# 2022 北京东城初三（上）期末

# 数　　学

2022.1

**一、选择题（每题 2 分，共 16 分）**

1．一元二次方程 $2x^2+x-5=0$ 的二次项系数、一次项系数、常数项分别是（　）

A．2，1，5　　B．2，1，$-5$　　C．2，0，$-5$　　D．2，0，5

2．下列四个图形中，为中心对称图形的是（　　）

A　　B　　C　　D

3．将抛物线 $y=x^2$ 向上平移 3 个单位长度得到的抛物线是（　）

A．$y=x^2+3$　B. $y=x^2-3$　C. $y=(x+3)^2$　D. $y=(x\text{-}3)^2$

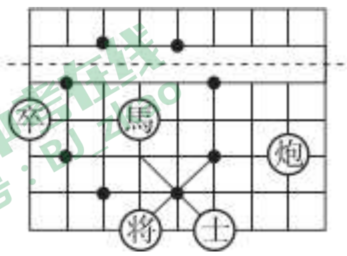
4．在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点 $A$（2，3）关于原点对称的点的坐标是（　）

A．（2，$-3$）　B．（$-2$，3）　C．（3，2）　D．（$-2$，$-3$）

5．用配方法解方程 $x^2+4x=1$，变形后结果正确的是（　）

A．$(x+2)^2=5$　B．$(x+2)^2=2$　C．$(x-2)^2=5$　D．$(x-2)^2=2$

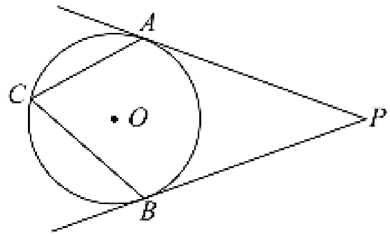
6．中国象棋文化历史久远．在图中所示的部分棋盘中，“馬”的位置在“-----”（图中虚线）的下方，“馬”移动一次能够到达的所有位置已用“●”标记，则“馬”随机移动一次，到达的位置在“-----”上方的概率是（　）




A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{6}$

C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

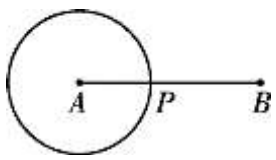
7．如图，PA，PB 是⊙O 的切线，A，B 是切点，点 C 为⊙O 上一点，若∠ACB＝70°，则∠P 的度数为




A．70°　　B．50°

C．20°　　D．40°

8．如图，线段 AB＝5，动点 P 以每秒 1 个单位长度的速度从点 A 出发，沿线段 AB 运动至点 B，以点 A 为圆心，线段 AP 长为半径作圆．设点 P 的运动时间为 $t$，点 $P$，$B$ 之间的距离为 $y$，⊙A 的面积为 $S$，则 $y$ 与 $t$，$S$ 与 $t$ 满足的函数关系分别是




A．正比例函数关系，一次函数关系

B．一次函数关系，正比例函数关系

C．一次函数关系，　二次函数关系

D．正比例函数关系，二次函数关系

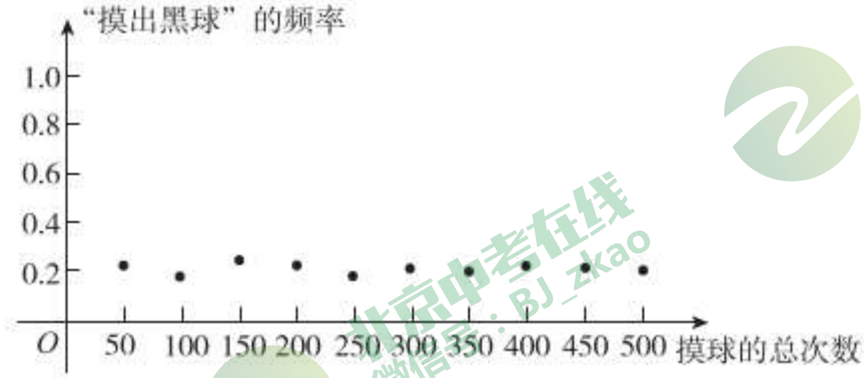
**二、填空题 (每题 2 分，共 16 分）**

9．抛物线 $y=-3(x-1)^2+2$ 的顶点坐标是______________.

