2023北京回民学校高三12月月考

数　　学

统测（四）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集$U=\{x|x>0\}$，集合$A=\{x|1<x<2\}$，则$\complement_U A=$（　）

A. $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$　　B. $(0,1]\cup[2,+\infty)$

C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(0,1)\cup(2,+\infty)$

2. 若复数z满足$\mathrm{i}\cdot z=3-4\mathrm{i}$，则$|z|=$（　）

A. 1　　B. 5　　C. 7　　D. 25

3. 下列函数是偶函数，且在区间$(0,1)$上单调递增的是（　）

A. $y=1-x^2$　　B. $y=\tan x$

C. $y=x\cos x$　　D. $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

4. 已知直线$l_1:mx+2y-1=0$与直线$l_2:x+(m-1)y-m=0$平行，则m的值为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. "$a=1$"是"函数$y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$的最小正周期为π"的（　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

6. 若$a<b<0$，则下列不等式成立的是（　）

A. $a^2<b^2$　　B. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$

C. $\log_3|a|<\log_3|b|$　　D. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$

7. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x<0\\ 2^x-a,x\geq 0\end{cases}$的值域为$\mathbf{R}$，则实数$a$的取值范围是（　）

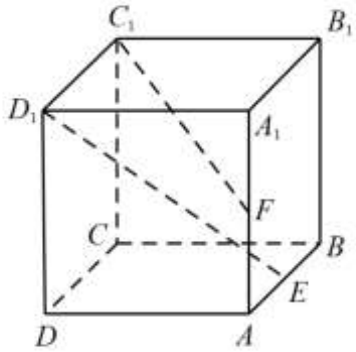
A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $[1,+\infty)$

8. 记$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为$a,b,c,a=4,c=6,B=\dfrac{\pi}{3}$，则$AC$边上的高为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$　　D. $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$

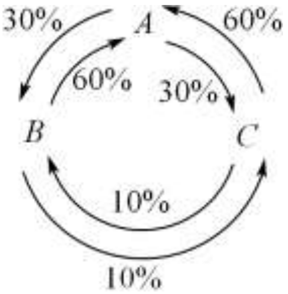
9. 如图，点 E,F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB ，A_1A 中点，点 M,N 分别是线段 D_1E ，C_1F 上的点，则与平面 $ABCD$ 垂直的直线 MN 有( )

条



A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 无穷多

10. 市场占有率指在一定时期内，企业所生产的产品在其市场的销售量（或销售额）占同类产品销售量（或销售额）的比重．一般来说，市场占有率会随着市场的顾客流动而发生变化，如果市场的顾客流动趋向长期稳定，那么经过一段时期以后的市场占有率将会出现稳定的平衡状态（即顾客的流动，不会影响市场占有率），此时的市场占有率称为“稳定市场占有率”．有 A，B，C 三个企业都生产某产品，2022 年第一季度它们的市场占有率分别为：40%，30%，30%．经调查，2022 年第二季度 A，B，C 三个企业之间的市场占有率转移情况如下图所示：



若该产品以后每个季度的市场占有率转移情况均与 2022 年第二季度相同，则当市场出现稳定的平衡状态，最终达到“稳定市场占有率”时，A 企业该产品的“稳定市场占有率”为（　）

A. 45%　　　　B. 48%　　　　C. 50%　　　　D. 52%

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. $\left(\sqrt{2}x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中的常数项是______.

12. 在平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 中，已知 $\vec{a}=(1,3)$，$\vec{b}=(2,y)$，如果 $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，那么 $y=$________；如果 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，那么 $y=$________.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq 0, a_1=4$，且 a_1,a_3,a_4 成等比数列，则 $a_n=$__________；其前 n 项和 S_n 的最大值为__________.

14. 已知双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 相切，则 $m=$______；双曲线的离心率为______.

15. 已知函数 $f(x)=e^x-|x+a|$，给出下列四个结论：

①若 $a=0$，则 $f(x)$ 有一个零点；　　②若 $a\in[1,+\infty)$，则 $f(x)$ 有三个零点；

③ $\forall a\le 0$，$f(x)$ 在 R 上是增函数；　　④ $\exists a>0$，使得 $f(x)$ 在 R 上是增函数.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f(x)=2\sin\frac{\omega x}{2}\cos(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{3})+m(\omega>0)$. 在下列条件①、条件②、条件③这三个条件中，选择可以确定 ω 和 m 值的两个条件作为已知.

（1）求 $f(\frac{\pi}{4})$ 的值；

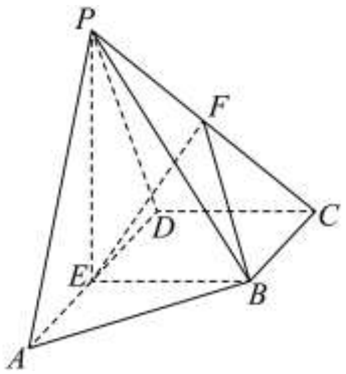
（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上是增函数，求实数 a 的最大值.

条件①：$f(x)$ 的最小正周期为 π；

条件②：$f(x)$ 的最大值与最小值之和为 0；

条件③：$f(0)=2$.

17. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$BC//AD$，$\angle ADC=90°$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD=1$，$PA=PD$，E、F 为 AD、PC 的中点.



（1）求证：$PA//$ 平面 BEF；

（2）若 PC 与 AB 所成角为 $45°$，求 PE 的长；

（3）在（2）的条件下，求平面 ABE 与平面 BEF 所成角的余弦值.

18. “双减”政策实施以来，各地纷纷推行课后服务“5+2"模式，即学校每周周一至周五 5 天都要面向所有学生提供课后服务，每天至少 2 小时．某学校的课后服务有学业辅导体育锻炼、实践能力创新培养三大类别，为了解该校学生上个月参加课后服务的情况，该校从全校学生中随机抽取了 100 人作为样本．发现样本中未参加任何课后服务的有 14 人，样本中仅参加某一类课后服务的学生分布情况如下：

每周参加活动天数 课后服务活动	1 天	2~4 天	5 天
仅参加学业辅导	10 人	11 人	4 人
仅参加体育锻炼	5 人	12 人	1 人
仅参加实践能力创新培养	3 人	12 人	1 人

（1）从全校学生中随机抽取 1 人．估计该学生上个月至少参加了两类课后服务活动的概率；

（2）从全校学生中随机抽取 3 人．以频率估计概率，以 X 表示这 3 人中上个月仅参加学业辅导的人数．求 X 的分布列和数学期望；

（3）若样本中上个月未参加任何课后服务的学生有 $n\left(0<n\le 14\right)$ 人在本月选择仅参加学业辅导．样本中其他学生参加课后服务的情况在本月没有变化．从全校学生中随机抽取 3 人．以频率估计概率，以 X 表示这 3 人中上个月仅参加学业辅导的人数，以 Y 表示这 3 人中本月仅参加学业辅导的人数．试判断方差 $D\left(X\right)$、$D\left(Y\right)$ 的大小关系（结论不要求证明）．

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 过点 $\left(0,\sqrt{3}\right)$，且离心率为 $\dfrac{1}{2}$．设 A，B 为椭圆 C 的左、右顶点，P 为椭圆上异于 A，B 的一点，直线 AP，BP 分别与直线 $l:x=4$ 相交于 M，N 两点，且直线 MB 与椭圆 C 交于另一点 H．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）求证：直线 AP 与 BP 的斜率之积为定值；

（3）判断三点 A，H，N 是否共线：并证明你的结论．

20. 已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$．

（1）当 $a=0$ 时, 求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程;

（2）当 $a>0$ 时, 判断 $f\left(x\right)$ 的零点个数, 并加以证明;

（3）当 $a<0$ 时, 证明: 存在实数 m, 使 $f\left(x\right)\ge m$ 恒成立.

21. 对于一个有穷正整数数列 Q，设其各项为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，各项和为 $S\left(Q\right)$，集合 $\left\{(i,j)\mid a_i>a_j,1\le i<j\le n\right\}$ 中元素的个数为 $T\left(Q\right)$．

（1）写出所有满足 $S\left(Q\right)=4,T\left(Q\right)=1$ 的数列 Q；

（2）对所有满足 $T\left(Q\right)=6$ 的数列 Q，求 $S\left(Q\right)$ 的最小值；

（3）对所有满足 $S\left(Q\right)=2023$ 的数列 Q，求 $T\left(Q\right)$ 的最大值．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】由补集的定义即可求解.

【详解】因为全集 $U=\{x|x>0\}$，集合 $A=\{x|1<x<2\}$，

由补集的运算可得 $\complement_U A=\{x|0<x\le 1 或 x\ge 2\}$，

对应区间为 $(0,1]\cup[2,+\infty)$.

故选：B.

2.【答案】B

【分析】利用复数四则运算，先求出 z，再计算复数的模.

【详解】由题意有 $z=\dfrac{3-4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{(3-4\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}=-4-3\mathrm{i}$，故 $|z|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$.

故选：B.

3.【答案】D

【分析】利用函数奇偶性和在区间上单调递增逐项分析.

【详解】选项 A 由令 $y=1-x^2$ 的定义域为 R，

且 $f(-x)=1-(-x)^2=1-x^2$，

由函数为二次函数开口向下，对称轴为 y 轴，

所以在 $(0,+\infty)$ 单调递减，故函数在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

故 A 错误，

由 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,|\,x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathrm{Z}\right\}$，关于原点对称

且 $f(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-f(x)$，

所以 $y=\tan x$ 为奇函数，故选项 B 错误，

由 $y=x\cos x$ 的定义域为 R，

且 $f(-x)=(-x)\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$，

所以 $y=x\cos x$ 为奇函数，故 C 错误，

由 $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 的定义域为 R，

且 $f(-x)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x=f(x)$，所以

$y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 为偶函数，

$\forall x_1,x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{-x_1}-\left(\mathrm{e}^{x_2}+\mathrm{e}^{-x_2}\right)$

$=\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_1}}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_2}}$

$=\left(\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}}\right)$，

因为 $x_1,x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$，

因为 $y=\mathrm{e}^x$ 在 R 上单调递增，

所以 $\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}<0$，$1<\mathrm{e}^{x_1}<\mathrm{e},1<\mathrm{e}^{x_2}<\mathrm{e}$，

所以 $1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}}>0$，

故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

所以 $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，

故选：D.

