

北京市第十三中学 2023—2024 年度第一学期

高一数学期中测试

2023 年 11 月

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，第I卷第1页至第2页；第II卷第3页至第5页，答题纸第1页至第3页，共150分，考试时间120分钟。请在答题纸规定处书写班级、姓名、准考证号。考试结束后，将本试卷的答题纸按页码顺序一并交回。

第I卷（选择题共40分）

一、选择题（共10小题，每题4分，满分40分）

1. 设 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$
A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | x < 0\}$ D. $\{x | x > 1\}$
2. 若 $a > b$, 则一定有
A. $a^3 > b^3$ B. $|a| > |b|$ C. $\sqrt{a^2} > \sqrt{b^2}$ D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
3. 函数 $f(x) = \frac{3}{x} - x^2$ 零点所在的一个区间是
A. $(-2, -1)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, +\infty)$
4. 函数 $y = x + \frac{1}{2x} (x > 0)$ 的最小值为
A. 2 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是
A. $f(x) = |x| + 2$ B. $f(x) = 3^{-x}$
C. $f(x) = \sqrt{x}$ D. $f(x) = -x^2 + 1$
6. 命题 $p: \frac{1}{x-1} > 1$ $q: |2x-1| < 3$, 则 p 是 q 的 _____ 条件
A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

7. 已知命题“ $\exists x \in R$, 使得 $ax^2 - 2ax + 3 \leq 0$ ”是假命题, 则实数 a 的取值范围是

- A. $0 \leq a \leq 3$ B. $0 < a < 3$ C. $0 < a \leq 3$ D. $0 \leq a < 3$

8. 设集合 $A = \{x \mid |x - a| = 1\}$, $B = \{1, -3, b\}$, 若 $A \subseteq B$, 则对应的实数对 (a, b) 有

- A. 1 对 B. 2 对 C. 3 对 D. 4 对

9. 设常数 $a \in R$, 集合 $A = \{x \mid (x - 1)(x - a) \geq 0\}$, $B = \{x \mid x \geq a - 1\}$, 若 $A \cup B = R$, 则

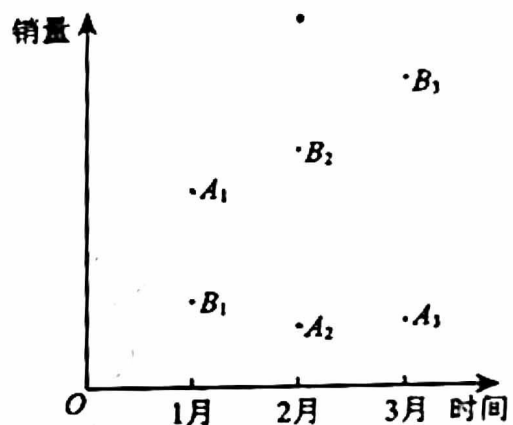
a 的取值范围为

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

10. 如图为某商铺 A, B 两种商品在 2023 年前 3 个月的销售情况统计图, 已知 A 商品卖出一件盈利 20 元, B 商品卖出一件盈利 10 元. 图中点 A_1, A_2, A_3 的纵坐标分别表示 A 商品 2023 年前 3 个月的销售量, 点 B_1, B_2, B_3 的纵坐标分别表示 B 商品 2023 年前 3 个月的销售量. 根据图中信息, 下列四个结论中正确的是

- ① 2 月 A, B 两种商品的总销售量最多;
 ② 3 月 A, B 两种商品的总销售量最多;
 ③ 1 月 A, B 两种商品的总利润最多;
 ④ 2 月 A, B 两种商品的总利润最多.

- A. ①③ B. ①④
 C. ②③ D. ②④



第II卷 (共 110 分)

二、填空题 (共 8 小题, 每小题 5 分, 满分 40 分)

11. 函数 $f(x) = \sqrt{1-2^x}$ 的定义域是_____.

12. 方程组 $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+x=2 \end{cases}$ 的解集是_____.

13. 若函数 $f(x+1) = x^2$, 则 $f(3) =$ _____.

