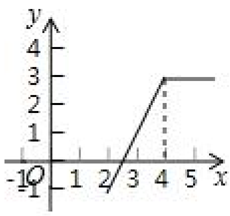
2．（2020•枣庄）对于实数 a、b，定义一种新运算“$\otimes$”为：$a\otimes b=\frac{1}{a-b^2}$，这里等式右边是实数运算．例如：$1\otimes 3=\frac{1}{1-3^2}=-\frac{1}{8}$．则方程 $x\otimes(-2)=\frac{2}{x-4}-1$ 的解是（　　）

A．$x=4$　　　　B．$x=5$　　　　C．$x=6$　　　　D．$x=7$

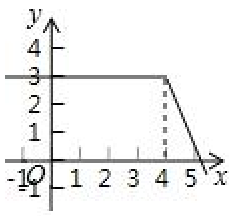
3．（2020•潍坊）若定义一种新运算：$a\otimes b=\begin{cases}a-b(a\geq 2b)\\ a+b-6(a<2b)\end{cases}$，例如：$3\otimes 1=3-1=2$；$5\otimes 4=5+4-6=3$．则函数 $y=(x+2)\otimes(x-1)$ 的图象大致是（　　）



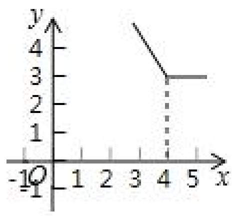
A．



B．

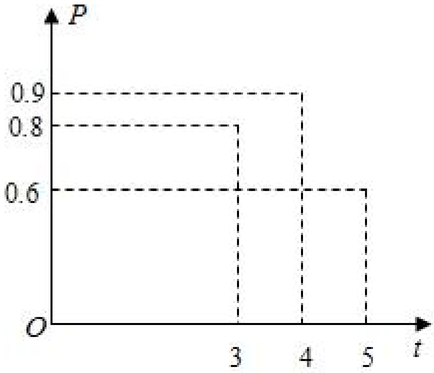


C．



D．

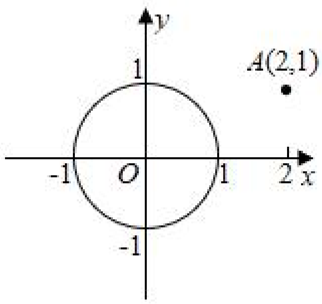
4．（2020•长沙）“闻起来臭，吃起来香”的臭豆腐是长沙特色小吃，臭豆腐虽小，但制作流程却比较复杂，其中在进行加工煎炸臭豆腐时，我们把“焦脆而不糊”的豆腐块数的百分比称为“可食用率”．在特定条件下，“可食用率”P 与加工煎炸时间 t（单位：分钟）近似满足的函数关系为：$p=at^2+bt+c$（$a\neq 0$，a，b，c 是常数），如图记录了三次实验的数据．根据上述函数关系和实验数据，可以得到加工煎炸臭豆腐的最佳时间为（　　）



A．3.50 分钟　　　B．4.05 分钟　　　C．3.75 分钟　　　D．4.25 分钟

二．填空题（共 11 小题）

5．（2020•临沂）我们知道，两点之间线段最短，因此，连接两点间线段的长度叫做两点间的距离；同理，连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短，因此，直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离．类似地，连接曲线外一点与曲线上各点的所有线段中，最短线段的长度，叫做点到曲线的距离．依此定义，如图，在平面直角坐标系中，点 A（2，1）到以原点为圆心，以 1 为半径的圆的距离为_______．



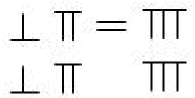
6．（2020•十堰）对于实数 m，n，定义运算 $m*n=(m+2)^2-2n$．若 $2*a=4*(-3)$，则 $a=$_______．

7．（2020•青海）对于任意两个不相等的数 a，b，定义一种新运算“$\oplus$”如下：$a\oplus b=\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$，如：$3\oplus 2=\frac{\sqrt{3+2}}{\sqrt{3-2}}=\sqrt{5}$，那么 $12\oplus 4=$_______．

8．（2020•湘潭）算筹是在珠算发明以前我国独创并且有效的计算工具，为我国古代数学的发展做出了很大的贡献．在算筹计数法中，以“纵式”和“横式”两种方式来表示数字如图：

数字 形式	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

表示多位数时，个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，以此类推，遇零则置空．示例如

图：，则表示的数是_______.

9．（2020•长沙）某数学老师在课外活动中做了一个有趣的游戏：首先发给 A、B、C 三个同学相同数量的扑克牌（假定发到每个同学手中的扑克牌数量足够多），然后依次完成以下三个步骤：

第一步，A 同学拿出二张扑克牌给 B 同学；

第二步，C 同学拿出三张扑克牌给 B 同学；

第三步，A 同学手中此时有多少张扑克牌，B 同学就拿出多少张扑克牌给 A 同学．

请你确定，最终 B 同学手中剩余的扑克牌的张数为_______．

10．（2020•常德）阅读理解：对于 $x^3-(n^2+1)x+n$ 这类特殊的代数式可以按下面的方法分解因式：

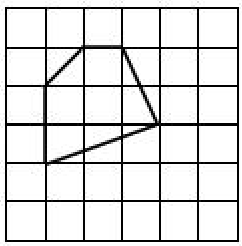
$x^3-(n^2+1)x+n=x^3-n^2x-x+n=x(x^2-n^2)-(x-n)=x(x-n)(x+n)-(x-n)=(x-n)(x^2+nx-1)$．

理解运用：如果 $x^3-(n^2+1)x+n=0$，那么 $(x-n)(x^2+nx-1)=0$，即有 $x-n=0$ 或 $x^2+nx-1=0$，因此，方程 $x-n=0$ 和 $x^2+nx-1=0$ 的所有解就是方程 $x^3-(n^2+1)x+n=0$ 的解．

解决问题：求方程 $x^3-5x+2=0$ 的解为_______．

11．（2020•衢州）定义 $a※b=a(b+1)$，例如 $2※3=2×(3+1)=2×4=8$．则 $(x-1)※x$ 的结果为_______．

12．（2020•枣庄）各顶点都在方格纸的格点（横竖格子线的交错点）上的多边形称为格点多边形，它的面积 S 可用公式 $S=a+\frac{1}{2}b-1$（a 是多边形内的格点数，b 是多边形边界上的格点数）计算，这个公式称为“皮克（*Pick*）定理”．如图给出了一个格点五边形，则该五边形的面积 $S=$_______．



13．（2020•荆州）我们约定：(a,b,c) 为函数 $y=ax^2+bx+c$ 的“关联数”，当其图象与坐标轴交点的横、纵坐标均为整数时，该交点为“整交点”．若关联数为 $(m,-m-2,2)$ 的函数图象与 x 轴有两个整交点（m 为正整数），则这个函数图象上整交点的坐标为_______．

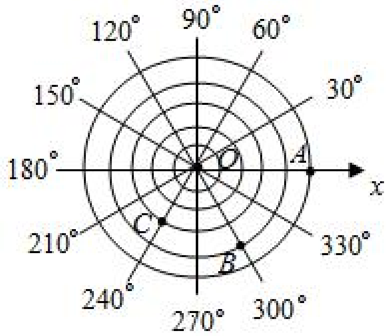
14．（2020•乐山）我们用符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数．例如：$[1.5]=1$，$[-1.5]=-2$．那么：

（1）当 $-1<[x]\leqslant 2$ 时，x 的取值范围是_______；

（2）当 $-1\leqslant x<2$ 时，函数 $y=x^2-2a[x]+3$ 的图象始终在函数 $y=[x]+3$ 的图象下方．则实数 a 的范围是_______．

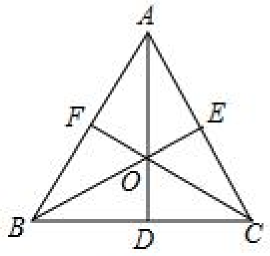
15．（2020•泰州）以水平数轴的原点 O 为圆心，过正半轴 Ox 上的每一刻度点画同心圆，将 Ox 逆时针依次

旋转 30°、60°、90°、…、330°得到 11 条射线，构成如图所示的“圆”坐标系，点 A、B 的坐标分别表示为（5，0°）、（4，300°），则点 C 的坐标表示为_______.