4.【答案】B

【分析】根据直线平行得到 $m(m-1)=2\times1$，解方程再排除重合的情况得到答案.

【详解】直线 $l_1:mx+2y-1=0$ 与直线 $l_2:x+(m-1)y-m=0$ 平行，

则 $m(m-1)=2\times1$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$，

当 $m=-1$ 时，$l_1:-x+2y-1=0$ 与 $l_2:x-2y+1=0$ 重合，排除.

当 $m=2$ 时，$l_1:2x+2y-1=0$，$l_2:x+y-2=0$ 平行，成立.

故 $m=2$.

故选：B

5.【答案】A

【分析】利用二倍角公式化简函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax=\cos 2ax$，根据余弦函数的性质，即可得出答案.

【详解】解：函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax=\cos 2ax$，

所以 $T=\dfrac{2\pi}{|2a|}=\pi$，解得 $a=\pm1$，故必要性不成立，

当 $a=1$ 时，函数 $y=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ 的最小正周期为 π，故充分性成立，

所以“$a=1$”是“函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为 π”的充分不必要条件.

故选：A.

6.【答案】D

【分析】由二次函数的单调性判断 A 选项；由指数函数的单调性判断 B 选项；由对数函数的单调性判断 C 选项；由基本不等式判断 D 选项.

【详解】解：因为$a<b<0$，所以

对于 A，因为$y=x^2$在$\left(-\infty,0\right)$单调递减，所以$a^2>b^2$，故 A 选项不正确；

对于 B，因为$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在 R 单调递减，所以$\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$，故 B 选项不正确；

对于 C，因为$y=\log_3 x$在$\left(0,+\infty\right)$单调递增，又$\left|a\right|>\left|b\right|>0$，所以$\log_3\left|a\right|>\log_3\left|b\right|$，故 C 选项不正确；

对于 D，$0<\frac{b}{a}<1,\frac{a}{b}>1$，所以$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，故 D 选项正确，

故选：D.

7.【答案】D

【分析】由于当$x<0$时，$\frac{1}{x}<0$，所以当$x\geq0$时，求出2^x-a的最小值，使其最小值小于等于零即可.

【详解】当$x<0$时，$f\left(x\right)=\frac{1}{x}<0$，

当$x\geq0$时，$f\left(x\right)=2^x-a\geq2^0-a=1-a$，

因为函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{x},x<0\\2^x-a,x\geq0\end{cases}$的值域为$\mathbf{R}$，

所以$1-a\leq0$，得$a\geq1$，

所以实数a的取值范围是$\left[1,+\infty\right)$，

故选：D.

8.【答案】D

【分析】根据余弦定理求出b，再根据面积公式列式可求出结果.

【详解】由$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=16+36-2\times4\times6\times\frac{1}{2}=28$，得$b=2\sqrt{7}$.

设AC边上的高为h，

因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bh$，所以$h=\frac{ac\sin B}{b}=\frac{4\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{21}}{7}$，

即AC边上的高为$\frac{6\sqrt{21}}{7}$.

故选：D

9.【答案】B

【分析】建立空间直角坐标系，根据点的坐标得向量的坐标，进而根据向量垂直即可求解.

【详解】假设存在满足条件的直线MN，如下图，建立空间直角坐标系，不妨设正方体的棱长为2，则$D_1(2,0,2)$，$E(1,2,0)$，设$M(x,y,z)$，$\overrightarrow{D_1M}=m\overrightarrow{D_1E}(0\le m\le 1)$，

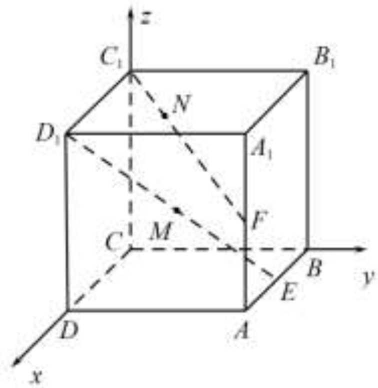
$\therefore (x-2,y,z-2)=m(-1,2,-2)$，$x=2-m$，$y=2m$，$z=2-2m$，

$\therefore M(2-m,2m,2-2m)$，同理，若设$\overrightarrow{C_1N}=n\overrightarrow{C_1F}(0\le n\le 1)$，可得$N(2n,2n,2-n)$，

$\overrightarrow{MN}=(m+2n-2,2n-2m,2m-n)$，又$\because MN\perp$平面$ABCD$，

$\therefore \begin{cases}m+2n-2=0\\2n-2m=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{2}{3}\\n=\dfrac{2}{3}\end{cases}$，即存在满足条件的直线$MN$，且只有一条.

故选：B



10.【答案】C

【分析】根据市场占有率转移情况求得正确答案.

【详解】最终达到“稳定市场占有率”时，设A企业该产品的“稳定市场占有率”为x，则

$x-(-0.3-0.3)x+0.6(1-x)=x$,解得$x=0.5$.