14. 已知不等式 $ax^2 - 5x + b > 0$ 的解集为 $\{x | -3 < x < 2\}$, 则不等式 $bx^2 - 5x + a > 0$ 的解集为_____.

15. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数, 若 $f(-2) = 0$, 则 $f(x) < 0$ 的解集为_____.

16. 设关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + a \leq 0$ 的解集为 S .

(1) 若 S 中有且只有一个元素, 则 a 的值为_____;

(2) 若 $0 \in S$ 且 $-1 \notin S$, 则 a 的取值范围是_____.

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & -2 \leq x \leq c, \\ \frac{1}{x}, & c < x \leq 3 \end{cases}$ 若 $c = 0$, 则 $f(x)$ 的值域是_____;

若 $f(x)$ 的值域是 $[-\frac{1}{4}, 2]$, 则实数 c 的取值范围是_____.

18. 某厂商为推销自己品牌的可乐, 承诺在促销期内, 可以用 3 个该品牌的可乐空罐换 1

罐可乐. 对于此促销活动, 有以下三个说法:

① 如果购买 10 罐可乐, 那么实际最多可以饮 13 罐可乐;

② 欲饮用 100 罐可乐, 至少需要购买 67 罐可乐;

③ 如果购买 $n (n \in \mathbb{N}^+)$ 罐可乐, 那么实际最多可饮用可乐的罐数

$$f(n) = n + \left[\frac{n-1}{2} \right]. \quad (\text{其中 } [x] \text{ 表示不大于 } x \text{ 的最大整数})$$

则所有正确说法的序号是_____.

0000000 000

三、解答题（本大题共 6 小题，满分 70 分，解答请写出证明过程和演算步骤）

19.（本小题满分 10 分）

已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，试比较 $a^3 - b^3$ 与 $ab^2 - a^2b$ 的大小，并证明。

20.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ 。

(I) 证明： $f(x)$ 是奇函数；

(II) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的单调性，并用函数单调性的定义加以证明。

21.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x) = ax^2 + x$ 定义在区间 $[0, 2]$ 上，其中 $a \in [-2, 0]$ 。

(I) 若 $a = -1$ ，求 $f(x)$ 的最小值；

(II) 求 $f(x)$ 的最大值。

22.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x) = ax^2 - 2ax - 3$ 。

(I) 若 $a = 1$ ，求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集；

(II) 已知 $a > 0$ ，且 $f(x) \geq 0$ 在 $[3, +\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

(III) 若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 有两个不相等的正实数根 x_1, x_2 ，求 $x_1^2 + x_2^2$ 的取值范围。

23. (本小题满分 11 分)

经销商经销某种农产品, 在一个销售季度内, 每售出 1 吨该产品获利润 500 元, 未售出的产品, 每 1 吨亏损 300 元. 经销商为下一个销售季度购进了 130 吨该农产品. 以 x (单位: 吨, $100 \leq x \leq 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量, y (单位: 元) 表示下一个销售季度内销售该农产品的利润.

(I) 将 y 表示为 x 的函数;

(II) 求出下一个销售季度利润 y 不少于 57000 元时, 市场需求量 x 的范围.

24. (本小题满分 13 分)

已知集合 P 的元素个数为 $3n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 且元素均为正整数, 若能够将集合 P 分成元素个数相同且两两没有公共元素的三个集合 A, B, C , 即 $P = A \cup B \cup C$,

$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$, 其中 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$,

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, 且满足 $c_1 < c_2 < \dots < c_n, a_k + b_k = c_k, k = 1, 2, \dots, n$, 则称集合 P 为“完美集合”.

(I) 若集合 $P = \{1, 2, 3\}, Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 判断集合 P 和集合 Q 是否为“完美集合”? 并说明理由.

(II) 已知集合 $P = \{1, x, 3, 4, 5, 6\}$ 为“完美集合”, 求正整数 x 的值;

(III) 设集合 $P = \{x \mid 1 \leq x \leq 3n, n \in \mathbb{N}^*\}$, 证明: 集合 P 为“完美集合”的一个必要条件是 $n = 4k$ 或 $n = 4k + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).