10．若关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 有一个根为 1，则 $m$ 的值为_______.

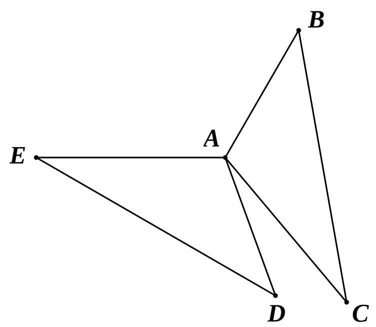
11．写出一个开口向上，并且与 y 轴交于点（0，2）的抛物线的解析式______________.

12．社团课上，同学们进行了“摸球游戏”：在一个不透明的盒子里，装有 20 个除颜色不同外其余均相同的黑、白两种球，将盒子里面的球搅匀后，从中随机摸出一个球记下颜色，再把它放回盒子中，不断重复上述过程．整理数据后，制作了“摸出黑球的频率”与“摸球的总次数”的关系图象，如图所示，经分析可以推断“摸出黑球”的概率约为_______.



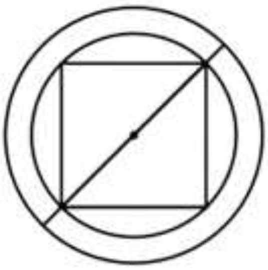

13．2021 年是中国共产党建党 100 周年，全国各地积极开展“弘扬红色文化，重走长征路”主题教育活动．据了解，某展览中心 3 月份的参观人数为 10 万人，5 月份的参观人数增加到 12.1 万人．设参观人数的月平均增长率为 $x$，则可列方程为________.

14．如图，将△$ABC$ 绕点 $A$ 顺时针旋转得到△$ADE$，若∠$DAE$=110°，∠$B$=40°，则∠$C$ 的度数为____.

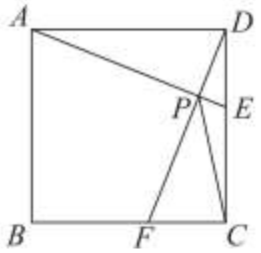



15. 斛是中国古代的一种量器.据《汉书.律历志》记载：“斛底，方而圜（huán）其外，旁有庣（tiāo）焉”．意思是说：“斛的底面为：正方形外接一个圆，此圆外是一个同心圆”. 如图所示，

问题：现有一斛，其底面的外圆直径为两尺五寸（即 2.5 尺），“庣旁”为两寸五分（即两同心圆的外圆与内圆的半径之差为 0.25 尺），则此斛底面的正方形的边长为________尺.



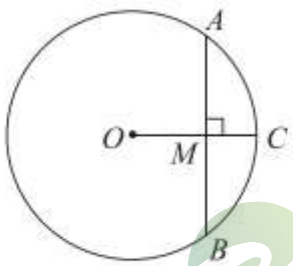
16．如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，$E$，$F$ 分别是边 $DC$，$CB$ 上的动点，且始终满足 $DE=CF$，$AE$，$DF$ 交于点 $P$，则∠$APD$ 的度数为______；连接 $CP$，线段 $CP$ 长的最小值为_______.




三、解答题（共 68 分，17-22 题，每题 5 分，23-26 题，每题 6 分，27-28 题，每题 7 分）

17．解方程：$x^2-2x-8=0$

18．如图，$AB$ 为⊙$O$ 的弦，$OC$⊥$AB$ 于点 $M$，交⊙$O$ 于点 $C$．若⊙$O$ 的半径为 10，$OM$：$MC$＝3:2，求 $AB$ 的长.




19．下面是小明设计的“作圆的内接等腰直角三角形”的尺规作图过程.

已知：⊙$O$.

求作：⊙$O$ 的内接等腰直角三角形 ABC.