故选：C

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11.【答案】-20

【分析】根据二项式的展开式的通项可得答案.

【详解】由题意$\left(\sqrt{2}x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$的展开式的通项为

$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r\cdot\left(\sqrt{2}x^3\right)^{5-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^r=\mathrm{C}_5^r\cdot(-1)^r 2^{\frac{5-r}{2}}\cdot x^{15-3r-2r}$，

令$15-5r=0$，则$r=3$，

所以$\left(\sqrt{2}x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$的展开式中的常数项为$\mathrm{C}_5^3\cdot(-1)^3\times 2=-20$.

故答案为：-20.

12.【答案】 ①. -1 ②. $-\frac{2}{3}$

【分析】根据数量积的坐标运算及向量模的坐标运算即可求解.

【详解】由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，即 $1\cdot 2+3\cdot y=5$，解得 $y=1$；

$\vec{a}+\vec{b}=(3,3+y)$，$\vec{a}-\vec{b}=(-1,3-y)$，由 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，

得 $\sqrt{3^2+(3+y)^2}=\sqrt{(-1)^2+(3-y)^2}$，解得：$y=-\frac{2}{3}$.

故答案为：-1；$-\frac{2}{3}$.

13.【答案】 ①. $5-n$ ②. 10

【分析】由 a_1,a_3,a_4 成等比数列列式求出公差,则通项公式可求;写出等差数列的前 n 项和,由二次函数的对称性求得 S_n 取得最大值.

【详解】由 a_1,a_3,a_4 成等比数列,得 $\left(a_1+2d\right)^2=a_1\left(a_1+3d\right)$,解得 $d=-\frac{a_1}{4}$,$\therefore d=-1$.

则 $a_n=a_1+(n-1)d=4-(n-1)=5-n$；

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=4n+\frac{n(n-1)\times(-1)}{2}=-\frac{n^2}{2}+\frac{9}{2}n$$

对称轴方程为 $n=4.5$,

$\because n\in \mathrm{N}^*$,$\therefore n=4$ 或 5 时，S_n 取最大值，最大值为 $S_4=S_5=-\frac{4^2}{2}+\frac{9}{2}\times 4=10$.

故答案为：$5-n$,10

14.【答案】 ①. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ②. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【分析】写出双曲线的渐近线方程，根据直线与圆相切求出 m 的值，可得出 a 、b 、c 的值，进而可求得双曲线的离心率的值.

【详解】双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1\left(m>0\right)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{m}x$，即 $x\pm my=0$，

圆的标准方程为 $x^2+\left(y-2\right)^2=1$，圆心为 $\left(0,2\right)$，半径为1，

因为双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1\left(m>0\right)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 相切，

则 $\frac{2m}{\sqrt{m^2+1}}=1$，解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以，$a=1$，$b=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

因此，该双曲线的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

15.【答案】①③

【分析】对于①，当$a=0$时，则$f\left(x\right)=\begin{cases}e^x+x,\left(x<0\right)\\e^x-x,\left(x\ge 0\right)\end{cases}$，分段讨论得出函数$f\left(x\right)$在R上单调递增，再由$f\left(-1\right)<0$，$f\left(1\right)>0$可判断；

对于②，当$a=1$时，则$f\left(x\right)=\begin{cases}e^x+x+1,\left(x<-1\right)\\e^x-x-1,\left(x\ge -1\right)\end{cases}$，分段讨论函数$f\left(x\right)$的单调性，再由当$x\ge -1$时，$f\left(x\right)\ge f\left(0\right)=0$可判断；

对于③，当$a<0$，即$-a>0$时，则$f\left(x\right)=\begin{cases}e^x+x+a,\left(x<-a\right)\\e^x-x-a,\left(x\ge -a\right)\end{cases}$，分段讨论得出函数$f\left(x\right)$在R上单调递增，由此可判断；

对于④，当$a>0$，即$-a<0$时，则$f\left(x\right)=\begin{cases}e^x+x+a,\left(x<-a\right)\\e^x-x-a,\left(x\ge -a\right)\end{cases}$，分段讨论函数$f\left(x\right)$的单调性，由此可判断.

【详解】解：因为函数$f\left(x\right)=e^x-\left|x+a\right|$，所以函数$f\left(x\right)=\begin{cases}e^x+x+a,\left(x<-a\right)\\e^x-x-a,\left(x\ge -a\right)\end{cases}$，

对于①，当$a=0$时，则$f\left(x\right)=\begin{cases}e^x+x,\left(x<0\right)\\e^x-x,\left(x\ge 0\right)\end{cases}$，

当$x<0$时，$f\left(x\right)$单调递增，

当$x\ge 0$时，$f'\left(x\right)=e^x-1\ge 0$，所以$f\left(x\right)$单调递增，所以函数$f\left(x\right)$在R上单调递增，且$f\left(-1\right)=e^{-1}-1<0$，$f\left(1\right)=e^1-1>0$，所以函数$f\left(x\right)$有一个零点，故①正确；

对于②，当$a=1$时，则$f\left(x\right)=\begin{cases}e^x+x+1,\left(x<-1\right)\\e^x-x-1,\left(x\ge -1\right)\end{cases}$，