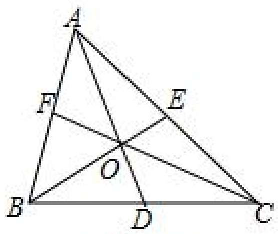


三．解答题（共 35 小题）

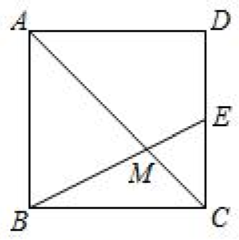
16．（2020•湘潭）阅读材料：三角形的三条中线必交于一点，这个交点称为三角形的重心．



(图一)



(图二)



(图三)

（1）特例感知：如图（一），已知边长为 2 的等边△ABC 的重心为点 O，求△OBC 与△ABC 的面积．

（2）性质探究：如图（二），已知△ABC 的重心为点 O，请判断$\frac{OD}{OA}$、$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}$是否都为定值？如果是，分别求出这两个定值；如果不是，请说明理由．

（3）性质应用：如图（三），在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，连接 BE 交对角线 AC 于点 M．

①若正方形 $ABCD$ 的边长为 4，求 EM 的长度；

②若 $S_{\triangle CME}=1$，求正方形 $ABCD$ 的面积．

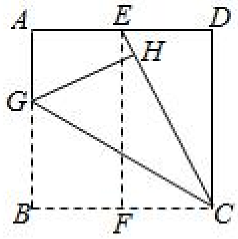
17．（2020•徐州）我们知道：如图①，点 B 把线段 AC 分成两部分，如果$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}$，那么称点 B 为线段 AC 的黄金分割点．它们的比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

（1）在图①中，若 $AC=20cm$，则 AB 的长为_______cm；

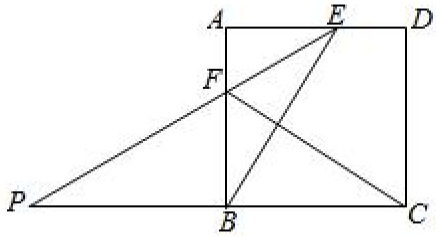
（2）如图②，用边长为 $20cm$ 的正方形纸片进行如下操作：对折正方形 $ABCD$ 得折痕 EF，连接 CE，将 CB 折叠到 CE 上，点 B 对应点 H，得折痕 CG．试说明：G 是 AB 的黄金分割点；

（3）如图③，小明进一步探究：在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 的边 AD 上任取点 E（$AE>DE$），连接 BE，作 $CF\perp BE$，交 AB 于点 F，延长 EF、CB 交于点 P．他发现当 PB 与 BC 满足某种关系时，E、F 恰好分别是 AD、AB 的黄金分割点．请猜想小明的发现，并说明理由．

图①



图②



图③

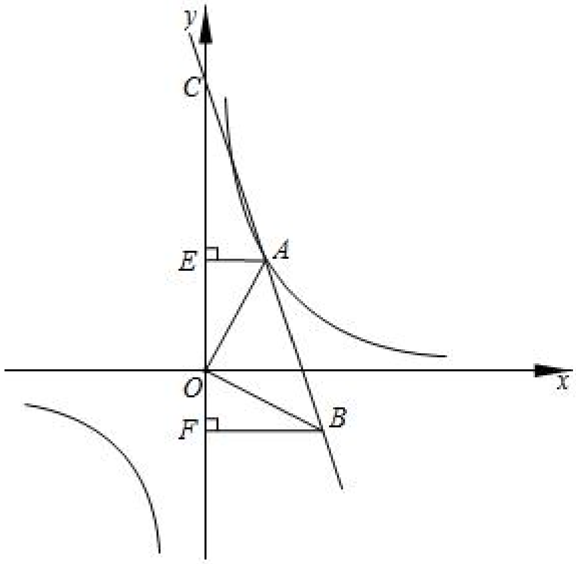
18．（2020•株洲）如图所示，△OAB 的顶点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）的图象上，直线 AB 交 y 轴于点 C，且点 C 的纵坐标为 5，过点 A、B 分别作 y 轴的垂线 AE、BF，垂足分别为点 E、F，且 $AE=1$．

（1）若点 E 为线段 OC 的中点，求 k 的值；

（2）若△OAB 为等腰直角三角形，∠$AOB=90°$，其面积小于 3．

①求证：△OAE≌△BOF；

②把$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$称为 M（x_1，y_1），N（x_2，y_2）两点间的“ZJ 距离”，记为 d（M，N），求 d（A，C）$+d$（A，B）的值．



19．（2020•宁波）定义：三角形一个内角的平分线和与另一个内角相邻的外角平分线相交所成的锐角称为该三角形第三个内角的遥望角．

（1）如图 1，∠E 是△ABC 中∠A 的遥望角，若∠$A=\alpha$，请用含α的代数式表示∠E．

（2）如图 2，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，$\widehat{AD}=\widehat{BD}$，四边形 $ABCD$ 的外角平分线 DF 交⊙O 于点 F，连结 BF 并延长交 CD 的延长线于点 E．求证：∠BEC 是△ABC 中∠BAC 的遥望角．

（3）如图 3，在（2）的条件下，连结 AE，AF，若 AC 是⊙O 的直径．

①求∠AED 的度数；

②若 $AB=8$，$CD=5$，求△DEF 的面积．

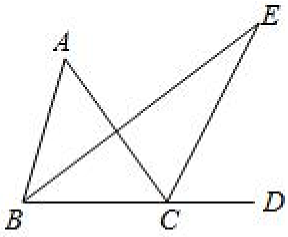


图1

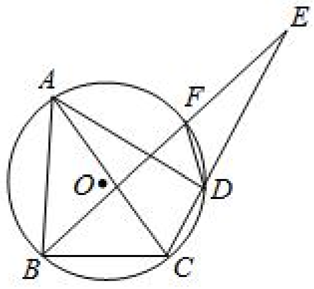


图2

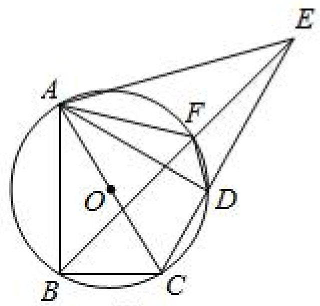


图3

20.（2020•陕西）问题提出

（1）如图1，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC>BC$，$\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 D．过点 D 分别作 $DE\perp AC$，$DF\perp BC$．垂足分别为 E，F，则图1中与线段 CE 相等的线段是_______．

问题探究

（2）如图2，AB 是半圆 O 的直径，$AB=8$．P 是$\widehat{AB}$上一点，且$\widehat{PB}=2\widehat{PA}$，连接 AP，BP．$\angle APB$ 的平分线交 AB 于点 C，过点 C 分别作 $CE\perp AP$，$CF\perp BP$，垂足分别为 E，F，求线段 CF 的长．

问题解决

（3）如图3，是某公园内“少儿活动中心”的设计示意图．已知⊙O 的直径 $AB=70m$，点 C 在⊙O 上，且 $CA=CB$．P 为 AB 上一点，连接 CP 并延长，交⊙O 于点 D．连接 AD，BD．过点 P 分别作 $PE\perp AD$，$PF\perp BD$，垂足分别为 E，F．按设计要求，四边形 $PEDF$ 内部为室内活动区，阴影部分是户外活动区，圆内其余部分为绿化区．设 AP 的长为 x（m），阴影部分的面积为 y（m^2）．

①求 y 与 x 之间的函数关系式；

②按照“少儿活动中心”的设计要求，发现当 AP 的长度为 $30m$ 时，整体布局比较合理．试求当 $AP=30m$ 时．室内活动区（四边形 $PEDF$）的面积．

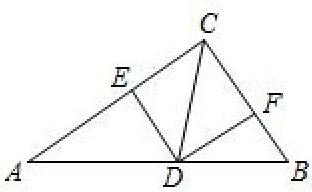


图1

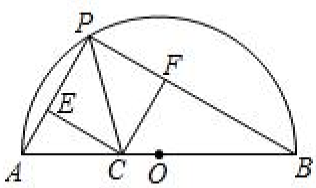


图2

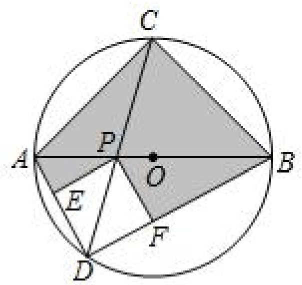


图3

21.（2020•咸宁）定义：有一组对角互余的四边形叫做对余四边形．

理解：

（1）若四边形 $ABCD$ 是对余四边形，则 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的度数之和为_______；

证明：

（2）如图1，MN 是⊙O 的直径，点 A，B，C 在⊙O 上，AM，CN 相交于点 D．

求证：四边形 $ABCD$ 是对余四边形；

探究：

（3）如图 2，在对余四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$\angle ABC=60^{\circ}$，探究线段 AD，CD 和 BD 之间有怎样的数量关系？写出猜想，并说明理由．

