

北京市铁路第二中学 2023—2024 学年第一学期

高一数学期中考试试卷

(试卷满分 150 分 考试时长 120 分钟)

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = \{x | -3 < x < 3\}$ , 那么  $A \cap B =$

- (A)  $\{-1, 1\}$  (B)  $\{-2, 0\}$  (C)  $\{-2, 0, 2\}$  (D)  $\{-2, -1, 0, 1\}$

2. 方程组  $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$  的解集是

- (A)  $\{(1, -1), (-1, 1)\}$  (B)  $\{(1, 1), (-1, -1)\}$   
(C)  $\{(2, -2), (-2, 2)\}$  (D)  $\{(2, 2), (-2, -2)\}$

3. 若  $a > b > 0$ ,  $c < d < 0$ , 则一定有

- (A)  $ac < bd$  (B)  $ac > bd$  (C) ; (D)  $ad > bc$

4. 函数  $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$  的定义域是

- (A)  $[0, 1)$  (B)  $(1, +\infty)$  (C)  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$  (D)  $[0, 1) \cup (1, +\infty)$

5. 下列函数中, 既是奇函数又是增函数的为

- (A)  $y = x + 1$  (B)  $y = -x^3$  (C)  $y = \frac{1}{x}$  (D)  $y = x|x|$

6. 设  $f(x) = 3^x + 3x - 8$ , 用二分法求方程  $3^x + 3x - 8 = 0$  在  $x \in (1, 2)$  内近似解的过程中得  $f(1) < 0$ ,  $f(1.5) > 0$ ,  $f(1.25) < 0$ , 则下列必有方程的根的区间为

- (A)  $(1.5, 2)$  (B)  $(1, 1.25)$  (C)  $(1.25, 1.5)$  (D) 不能确定

7. 设  $f(x)$  是奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  内是减函数, 又  $f(-3) = 0$ , 则  $x \cdot f(x) < 0$  的解集是

- (A)  $\{x | -3 < x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$       (B)  $\{x | x < -3 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$   
 (C)  $\{x | -3 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$       (D)  $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 3\}$

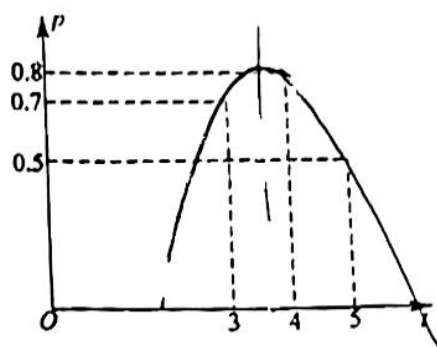
8.  $a < 0$  是函数  $f(x) = ax^2 + 2x + 1 = 0$  至少有一个负零点的

- (A) 充分而不必要条件      (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充分必要条件      (D) 既不充分也不必要条件

9. 加工爆米花时，爆开且不糊的粒数的百分比称为“可食用率”。在特定条件下，可食用率  $p$  与加工时间  $t$  (单位：分钟) 满足的函数关系  $p = at^2 + bt + c$  ( $a, b, c$  是常数)，

下图记录了三次实验的数据。根据上述函数模型和实验数据，可以得到最佳加工时间为

- A. 3.50 分钟  
 B. 3.75 分钟  
 C. 4.00 分钟  
 D. 4.25 分钟



10. 设  $f(x)$  为定义在  $\mathbb{R}$  上的函数，函数  $f(x+1)$  是奇函数。对于下列四个结论：

- ①  $f(1) = 0$ ;  
 ②  $f(1-x) = -f(1+x)$ ;  
 ③ 函数  $f(x)$  的图像关于原点对称;  
 ④ 函数  $f(x)$  的图像关于点  $(1, 0)$  对称;

其中，正确结论的个数为

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。

11. 命题“ $\forall x > 0, 2^x > 0$ ”的否定是\_\_\_\_\_。

12. 已知方程  $x^2 - 4x + 1 = 0$  的两根为  $x_1$  和  $x_2$ , 则  $x_1^2 + x_2^2 = \dots$ .

13. 若函数  $f(x) = x^2 + (b-1)x - 2$  是偶函数, 则  $f(b)$  与  $f(-2)$  的大小关系为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ , 当  $x \in [0, 3]$  时,  $f(x)$  的值域是\_\_\_\_\_; 若  $f(x)$  的值域是  $[2, 11]$ , 则  $f(x)$  的定义域为\_\_\_\_\_. (写出满足条件的一个结论)

15. 已知  $f(x) = x^2 - 2ax + 2$ , 当  $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$  时,  $f(x) \geq a$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 已知  $\lambda \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq \lambda \\ x^2 - 4x + 3, & x < \lambda \end{cases}$ , 当  $\lambda = 2$  时, 不等式  $f(x) < 0$  的解集是\_\_\_\_\_. 若函数  $f(x)$  恰有 2 个零点, 则  $\lambda$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题, 共 86 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. (本小题 13 分)

已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x \mid \frac{x-3}{x+2} > 0\}$ ,  $B = \{x \mid |2x+3| \leq 5\}$ .

(I) 求  $A \cap B$ ;

(II) 求  $(\complement_U A) \cup B$ .

18. (本小题 15 分)

设函数  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ .

(I) 判断函数  $f(x)$  奇偶性并证明;

(II) 用单调性定义证明: 函数  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上单调递增.

19. (本小题 13 分)

某工厂新建员工宿舍, 若建造宿舍的所有费用  $P$  (万元) 和宿舍与工厂的距离  $x$  km 的关系为  $P = \frac{k}{3x+2}$  ( $0 \leq x \leq 5$ ), 若距离为 1 km 时, 测算宿舍建造费用为 40 万元. 为了交通方便, 工厂和宿舍之间还要修一条道路, 已知铺设路面成本为 6 万元/km, 设  $y$  为建造宿舍与修路费用之和.

(1) 求  $k$  的值.

(2) 求  $y$  关于  $x$  的表达式.

(3) 宿舍应建在离工厂多远处, 可使总费用  $y$  最小, 并求最小值.

20. (本小题 15 分)

设  $a \in \mathbf{R}$ , 解关于  $x$  的不等式:  $ax^2 - (2a+1)x + 2 > 0$ .

21. (本小题 15 分)

设  $f(x) = x^2 - ax + 3$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

(I) 当  $a=1$  时, 求函数  $f(x)$  的图像与直线  $y=3x$  交点的坐标;

(II) 若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上不具有单调性, 求  $a$  的取值范围;

(III) 当  $x \in [-2, 2]$  时, 求函数  $f(x)$  的最小值.

22. (本小题 15 分)

设  $A$  是实数集的非空子集, 称集合  $B = \{uv \mid u, v \in A, \text{且 } u \neq v\}$  为集合  $A$  的生成集.

(I) 当  $A = \{2, 3, 5\}$  时, 写出集合  $A$  的生成集  $B$ ;

(II) 若  $A$  是由 5 个正实数构成的集合, 求其生成集  $B$  中元素个数的最小值;

(III) 判断是否存在 4 个正实数构成的集合  $A$ , 使其生成集  $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$ .

说明理由.