当$x<-1$时，$f\left(x\right)$单调递增，且$f\left(-2\right)=e^{-2}-2+1=\dfrac{1}{e^2}-1<0$，$f\left(-1\right)=e^{-1}-1+1=\dfrac{1}{e}>0$，所以在$\left(-\infty,-1\right)$，函数$f\left(x\right)$有且只有一个零点，

当$x\ge -1$时，令$f'\left(x\right)=e^x-1=0$，解得$x=0$，

所以当$-1<x<0$时，所以$f'\left(x\right)=e^x-1<0$，$f\left(x\right)$单调递减；当$x>0$时，所以$f'\left(x\right)=e^x-1>0$，

$f\left(x\right)$单调递增，

所以当$x\geq -1$时，$f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=e^{0}-0-1=0$，所以在$\left[-1,+\infty\right)$，函数$f\left(x\right)$有且只有一个零点，

所以当$a=1$，函数$f\left(x\right)$只有两个零点，故②不正确；

对于③，当$a<0$，即$-a>0$时，则$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{x}+x+a,\left(x<-a\right) \\ e^{x}-x-a,\left(x\geq -a\right) \end{cases}$，

当$x<-a$时，$f\left(x\right)$单调递增，

当$x\geq -a$时，$f^{'}\left(x\right)=e^{x}-1\geq 0$，所以$f\left(x\right)$单调递增，所以函数$f\left(x\right)$在R上单调递增，

综上得，$\forall a\leq 0$，$f\left(x\right)$在R上是增函数，故③正确；

对于④，当$a>0$，即$-a<0$时，则$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{x}+x+a,\left(x<-a\right) \\ e^{x}-x-a,\left(x\geq -a\right) \end{cases}$，

当$x<-a$时，$f\left(x\right)$单调递增，

当$x\geq -a$时，令$f^{'}\left(x\right)=e^{x}-1=0$，解得$x=0$，

所以当$-a<x<0$时，所以$f^{'}\left(x\right)=e^{x}-1<0$，$f\left(x\right)$单调递减；

当$x>0$时，所以$f^{'}\left(x\right)=e^{x}-1>0$，$f\left(x\right)$单调递增，

所以当$a>0$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,-a\right)$和$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，在$\left(-a,0\right)$上单调递减，所以不存在$a>0$，使得$f\left(x\right)$在R上是增函数，故④正确；

综上得，正确结论的序号是①③，

故答案为：①③.

【点睛】关键点睛：本题考查函数的零点个数，关键在于利用导函数分段讨论函数的单调性，极值，最值.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）见解析　（2）$\dfrac{5\pi}{12}$

【分析】（1）先对函数化简得$f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m$，若选择①和②，则$\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m=0$，求出$\omega,m$的值，从而可得$f(x)$的解析式，从而可求出$f(\dfrac{\pi}{4})$，若选择①和③，则$\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi,f(0)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m=2$，求出$\omega,m$的值，从而可得$f(x)$的解析式，从而可求出$f(\dfrac{\pi}{4})$，若选择②和③时，$m$不存在，

（2）由（1）得到的解析式，求出函数的增区间，再根据题意可求出a的最大值

【小问 1 详解】

$$f(x)=2\sin\frac{\omega x}{2}\cos(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{3})+m(\omega>0)$$

$$=2\sin\frac{\omega\pi}{2}\left(\cos\frac{\omega\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\omega\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)+m$$

$$=2\sin\frac{\omega\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\omega\pi}{2}\right)+m$$

$$=\sin\frac{\omega\pi}{2}\cos\frac{\omega\pi}{2}+\sqrt{3}\sin^{2}\frac{\omega\pi}{2}+m$$

$$=\frac{1}{2}\sin\omega x+\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos\omega x}{2}+m$$

$$=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m$$

（1）若选择①和②，则

$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$， $1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=0$，

解得 $\omega=2,m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

所以 $f(\frac{\pi}{4})=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

若选择①和③，则

$\frac{2\pi}{\omega}=\pi, f(0)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=2$，

解得 $\omega=2,m=2$，

所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2$，

所以 $f(\frac{\pi}{4})=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$，

若选择②和③，则

$1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=0$，且 $f(0)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=2$，这样的 m 不存在，

【小问 2 详解】

由（1）可知，若选择①和②，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得

$-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

所以$f(x)$的增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$，

因为函数$f(x)$在区间$[0,a]$上是增函数，

所以实数a的最大值为$\frac{5\pi}{12}$，

若选择①和③，则$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2$，

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得

$-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

所以$f(x)$的增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$，

因为函数$f(x)$在区间$[0,a]$上是增函数，

所以实数a的最大值为$\frac{5\pi}{12}$，

17.【答案】（1）证明见解析

（2）$\sqrt{2}$

（3）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】（1）连接AC交BE于O，并连接EC,FO，依题意可得四边形$ABCE$为平行四边形，即可的$OF//PA$，从而得证；

（2）依题意可得$PE\perp AD$，由面面垂直的性质得到$PE\perp$平面$ABCD$，再说明四边形$BCDE$为正方形，得到$AD\perp BE$，建立如图所示空间直角坐标系，设$PE=t(t>0)$，利用空间向量法求出异面直线所成角，即可得到方程，解得即可；

（3）利用空间向量法计算可得.