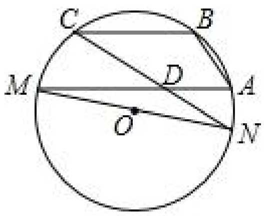


图1

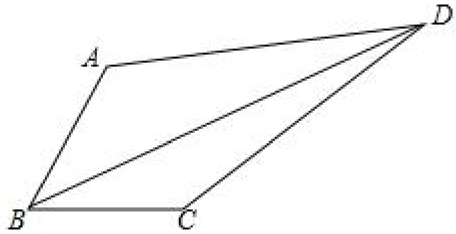


图2

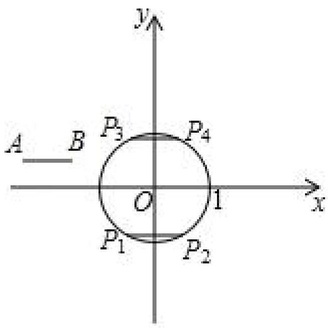
22．（2020•北京）在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 1，A，B 为$\odot O$ 外两点，$AB=1$．

给出如下定义：平移线段 AB，得到$\odot O$ 的弦 $A'B'$（A'，B' 分别为点 A，B 的对应点），线段 AA'长度的最小值称为线段 AB 到$\odot O$ 的“平移距离”．

（1）如图，平移线段 AB 得到$\odot O$ 的长度为 1 的弦 P_1P_2 和 P_3P_4，则这两条弦的位置关系是_______；在点 P_1，P_2，P_3，P_4 中，连接点 A 与点_______的线段的长度等于线段 AB 到$\odot O$ 的“平移距离”；

（2）若点 A，B 都在直线 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$上，记线段 AB 到$\odot O$ 的“平移距离”为 d_1，求 d_1 的最小值；

（3）若点 A 的坐标为（2，$\frac{3}{2}$），记线段 AB 到$\odot O$ 的“平移距离”为 d_2，直接写出 d_2 的取值范围．



23．（2020•怀化）定义：对角线互相垂直且相等的四边形叫做垂等四边形．

（1）下面四边形是垂等四边形的是_______；（填序号）

①平行四边形；②矩形；③菱形；④正方形

（2）图形判定：如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AC\perp BD$，过点 D 作 BD 垂线交 BC 的延长线于点 E，且$\angle DBC=45^{\circ}$，证明：四边形 $ABCD$ 是垂等四边形．

（3）由菱形面积公式易知性质：垂等四边形的面积等于两条对角线乘积的一半．应用：在图 2 中，面积为 24 的垂等四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$ 中，$\angle BCD=60^{\circ}$．求$\odot O$ 的半径．

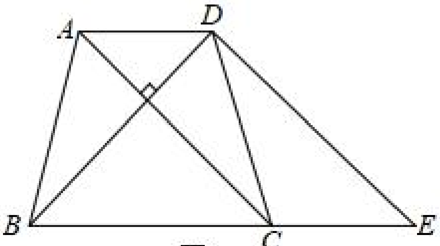


图1

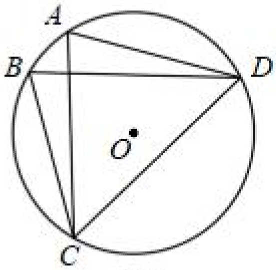


图2

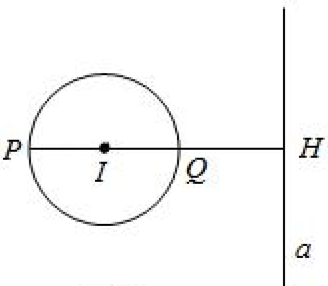
24．（2020•常州）如图 1，⊙I 与直线 a 相离，过圆心 I 作直线 a 的垂线，垂足为 H，且交⊙I 于 P、Q 两点（Q 在 P、H 之间）．我们把点 P 称为⊙I 关于直线 a 的"远点"，把 PQ•PH 的值称为⊙I 关于直线 a 的"特征数".

（1）如图 2，在平面直角坐标系 xOy 中，点 E 的坐标为（0，4）．半径为 1 的⊙O 与两坐标轴交于点 A、B、C、D．

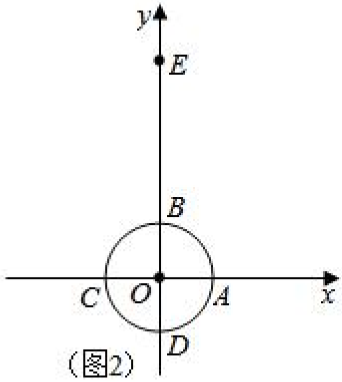
①过点 E 画垂直于 y 轴的直线 m，则⊙O 关于直线 m 的"远点"是点_______（填"A"．"B"、"C"或"D"），⊙O 关于直线 m 的"特征数"为_______；

②若直线 n 的函数表达式为 $y=\sqrt{3}x+4$．求⊙O 关于直线 n 的"特征数"；

（2）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 经过点 M（1，4），点 F 是坐标平面内一点，以 F 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径作⊙F．若⊙F 与直线 1 相离，点 N（﹣1，0）是⊙F 关于直线 1 的"远点"．且⊙F 关于直线 l 的"特征数"是 $4\sqrt{5}$，求直线 l 的函数表达式．



（图1）



（图2）

25．（2020•连云港）（1）如图 1，点 P 为矩形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点，过点 P 作 $EF\parallel BC$，分别交 AB、CD 于点 E、F．若 $BE=2$，$PF=6$，△AEP 的面积为 S_1，△CFP 的面积为 S_2，则 $S_1+S_2=$_______；

（2）如图 2，点 P 为▱$ABCD$ 内一点（点 P 不在 BD 上），点 E、F、G、H 分别为各边的中点．设四边形 $AEPH$ 的面积为 S_1，四边形 $PFCG$ 的面积为 S_2（其中 $S_2>S_1$），求△PBD 的面积（用含 S_1、S_2 的代数式表示）；

（3）如图 3，点 P 为▱$ABCD$ 内一点（点 P 不在 BD 上），过点 P 作 $EF\parallel AD$，$HG\parallel AB$，与各边分别相交于点 E、F、G、H．设四边形 $AEPH$ 的面积为 S_1，四边形 $PGCF$ 的面积为 S_2（其中 $S_2>S_1$），求△PBD

的面积（用含 S_1、S_2 的代数式表示）；

（4）如图 4，点 A、B、C、D 把⊙O 四等分．请你在圆内选一点 P（点 P 不在 AC、BD 上），设 PB、PC、$\widehat{BC}$围成的封闭图形的面积为 S_1，PA、PD、$\widehat{AD}$围成的封闭图形的面积为 S_2，△PBD 的面积为 S_3，△PAC 的面积为 S_4，根据你选的点 P 的位置，直接写出一个含有 S_1、S_2、S_3、S_4 的等式（写出一种情况即可）．

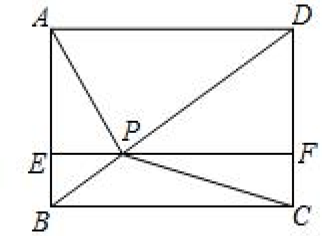


图1

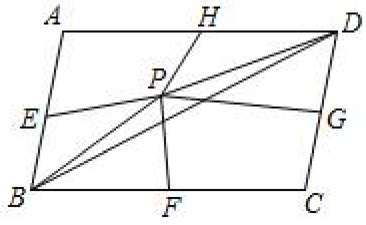


图2

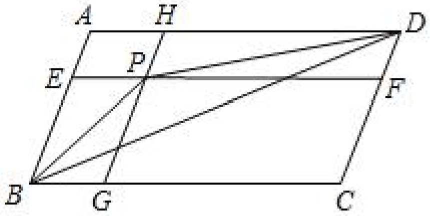


图3

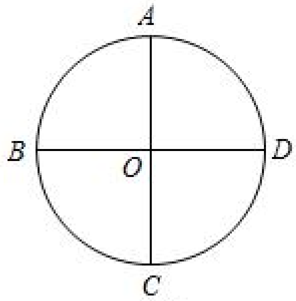
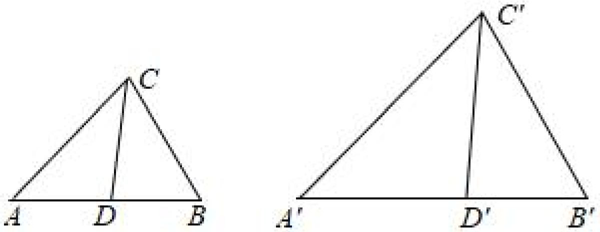


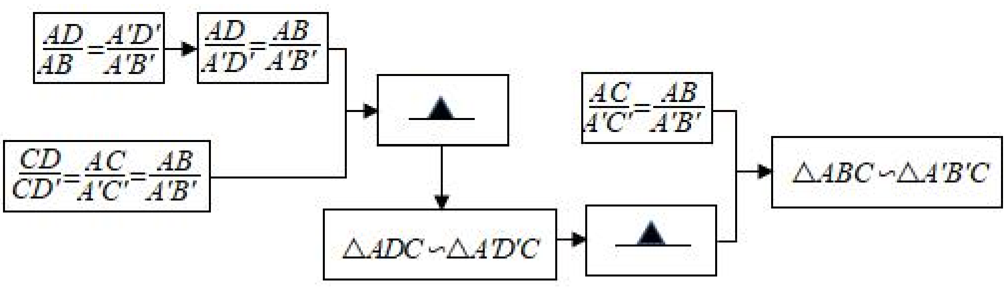
图4

26．（2020•南京）如图，在△ABC 和△$A'B'C'$中，D、D'分别是 AB、$A'B'$上一点，$\frac{AD}{AB}=\frac{A'D'}{A'B'}$.