【小问1详解】

证明：连接AC交BE于O，并连接EC,FO，

$\because BC//AD, BC=\dfrac{1}{2}AD, E$ 为 AD 中点，$\therefore AE//BC$ 且 $AE=BC$，

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 为平行四边形，$\therefore O$ 为 AC 中点.

又 F 为 AD 中点，$\therefore OF//PA$，

$\because OF\subset$ 平面 BEF，$PA\not\subset$ 平面 BEF，$\therefore PA//$ 平面 BEF；

【小问 2 详解】

因为 $PA=PD$，E 为 AD 中点，所以 $PE\perp AD$.

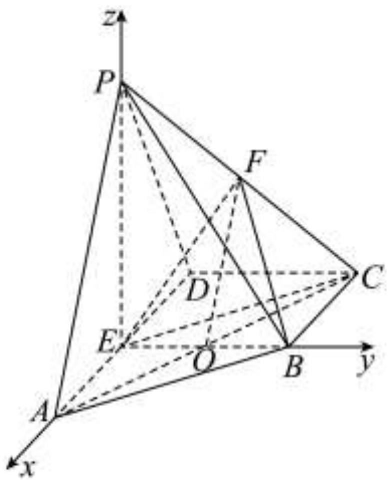
因为侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$PE\subset$ 平面 PAD，

所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，

由 $BC//AD$，$BC=DE$，$\angle ADC=90^\circ$，$BC=CD$，所以四边形 $BCDE$ 为正方形，所以 $AD\perp BE$.

建立空间直角坐标系 $E-xyz$，如图.



设 $PE=t(t>0)$，则 $E(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), P(0,0,t), C(-1,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{PC}=(-1,1,-t), \overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$.

因为 PC 与 AB 所成角为 45°，所以 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\cos45^\circ$，

即 $\dfrac{\left|\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{2+t^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $t=\sqrt{2}$ 或 $t=-\sqrt{2}$（舍去），

$\therefore PE=\sqrt{2}$.

【小问 3 详解】

因为 F 为 PC 的中点，所以 $F\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{EB}=(0,1,0), \overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 BEF 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y=0\\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$，

取 $x=2$，则 $z=\sqrt{2}$，得 $\vec{n}=\left(2,0,\sqrt{2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{EP}=\left(0,0,\sqrt{2}\right)$ 是平面 ABE 的法向量，所以 $\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{EP}\right\rangle\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{EP}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{EP}\right|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以平面 ABE 与平面 BEF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

18.【答案】（1） $P=\frac{27}{100}=0.27$

（2）分布列祥见解析、数学期望 $E(X)=\frac{3}{4}$

（3） $D(Y)>D(X)$

【分析】（1）计算出样本中上个月至少参加了两类课后服务活动的人数，除以 100 即可解决；

（2）以 n 次独立重复试验恰有 k 次发生的概率公式去求解 X 的 4 个概率；

（3）以二项分布的方差公式去求解两个方差 $D(Y)$、$D(X)$.

【小问 1 详解】

由题意得，样本中仅参加某一类课后服务的学生共有

$10+5+3+11+12+12+4+1+1=59$（人）

又样本中未参加任何课后服务的有 14 人，

故样本中上个月至少参加了两类课后服务活动的学生共有 $100-59-14=27$（人）

则从全校学生中随机抽取 1 人，该学生上个月至少参加了两类课后服务活动的频率为 $\frac{27}{100}$

由此，可估计该学生上个月至少参加了两类课后服务活动的概率 $P=\frac{27}{100}=0.27$

【小问 2 详解】

样本中，上个月仅参加学业辅导的有 $10+11+4=25$（人），对应频率为 0.25

以频率估计概率，从全校学生中随机抽取 1 人，上个月仅参加学业辅导的概率为 0.25，

X 的可能取值为 0，1，2，3，

$$P(X=0)=C_3^0(\frac{3}{4})^3(\frac{1}{4})^0=\frac{27}{64}$$

$$P(X=1)=C_3^1(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^1=\frac{27}{64}$$

$$P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^2=\frac{9}{64}$$

$$P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$$

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

X的数学期望$E(X)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{3}{4}$

【小问 3 详解】

由题意可知随机变量X服从二项分布，故$D(X)=np(1-p)=3\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$.

又知：上个月未参加任何课后服务的学生有$n\left(0<n\le 14\right)$人在本月选择仅参加学业辅导（样本中其他学生参加课后服务的情况在本月没有变化.），

则本月从全校学生中随机抽取 1 人仅参加学业辅导的概率估计为P，且$\frac{1}{4}<P\le\frac{39}{100}$.

以Y表示这 3 人中本月仅参加学业辅导的人数，由题意可知随机变量Y服从二项分布，

故$D(Y)=3p(1-p)$, $(\frac{1}{4}<P\le\frac{39}{100})$.

$D(Y)>D(X)$

19.【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）定值为$-\frac{3}{4}$，证明见解析.

（3）三点 A，H，N 共线，证明见解析.

【分析】（1）首先根据题意得到$\begin{cases}b=\sqrt{3}\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，再解方程组即可.

（2）设$P(x_0,y_0)$，$A\left(-2,0\right)$，$B\left(2,0\right)$，再计算$k_{AP}\cdot k_{BP}$即可.

（3）分别计算k_{AH}和k_{AN}，根据$k_{AN}=k_{AH}$， A 为公共点，即可证明 A，H，N 三点共线.

【小问 1 详解】

由题知：$\begin{cases}b=\sqrt{3}\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$,

所以椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

由题知：k_{AP}，k_{BP} 存在，且不为零，设 $P(x_0,y_0)$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，

则 $\frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{3}=1$，即 $y_0=\frac{3\left(4-x_0{}^2\right)}{4}$.

$$k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0{}^2}{x_0{}^2-4}=\frac{\frac{3\left(4-x_0{}^2\right)}{4}}{x_0{}^2-4}=-\frac{3}{4}.$$

所以直线 AP 与 BP 的斜率之积为定值 $-\frac{3}{4}$.

【小问 3 详解】

A，H，N 三点共线，证明如下：

设直线 AP：$y=k(x+2)$，则直线 BP：$y=-\frac{3}{4k}(x-2)$，

将 $x=4$ 代入直线 AP，BP 得：$M(4,6k)$，$N\left(4,-\frac{3}{2k}\right)$，

$k_{BM}=\frac{6k}{4-2}=3k$，设直线 HM：$y=3k(x-2)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=3k(x-2)\end{cases}\Rightarrow\left(1+12k^2\right)x^2-48k^2x+48k^2-4=0$，

设 $H(x_1,y_1)$，则 $2x_1=\frac{48k^2-4}{12k^2+1}$，解得 $x_1=\frac{24k^2-2}{12k^2+1}$，

所以 $y_1=3k(x_1-2)=\frac{-12k}{12k^2+1}$，即 $H\left(\frac{24k^2-2}{12k^2+1},\frac{-12k}{12k^2+1}\right)$，

所以 $k_{AN}=\frac{-\frac{3}{2k}}{6}=-\frac{1}{4k}$，$k_{AH}=\frac{\frac{-12k}{12k^2+1}}{\frac{24k^2-2}{12k^2+1}+2}=-\frac{1}{4k}$，

所以 $k_{AN}=k_{AH}$，A 为公共点，所以 A，H，N 三点共线.

20.【答案】(1) $2ex-y-2e=0$

(2) 1 个　(3) 证明见解析

【分析】(1)根据 $a=0$ 代入 $f(x)$ 解析式,求出 $f(1),f'(1)$,根据点斜式写出切线方程即可;

(2)对函数 $f(x)$ 求导求单调性,观察到 $f(1)=0$,根据单调性分析零点个数即可;

(3)先对函数 $f(x)$ 求导,再通分,令 $h(x)=a+x(x+1)e^x$, 再对新函数求导判断单调性即值域情况,分析 $h(x)$ 的正负,即 $f'(x)$ 的正负,进而求出 $f(x)$ 的单调性及最值,若 $f(x)\geq m$ 恒成立, 只需 $f(x)_{\min}\geq m$ 即可,

$f(x)$有最小值,即存在实数 m, 使 $f(x)\geq m$ 恒成立.

【小问 1 详解】

解:由题知 $a=0$,

$\therefore f(x)=xe^x-e$

$\therefore f'(x)=(x+1)e^x$,

$\therefore f(1)=0, f'(1)=2e$,

故 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=2e(x-1)$,

即 $2ex-y-2e=0$;

【小问 2 详解】

由题 $f(x)=a\ln x+xe^x-e,(x>0)$,

$\therefore f'(x)=\dfrac{a}{x}+(x+1)e^x$,

$\because x>0, a>0$,

$\therefore f'(x)>0$,

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

$\because f(1)=0$,

故 $f(x)$ 有 1 个零点;

【小问 3 详解】

由题 $f(x)=a\ln x+xe^x-e,(x>0)$,

$\therefore f'(x)=\dfrac{a}{x}+(x+1)e^x=\dfrac{a+x(x+1)e^x}{x},(x>0)$

令 $h(x)=a+x(x+1)e^x$,

$\therefore h'(x)=(x^2+3x+1)e^x$,

$\because x>0$,

$\therefore h'(x)>0$,

即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

$\because h(0)=a<0$,

且 $h(|a|)=a+|a|(|a|+1)e^{|a|}$

$=|a|(|a|+1)e^{|a|}-|a|$

$=|a|\left(\left(|a|+1\right)\mathrm{e}^{|a|}-1\right)>0$,

故$\exists x_0>0$,使得$h\left(x_0\right)=0$,

即$h\left(x_0\right)=a+x_0\left(x_0+1\right)\mathrm{e}^{x_0}=0$,

$\because h\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增,

$\therefore x\in\left(0,x_0\right),h\left(x_0\right)<0$,

即$f'\left(x\right)<0$, $f\left(x\right)$单调递减,

$x\in\left(x_0,+\infty\right),h\left(x_0\right)>0$,

即$f'\left(x\right)>0$, $f\left(x\right)$单调递增,

故$f\left(x\right)_{\min}=f\left(x_0\right)$,

若$f\left(x\right)\geq m$恒成立,

只需$f\left(x\right)_{\min}\geq m$,

即$f\left(x_0\right)\geq m$即可,

故存在实数m, 使$f\left(x\right)\geq m$恒成立.