（1）当$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}$时，求证△$ABC$∽△$A'B'C$.

证明的途径可以用下面的框图表示，请填写其中的空格．



（2）当$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$时，判断△$ABC$ 与△$A'B'C'$ 是否相似，并说明理由．

27．（2020•重庆）在初中阶段的函数学习中，我们经历了列表、描点、连线画函数图象，并结合图象研究函数性质的过程．以下是我们研究函数 $y=\frac{6x}{x^2+1}$性质及其应用的部分过程，请按要求完成下列各小题．

（1）请把下表补充完整，并在图中补全该函数图象；

x	…	﹣5	﹣4	﹣3	﹣2	﹣1	0	1	2	3	4	5	…
$y=\frac{6x}{x^2+1}$	…	$-\frac{15}{13}$	$-\frac{24}{17}$	______	$-\frac{12}{5}$	﹣3	0	3	$\frac{12}{5}$	______	$\frac{24}{17}$	$\frac{15}{13}$	…

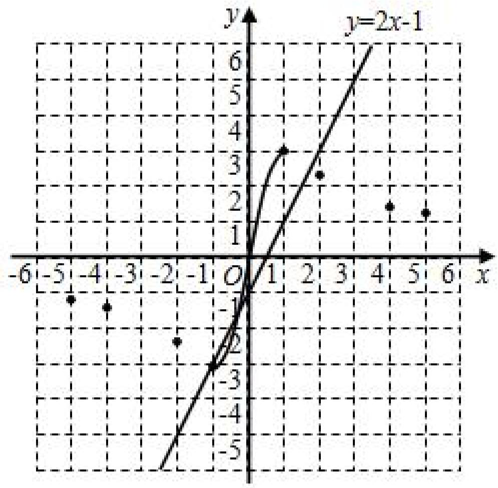
（2）根据函数图象，判断下列关于该函数性质的说法是否正确，正确的在答题卡上相应的括号内打“√”，错误的在答题卡上相应的括号内打“×”；

①该函数图象是轴对称图形，它的对称轴为 y 轴．

②该函数在自变量的取值范围内，有最大值和最小值．当 $x=1$ 时，函数取得最大值 3；当 $x=﹣1$ 时，函数取得最小值﹣3．

③当 $x<﹣1$ 或 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小；当﹣$1<x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大．

（3）已知函数 $y=2x﹣1$ 的图象如图所示，结合你所画的函数图象，直接写出不等式$\frac{6x}{x^2+1}>2x﹣1$ 的解集（保留 1 位小数，误差不超过 0.2）．



28．（2020•重庆）探究函数性质时，我们经历了列表、描点、连线画出函数图象，观察分析图象特征，概括函数性质的过程．结合已有的学习经验，请画出函数 $y=-\frac{12}{x^2+2}$的图象并探究该函数的性质．

x	…	﹣4	﹣3	﹣2	﹣1	0	1	2	3	4	…
y	…	$-\frac{2}{3}$	a	﹣2	﹣4	b	﹣4	﹣2	$-\frac{12}{11}$	$-\frac{2}{3}$	…

（1）列表，写出表中 a，b 的值：a=________，b=________；

描点、连线，在所给的平面直角坐标系中画出该函数的图象．

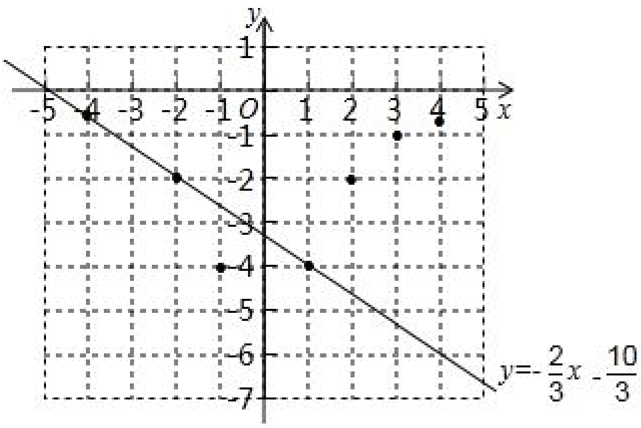
（2）观察函数图象，判断下列关于函数性质的结论是否正确（在答题卡相应位置正确的用“√”作答，错误的用“×”作答）：

①函数 $y=-\frac{12}{x^2+2}$ 的图象关于 y 轴对称；

②当 $x=0$ 时，函数 $y=-\frac{12}{x^2+2}$ 有最小值，最小值为－6；

③在自变量的取值范围内函数 y 的值随自变量 x 的增大而减小．

（3）已知函数 $y=-\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$ 的图象如图所示，结合你所画的函数图象，直接写出不等式 $-\frac{12}{x^2+2}<-\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$ 的解集．



29．（2020•内江）我们知道，任意一个正整数 x 都可以进行这样的分解：$x=m\times n$（m，n 是正整数，且 $m\leqslant n$），在 x 的所有这种分解中，如果 m，n 两因数之差的绝对值最小，我们就称 $m\times n$ 是 x 的最佳分解．并规定：$f(x)=\frac{m}{n}$．

例如：18 可以分解成 1×18，2×9 或 3×6，因为 18－1＞9－2＞6－3，所以 3×6 是 18 的最佳分解，所以 $f(18)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$．

（1）填空：$f(6)=$_______；$f(9)=$_______；

（2）一个两位正整数 t（$t=10a+b$，$1\leqslant a\leqslant b\leqslant 9$，$a$，$b$ 为正整数），交换其个位上的数字与十位上的数字得到的新数减去原数所得的差为 54，求出所有的两位正整数；并求 $f(t)$ 的最大值；

（3）填空：

①$f(2^2\times3\times5\times7)=$_______；②$f(2^3\times3\times5\times7)=$_______；③$f(2^4\times3\times5\times7)=$_______；④$f(2^5\times3\times5\times7)=$_______．

30．（2020•重庆）在整数的除法运算中，只有能整除与不能整除两种情况，当不能整除时，就会产生余数，现在我们利用整数的除法运算来研究一种数－－“差一数”．

定义：对于一个自然数，如果这个数除以 5 余数为 4，且除以 3 余数为 2，则称这个数为“差一数”．

例如：14÷5＝2…4，14÷3＝4…2，所以 14 是“差一数”；

19÷5＝3…4，但 19÷3＝6…1，所以 19 不是“差一数”．

（1）判断 49 和 74 是否为“差一数”？请说明理由；

（2）求大于 300 且小于 400 的所有“差一数”.

31.（2020•张家界）阅读下面的材料：

对于实数 a，b，我们定义符号 $min\{a，b\}$的意义为：当 $a<b$ 时，$min\{a，b\}=a$；当 $a\geqslant b$ 时，$min\{a，b\}=b$，如：$min\{4，-2\}=-2$，$min\{5，5\}=5$.

根据上面的材料回答下列问题：

（1）$min\{-1，3\}=$________；

（2）当 $min\{\frac{2x-3}{2}，\frac{x+2}{3}\}=\frac{x+2}{3}$时，求 x 的取值范围.

32.（2020•荆州）阅读下列“问题”与“提示”后，将解方程的过程补充完整，求出 x 的值.

【问题】解方程：$x^2+2x+4\sqrt{x^2+2x}-5=0$.

【提示】可以用“换元法”解方程.

解：设$\sqrt{x^2+2x}=t$（$t\geqslant 0$），则有 $x^2+2x=t^2$

原方程可化为：$t^2+4t-5=0$

【续解】

33.（2020•扬州）阅读感悟：

有些关于方程组的问题，欲求的结果不是每一个未知数的值，而是关于未知数的代数式的值，如以下问题：

已知实数 x、y 满足 $3x-y=5$①，$2x+3y=7$②，求 $x-4y$ 和 $7x+5y$ 的值.

本题常规思路是将①②两式联立组成方程组，解得 x、y 的值再代入欲求值的代数式得到答案，常规思路运算量比较大．其实，仔细观察两个方程未知数的系数之间的关系，本题还可以通过适当变形整体求得代数式的值，如由①－②可得 $x-4y=-2$，由①+②×2 可得 $7x+5y=19$．这样的解题思想就是通常所说的“整体思想”.