【点睛】方法点睛:此题考查导数的综合应用,属于难题,应用了隐零点,关于隐零点的方法有:

(1)对函数进行求导后,进行因式分解,写成几个因式的乘积;

(2)然后将容易判断正负的先进行判断,不好判断的令为一个新的函数;

(3)对新的函数进行求导求单调性;

(4)取区间内的点代入新函数中判断函数值正负,直到函数值相互异号为止;

(5)根新函数的单调性即可判断在区间内有零点,设为x_0,判断x_0左右两侧的新函数的函数值正负,即可判断原函数的单调性求出最值.

21.【答案】(1)1，2，1或3，1；

（2）7；　（3）511566.

【分析】(1)由题意可直接列举出数列Q；

(2)由题意可得$n\geq 4$，分$n=4$、$n=5$和$n\geq 6$分别求$S\left(Q\right)$的最小值即可得答案；

(3)由题意可得数列Q为$2,2,\cdots,2,1,1\cdots,1$的形式，设其中有x项为 2，有y项为 1，则有$2x+y=2023$，所以$T\left(Q\right)=-2x^2+2023x$，再利用二次函数的性质求$T\left(Q\right)$的最大值即可.

【小问 1 详解】

解：当$T\left(Q\right)=1$时，存在一组(i,j)，满足$a_i>a_j,1\leq i<j\leq n$，

又因为$a_1,a_2,\cdots,a_n$的各项均为正整数，且$S\left(Q\right)=a_1+a_2+\cdots+a_n=4$，

所以$a_n<4$，即$a_n\leq 3$，且$i\geq 1,j\geq 2$，

当 $i=1, j=2$ 时，满足条件的数列 Q 只能是：3,1；

当 $i=1, j=3$ 时，满足条件的数列 Q 不存在；

当 $i=1, j>3$ 时，满足条件的数列 Q 不存在；

当 $i=2, j=3$ 时，满足条件的数列 Q 只有 1，2，1；

当 $i=2, j>3$ 时，满足条件的数列 Q 不存在；

所以数列 Q： 1，2，1 或 3,1；

【小问 2 详解】

解：由题意可知 $C_n^2 \geq 6$，所以 $n \geq 4$，

①当 $n=4$ 时，应有数列中各项均不相同，此时有 $S(Q) \geq 1+2+3+4=10$；

②当 $n=5$ 时，由于数列中各项必有不同的数，进而有 $S(Q) \geq 6$.

若 $S(Q)=6$，满足上述要求的数列中有四项为 1，一项为 2，此时 $T(Q) \leq 4$，不符合，

所以 $S(Q) \geq 7$；

③当 $n \geq 6$ 时，同②可得 $S(Q)>7$；

综上所述，有 $S(Q) \geq 7$，同时当 Q 为 2，2，1，1，1 时，$S(Q)=7$，

所以 $S(Q)$ 的最小值为 7；

【小问 3 详解】

解：①存在大于 1 的项，否则此时有 $T(Q)=0$；

② $a_n=1$,否则将 a_n 拆分成 a_n 个 1 后 $T(Q)$ 变大；

③当 $t=1,2,\cdots,n-1$ 时，有 $a_t \geq a_{t+1}$，否则交换 a_t, a_{t+1} 顺序后 $T(Q)$ 变为 $T(Q)+1$，进一步有

$a_t - a_{t+1} \in \{0,1\}$，

否则有 $a_t \geq a_{t+1}+2$，此时将 a_t 改为 a_t-1，并在数列末尾添加一项 1，此时 $T(Q)$ 变大；

④各项只能为 2 或 1，否则由①②③可得数列 Q 中有存在相邻的两项 $a_t=3, a_{t+1}=2$，设此时 Q 中有 x 项为 2，则将 a_t 改为 2，并在数列末尾添加一项 1 后，$T(Q)$ 的值至少变为 $T(Q)+x+1-x=T(Q)+1$；

⑤由上可得数列 Q 为 $2,2,\cdots,2,1,1\cdots,1$ 的形式，设其中有 x 项为 2，有 y 项为 1，则有 $2x+y=2023$，

从而有 $T(Q)=xy=(2023-2x)x=-2x^2+2023x$，

由二次函数的性质可得，当且仅当 $\begin{cases} x=506 \\ y=1011 \end{cases}$ 时，$T(Q)$ 最大，为 511566.

【点睛】关键点睛：本题考查了有穷数列的前 n 项和及满足集合 $\left\{(i,j) \mid a_i > a_j, 1 \leq i < j \leq n\right\}$ 中元素的个数，属于难点，在解答每一小问时，要紧扣 Q 还是一个正整数数列，进行逻辑推理，从而得出结论.