解决问题：

（1）已知二元一次方程组$\begin{cases}2x+y=7，\\x+2y=8，\end{cases}$则 $x-y=$________，$x+y=$________；

（2）某班级组织活动购买小奖品，买 20 支铅笔、3 块橡皮、2 本日记本共需 32 元，买 39 支铅笔、5 块橡皮、3 本日记本共需 58 元，则购买 5 支铅笔、5 块橡皮、5 本日记本共需多少元？

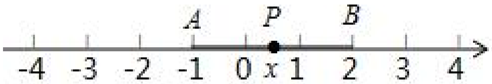
（3）对于实数 x、y，定义新运算：$x*y=ax+by+c$，其中 a、b、c 是常数，等式右边是通常的加法和乘法运算．已知 $3*5=15$，$4*7=28$，那么 $1*1=$________.

34.（2020•自贡）我国著名数学家华罗庚说过“数缺形时少直观，形少数时难入微”，数形结合是解决数学问题的重要思想方法．例如，代数式$|x-2|$的几何意义是数轴上 x 所对应的点与 2 所对应的点之间的距离：

因为$|x+1|=|x-(-1)|$，所以$|x+1|$的几何意义就是数轴上 x 所对应的点与 -1 所对应的点之间的距离．

（1）发现问题：代数式$|x+1|+|x-2|$的最小值是多少？

（2）探究问题：如图，点 A、B、P 分别表示数 -1、2、x，$AB=3$．



∵$|x+1|+|x-2|$的几何意义是线段 PA 与 PB 的长度之和，

∴当点 P 在线段 AB 上时，$PA+PB=3$，当点 P 在点 A 的左侧或点 B 的右侧时，$PA+PB>3$．

∴$|x+1|+|x-2|$的最小值是 3．

（3）解决问题：

①$|x-4|+|x+2|$的最小值是_______；

②利用上述思想方法解不等式：$|x+3|+|x-1|>4$；

③当 a 为何值时，代数式$|x+a|+|x-3|$的最小值是 2．

35．（2020•随州）勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图 1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今．

（1）①请叙述勾股定理；

②勾股定理的证明，人们已经找到了 400 多种方法，请从下列几种常见的证明方法中任选一种来证明该定理；（以下图形均满足证明勾股定理所需的条件）

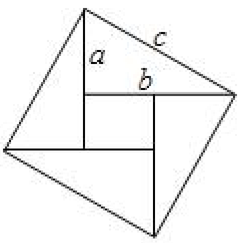


图 1

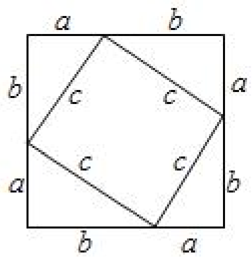


图 2

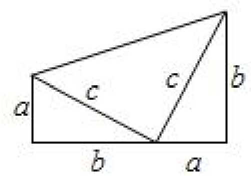


图 3

（2）①如图 4、5、6，以直角三角形的三边为边或直径，分别向外部作正方形、半圆、等边三角形，这三个图形中面积关系满足 $S_1+S_2=S_3$ 的有_______个；

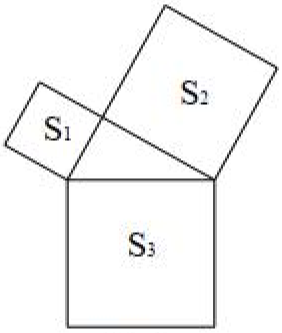


图 4

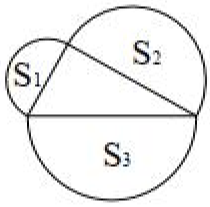


图 5

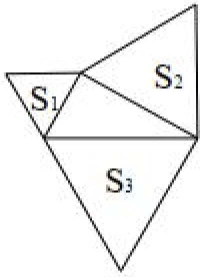


图 6

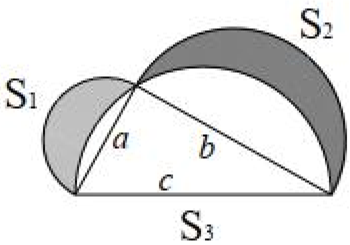


图 7

②如图 7 所示，分别以直角三角形三边为直径作半圆，设图中两个月形图案（图中阴影部分）的面积分别为 S_1，S_2，直角三角形面积为 S_3，请判断 S_1，S_2，S_3 的关系并证明；

（3）如果以正方形一边为斜边向外作直角三角形，再以该直角三角形的两直角边分别向外作正方形，重复这一过程就可以得到如图 8 所示的“勾股树”．在如图 9 所示的“勾股树”的某部分图形中，设大正方形 M 的边长为定值 m，四个小正方形 A，B，C，D 的边长分别为 a，b，c，d，已知∠1＝∠2＝∠3＝∠α，则当∠α变化时，回答下列问题：(结果可用含 m 的式子表示)

①$a^2+b^2+c^2+d^2=$_______；

②b 与 c 的关系为_______，a 与 d 的关系为_______．

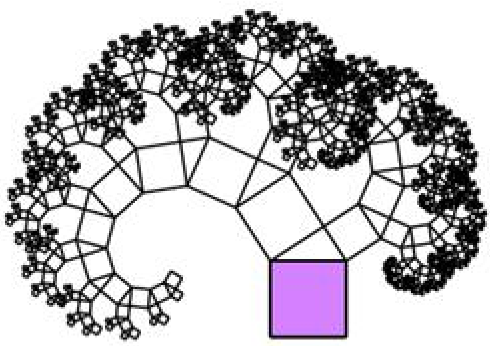


图 8

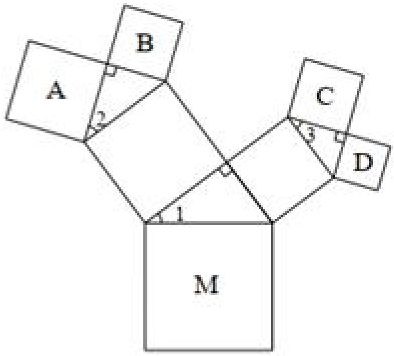


图 9

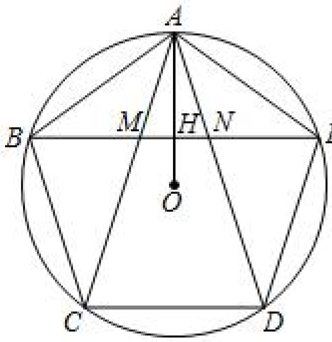
36．（2020•呼和浩特）某同学在学习了正多边形和圆之后，对正五边形的边及相关线段进行研究，发现多处出现者名的黄金分割比$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$．如图，圆内接正五边形 $ABCDE$，圆心为 O，OA 与 BE 交于点 H，AC、AD 与 BE 分别交于点 M、N．根据圆与正五边形的对称性，只对部分图形进行研究．(其它可同理

得出）

（1）求证：$\triangle ABM$ 是等腰三角形且底角等于 36°，并直接说出$\triangle BAN$ 的形状；

（2）求证：$\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{BN}{BE}$，且其比值 $k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；

（3）由对称性知 $AO\perp BE$，由（1）（2）可知$\dfrac{MN}{BM}$也是一个黄金分割数，据此求 sin18° 的值．



37．（2020•江西）某数学课外活动小组在学习了勾股定理之后，针对图 1 中所示的“由直角三角形三边向外侧作多边形，它们的面积 S_1，S_2，S_3 之间的关系问题”进行了以下探究：

类比探究

（1）如图 2，在 Rt$\triangle ABC$ 中，BC 为斜边，分别以 AB，AC，BC 为斜边向外侧作 Rt$\triangle ABD$，Rt$\triangle ACE$，Rt$\triangle BCF$，若$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，则面积 S_1，S_2，S_3 之间的关系式为_______；

推广验证

（2）如图 3，在 Rt$\triangle ABC$ 中，BC 为斜边，分别以 AB，AC，BC 为边向外侧作任意$\triangle ABD$，$\triangle ACE$，$\triangle BCF$，满足$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle D=\angle E=\angle F$，则（1）中所得关系式是否仍然成立？若成立，请证明你的结论；若不成立，请说明理由；

拓展应用

（3）如图 4，在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A=\angle E=\angle C=105°$，$\angle ABC=90°$，$AB=2\sqrt{3}$，$DE=2$，点 P 在 AE 上，$\angle ABP=30°$，$PE=\sqrt{2}$，求五边形 $ABCDE$ 的面积．

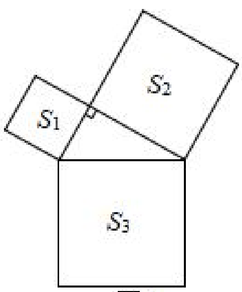


图1

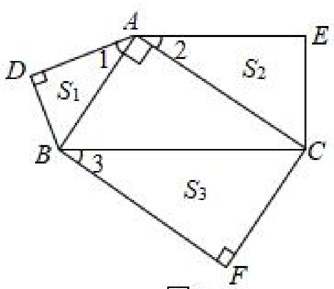


图2

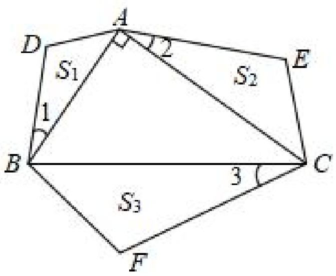


图3

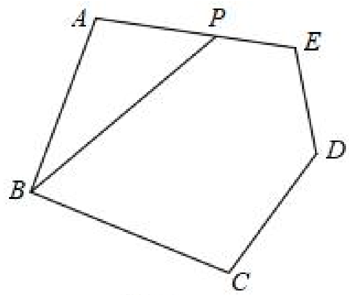


图4

38．（2020•湘西州）问题背景：如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90°$，$\angle BCD=90°$，$BA=BC$，$\angle ABC=120°$，$\angle MBN=60°$，$\angle MBN$ 绕 B 点旋转，它的两边分别交 AD、DC 于 E、F．探究图中线段

AE，CF，EF 之间的数量关系．

小李同学探究此问题的方法是：延长 FC 到 G，使 $CG=AE$，连接 BG，先证明△BCG≌△BAE，再证明△BFG≌△BFE，可得出结论，他的结论就是_______；

探究延伸 1：如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90^{\circ}$，$\angle BCD=90^{\circ}$，$BA=BC$，$\angle ABC=2\angle MBN$，$\angle MBN$ 绕 B 点旋转．它的两边分别交 AD、DC 于 E、F，上述结论是否仍然成立？请直接写出结论（直接写出“成立”或者“不成立”），不要说明理由；

探究延伸 2：如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$BA=BC$，$\angle BAD+\angle BCD=180^{\circ}$，$\angle ABC=2\angle MBN$，$\angle MBN$ 绕 B 点旋转．它的两边分别交 AD、DC 于 E、F．上述结论是否仍然成立？并说明理由；

实际应用：如图 4，在某次军事演习中，舰艇甲在指挥中心（O 处）北偏西 30° 的 A 处．舰艇乙在指挥中心南偏东 70° 的 B 处，并且两舰艇到指挥中心的距离相等，接到行动指令后，舰艇甲向正东方向以 75 海里/小时的速度前进，同时舰艇乙沿北偏东 50° 的方向以 100 海里/小时的速度前进，1.2 小时后，指挥中心观测到甲、乙两舰艇分别到达 E、F 处．且指挥中心观测两舰艇视线之间的夹角为 70°．试求此时两舰艇之间的距离．

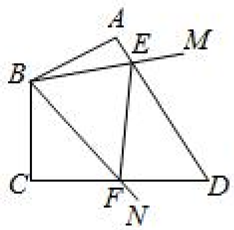


图1

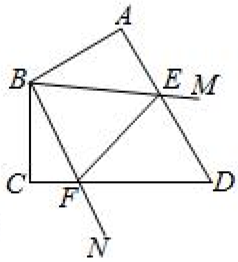


图2

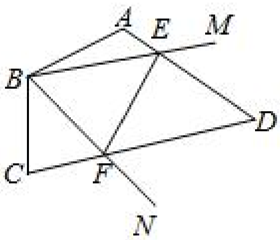


图3

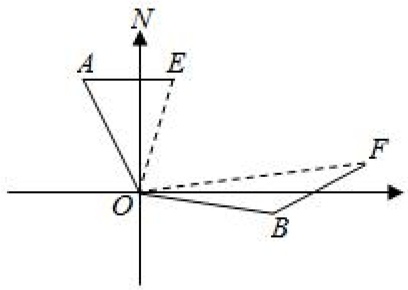


图4

39.（2020•青海）在△ABC 中，$AB=AC$，$CG\perp BA$ 交 BA 的延长线于点 G．

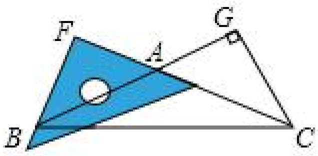


图1

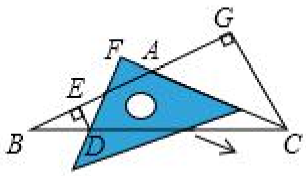


图2

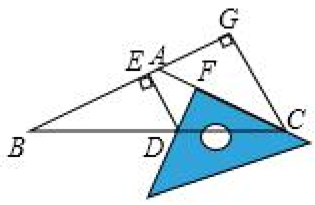


图3

特例感知：

（1）将一等腰直角三角尺按图 1 所示的位置摆放，该三角尺的直角顶点为 F，一条直角边与 AC 重合，另一条直角边恰好经过点 B．通过观察、测量 BF 与 CG 的长度，得到 $BF=CG$．请给予证明．

猜想论证：

（2）当三角尺沿 AC 方向移动到图 2 所示的位置时，一条直角边仍与 AC 边重合，另一条直角边交 BC 于点 D，过点 D 作 $DE\perp BA$ 垂足为 E．此时请你通过观察、测量 DE、DF 与 CG 的长度，猜想并写出 DE、

DF 与 CG 之间存在的数量关系，并证明你的猜想．

联系拓展：

（3）当三角尺在图 2 的基础上沿 AC 方向继续移动到图 3 所示的位置（点 F 在线段 AC 上，且点 F 与点 C 不重合）时，请你判断（2）中的猜想是否仍然成立？（不用证明）

40．（2020•齐齐哈尔）综合与实践

在线上教学中，教师和学生都学习到了新知识，掌握了许多新技能．例如教材八年级下册的数学活动－－折纸，就引起了许多同学的兴趣．在经历图形变换的过程中，进一步发展了同学们的空间观念，积累了数学活动经验．

实践发现：

对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF，把纸片展平；再一次折叠纸片，使点 A 落在 EF 上的点 N 处，并使折痕经过点 B，得到折痕 BM，把纸片展平，连接 AN，如图①．

（1）折痕 BM_______（填“是”或“不是”）线段 AN 的垂直平分线；请判断图中△ABN 是什么特殊三角形？答：_______；进一步计算出∠MNE＝_______°；

（2）继续折叠纸片，使点 A 落在 BC 边上的点 H 处，并使折痕经过点 B，得到折痕 BG，把纸片展平，如图②，则∠GBN＝_______°；

拓展延伸：

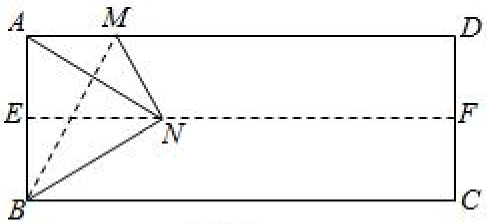
（3）如图③，折叠矩形纸片 $ABCD$，使点 A 落在 BC 边上的点 A'处，并且折痕交 BC 边于点 T，交 AD 边于点 S，把纸片展平，连接 AA'交 ST 于点 O，连接 AT．

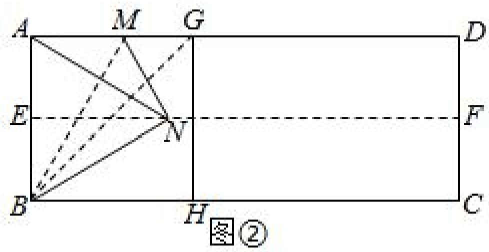
求证：四边形 $SATA'$是菱形．

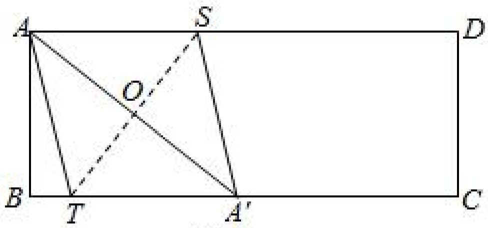
解决问题：

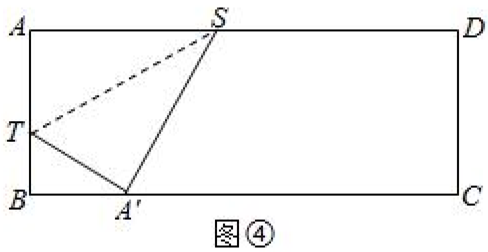
（4）如图④，矩形纸片 $ABCD$ 中，AB＝10，AD＝26，折叠纸片，使点 A 落在 BC 边上的点 A'处，并且折痕交 AB 边于点 T，交 AD 边于点 S，把纸片展平．同学们小组讨论后，得出线段 AT 的长度有 4，5，7，9．

请写出以上 4 个数值中你认为正确的数值_______．


图①


图②


图③


图④

41．（2020•德州）问题探究：

小红遇到这样一个问题：如图 1，△ABC 中，AB＝6，AC＝4，AD 是中线，求 AD 的取值范围．她的做法是：延长 AD 到 E，使 DE＝AD，连接 BE，证明△BED≌△CAD，经过推理和计算使问题得到解决．

请回答：（1）小红证明△BED≌△CAD 的判定定理是：________；

（2）AD 的取值范围是________；

方法运用：

（3）如图 2，AD 是△ABC 的中线，在 AD 上取一点 F，连结 BF 并延长交 AC 于点 E，使 AE＝EF，求证：BF＝AC．

（4）如图 3，在矩形 $ABCD$ 中，$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$，在 BD 上取一点 F，以 BF 为斜边作 Rt△BEF，且$\frac{EF}{BE}=\frac{1}{2}$，点 G 是 DF 的中点，连接 EG，CG，求证：EG＝CG．

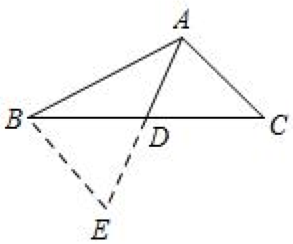


图1

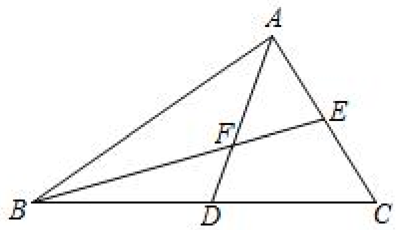


图2

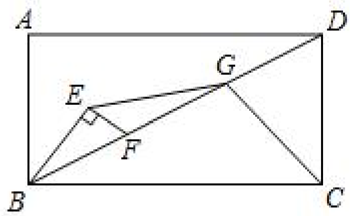


图3

42．（2020•宁波）【基础巩固】

（1）如图 1，在△ABC 中，D 为 AB 上一点，∠ACD＝∠B．求证：AC^2＝AD•AB．

【尝试应用】

（2）如图 2，在▱$ABCD$ 中，E 为 BC 上一点，F 为 CD 延长线上一点，∠BFE＝∠A．若 BF＝4，BE＝3，求 AD 的长．

【拓展提高】

（3）如图3，在菱形 $ABCD$ 中，E 是 AB 上一点，F 是△ABC 内一点，$EF∥AC$，$AC=2EF$，$\angle EDF=\frac{1}{2}\angle BAD$，$AE=2$，$DF=5$，求菱形 $ABCD$ 的边长．

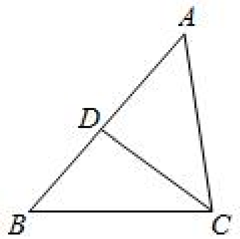


图1

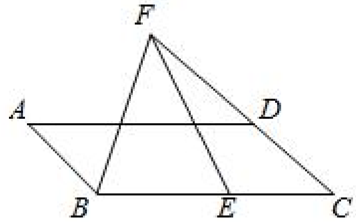


图2

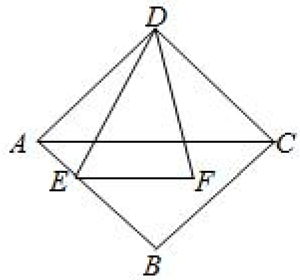


图3

43．（2020•邵阳）已知：如图①，将一块45°角的直角三角板 DEF 与正方形 $ABCD$ 的一角重合，连接 AF，CE，点 M 是 CE 的中点，连接 DM．

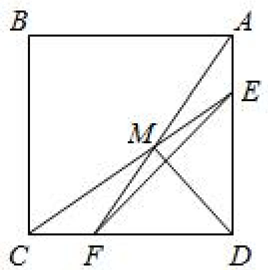
（1）请你猜想 AF 与 DM 的数量关系是_______．

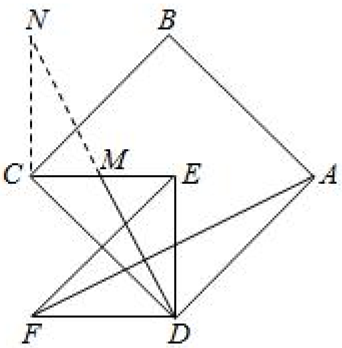
（2）如图②，把正方形 $ABCD$ 绕着点 D 顺时针旋转α角（0°＜α＜90°）．

①AF 与 DM 的数量关系是否仍成立，若成立，请证明；若不成立，请说明理由；（温馨提示：延长 DM 到点 N，使 $MN=DM$，连接 CN）

②求证：$AF\perp DM$；

③若旋转角α=45°，且 $\angle EDM=2\angle MDC$，求$\frac{AD}{ED}$的值．（可不写过程，直接写出结果）





44．（2020•天水）性质探究

如图（1），在等腰三角形 ABC 中，$\angle ACB=120°$，则底边 AB 与腰 AC 的长度之比为_______．

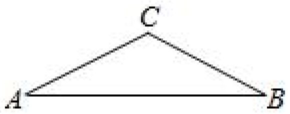
理解运用

（1）若顶角为120°的等腰三角形的周长为 $4+2\sqrt{3}$，则它的面积为_______；

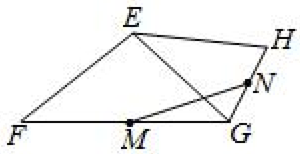
（2）如图（2），在四边形 $EFGH$ 中，$EF=EG=EH$，在边 FG，GH 上分别取中点 M，N，连接 MN．若 $\angle FGH=120°$，$EF=20$，求线段 MN 的长．

类比拓展

顶角为 2α的等腰三角形的底边与一腰的长度之比为_______.（用含α的式子表示）



图（1）



图（2）

45.（2020•盐城）以下虚线框中为一个合作学习小组在一次数学实验中的过程记录，请阅读后完成虚线框下方的问题 1～4.

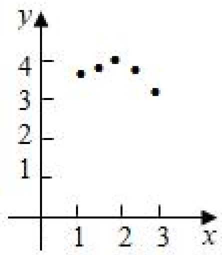
（Ⅰ）在 Rt△ABC 中，∠C＝90°，AB＝$2\sqrt{2}$，在探究三边关系时，通过画图，度量和计算，收集到一组数据如下表：（单位：厘米）

AC	2.8	2.7	2.6	2.3	2	1.5	0.4
BC	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4	2.8
$AC+BC$	3.2	3.5	3.8	3.9	4	3.9	3.2

（Ⅱ）根据学习函数的经验，选取上表中 BC 和 $AC+BC$ 的数据进行分析：

①BC＝x，$AC+BC$＝y，以（x，y）为坐标，在图①所示的坐标系中描出对应的点：

②连线：



图①

观察思考

（Ⅲ）结合表中的数据以及所画的图象，猜想．当 x＝____时，y 最大；

（Ⅳ）进一步精想：若 Rt△ABC 中，∠C＝90°，斜边 AB＝$2a$（a 为常数，a＞0），则 BC＝____时，$AC+BC$ 最大．

推理证明

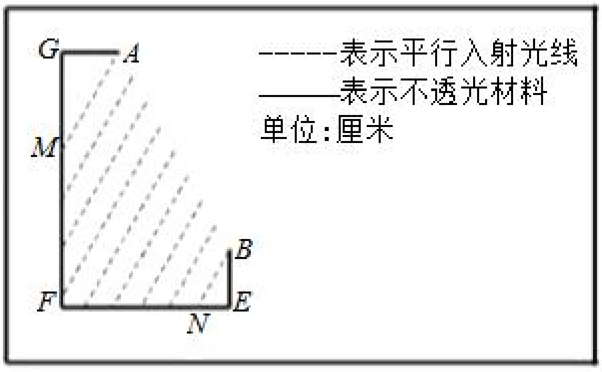
（Ⅴ）对（Ⅳ）中的猜想进行证明．

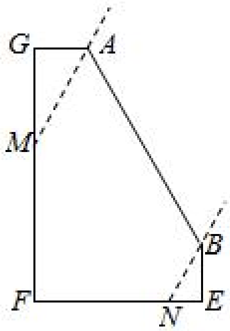
问题 1，在图①中完善（Ⅱ）的描点过程，并依次连线；

问题 2，补全观察思考中的两个猜想：（Ⅲ）_______；（Ⅳ）_______；

问题 3，证明上述（Ⅴ）中的猜想；

问题 4，图②中折线 $B--E--F--G--A$ 是一个感光元件的截面设计草图，其中点 A，B 间的距离是 4 厘米，$AG=BE=1$ 厘米．$\angle E=\angle F=\angle G=90°$．平行光线从 AB 区域射入，$\angle BNE=60°$，线段 FM、FN 为感光区域，当 EF 的长度为多少时，感光区域长度之和最大，并求出最大值．

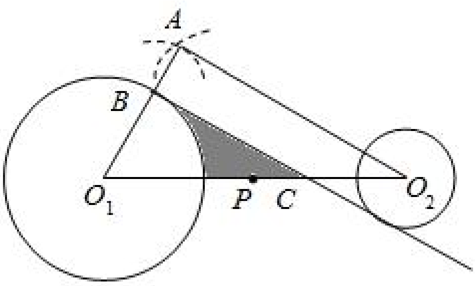




46．（2020•临沂）已知⊙O_1 的半径为 r_1，⊙O_2 的半径为 r_2．以 O_1 为圆心，以 r_1+r_2 的长为半径画弧，再以线段 O_1O_2 的中点 P 为圆心，以$\frac{1}{2}O_1O_2$ 的长为半径画弧，两弧交于点 A，连接 O_1A，O_2A，O_1A 交⊙O_1 于点 B，过点 B 作 O_2A 的平行线 BC 交 O_1O_2 于点 C．

（1）求证：BC 是⊙O_2 的切线；

（2）若 $r_1=2$，$r_2=1$，$O_1O_2=6$，求阴影部分的面积．



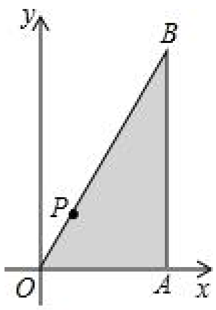
47．（2020•天津）将一个直角三角形纸片 OAB 放置在平面直角坐标系中，点 O（0，0），点 A（2，0），点 B 在第一象限，$\angle OAB=90°$，$\angle B=30°$，点 P 在边 OB 上（点 P 不与点 O，B 重合）．

（Ⅰ）如图①，当 $OP=1$ 时，求点 P 的坐标；

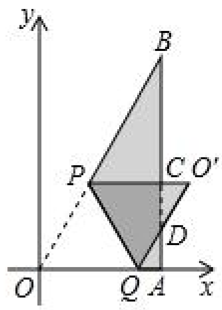
（Ⅱ）折叠该纸片，使折痕所在的直线经过点 P，并与 x 轴的正半轴相交于点 Q，且 $OQ=OP$，点 O 的对应点为 O'，设 $OP=t$．

①如图②，若折叠后△$O'PQ$ 与△OAB 重叠部分为四边形，$O'P$，$O'Q$ 分别与边 AB 相交于点 C，D，试用含有 t 的式子表示 $O'D$ 的长，并直接写出 t 的取值范围；

②若折叠后△$O'PQ$ 与△OAB 重叠部分的面积为 S，当 $1\leqslant t\leqslant 3$ 时，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）．



图①



图②

48.（2020•南京）如图①，要在一条笔直的路边 l 上建一个燃气站，向 l 同侧的 A、B 两个城镇分别铺设管道输送燃气．试确定燃气站的位置，使铺设管道的路线最短．

（1）如图②，作出点 A 关于 l 的对称点 A'，线段 $A'B$ 与直线 l 的交点 C 的位置即为所求，即在点 C 处建燃气站，所得路线 ACB 是最短的．

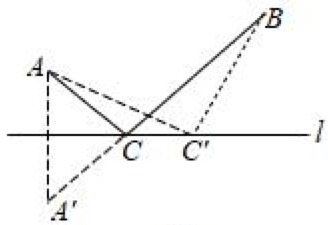
为了证明点 C 的位置即为所求，不妨在直线 1 上另外任取一点 C'，连接 AC'、BC'，证明 $AC+CB<AC'+C'B$．请完成这个证明．

（2）如果在 A、B 两个城镇之间规划一个生态保护区，燃气管道不能穿过该区域．请分别给出下列两种情形的铺设管道的方案（不需说明理由）．

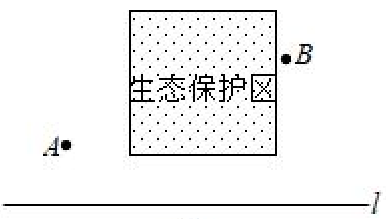
①生态保护区是正方形区域，位置如图③所示；

②生态保护区是圆形区域，位置如图④所示．

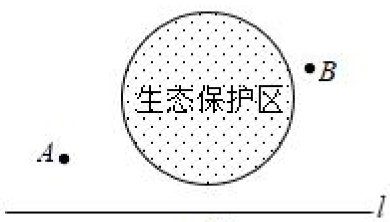
①



②



③



④

49.（2020•达州）（1）[阅读与证明]

如图 1，在正△ABC 的外角∠CAH 内引射线 AM，作点 C 关于 AM 的对称点 E（点 E 在∠CAH 内），连接 BE，BE、CE 分别交 AM 于点 F、G．

①完成证明：∵点 E 是点 C 关于 AM 的对称点，

∴∠AGE＝90°，AE＝AC，∠1＝∠2．

∵正△ABC中，$\angle BAC=60°$，$AB=AC$，

∴$AE=AB$，得$\angle 3=\angle 4$．

在△ABE中，$\angle 1+\angle 2+60°+\angle 3+\angle 4=180°$，∴$\angle 1+\angle 3=$______°．

在△AEG中，$\angle FEG+\angle 3+\angle 1=90°$，∴$\angle FEG=$______°．

②求证：$BF=AF+2FG$．

（2）[类比与探究]

把（1）中的“正△ABC”改为“正方形$ABDC$”，其余条件不变，如图2．类比探究，可得：

①$\angle FEG=$______°；

②线段BF、AF、FG之间存在数量关系______．

（3）[归纳与拓展]

如图3，点A在射线BH上，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha$（$0°<\alpha<180°$），在$\angle CAH$内引射线AM，作点C关于AM的对称点E（点E在$\angle CAH$内），连接BE，BE、CE分别交AM于点F、G．则线段BF、AF、GF之间的数量关系为______．

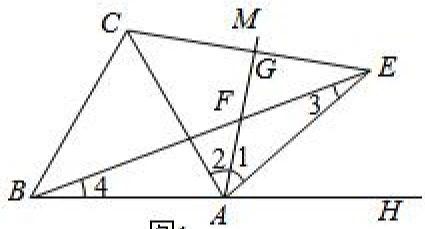


图1

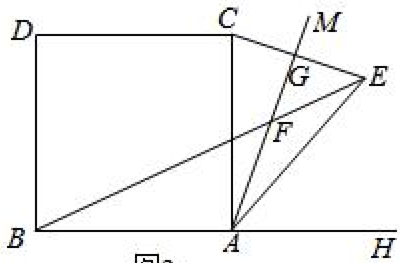


图2

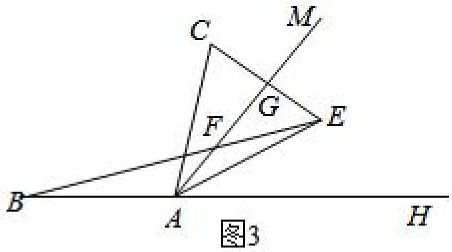


图3

50．（2020•泰安）小明将两个直角三角形纸片如图（1）那样拼放在同一平面上，抽象出如图（2）的平面图形，$\angle ACB$与$\angle ECD$恰好为对顶角，$\angle ABC=\angle CDE=90°$，连接$BD$，$AB=BD$，点$F$是线段$CE$上一点．

探究发现：

（1）当点F为线段CE的中点时，连接DF（如图（2）），小明经过探究，得到结论：$BD\perp DF$．你认为此结论是否成立？______．（填“是”或“否”）

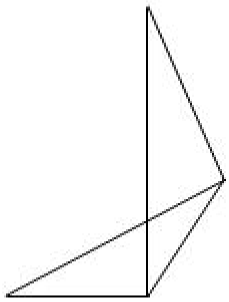
拓展延伸：

（2）将（1）中的条件与结论互换，即：$BD\perp DF$，则点F为线段CE的中点．请判断此结论是否成立．若

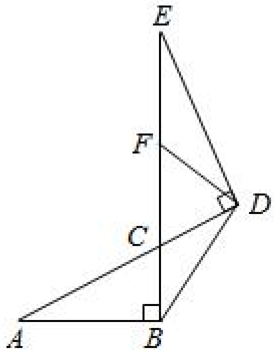
成立，请写出证明过程；若不成立，请说明理由．

问题解决：

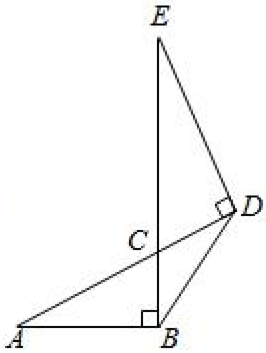
（3）若 AB＝6，CE＝9，求 AD 的长．



图（1）



图（2）



备用图