作法：如图，

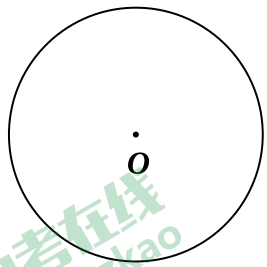
①作直径 AB；

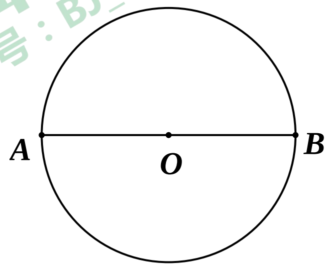
②分别以点 $A$, $B$ 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧交于 $M$ 点；

③作直线 $MO$ 交⊙$O$ 于点 $C$，$D$;

④连接 $AC$，$BC$.

所以△$ABC$ 就是所求的等腰直角三角形.




**根据小明设计的尺规作图过程，解决下面的问题：**

（1）使用直尺和圆规，补全图形；（保留作图痕迹）

（2）完成下面的证明.

证明：连接 $MA$，$MB$.

∵$MA=MB$，$OA=OB$，

∴$MO$ 是 $AB$ 的垂直平分线.

∴$AC$=_____________.

∵$AB$ 是直径,

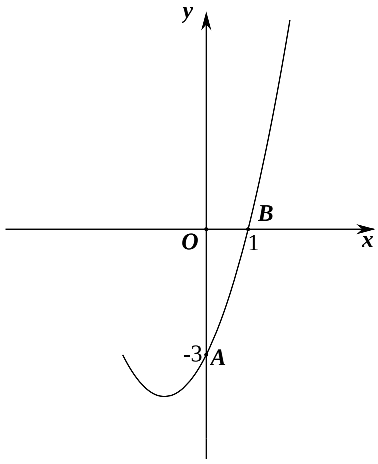
∴∠$ACB$=_______(______________) (填写推理依据) .

∴△$ABC$ 是等腰直角三角形.

20．如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 的部分图象经过点 $A(0，-3)$，$B(1，0)$．

(1)求该抛物线的解析式；

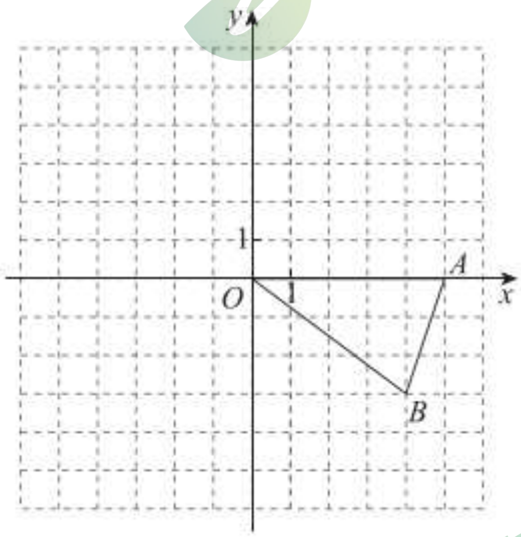
(2)结合函数图象，直接写出 $y<0$ 时，$x$ 的取值范围．




21．如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，△$OAB$ 的顶点坐标分别为 $O$（0，0），$A$（5，0），$B$（4，$-3$），将△$OAB$ 绕点 $O$ 顺时针旋转 90°得到△$OA'B'$，点 $A$ 旋转后的对应点为 $A'$．

（1）画出旋转后的图形△$OA'B'$，并写出点 $A'$ 的坐标；

（2）求点 $B$ 经过的路径 $\overset{\frown}{BB'}$ 的长（结果保留 $\pi$）．




22．2021 年 6 月 17 日，神舟十二号成功发射，标志着我国载人航天踏上新征程．某学校举办航天知识讲座，需要两名引导员，决定从 A，B，C，D 四名志愿者中，通过抽签的方式确定两人．抽签规则：将四名志愿者的名字分别写在四张完全相同且不透明卡片的正面，把四张卡片背面朝上，洗匀后放在桌面上，先从中随机抽取一张卡片，记下名字，再从剩余的三张卡片中随机抽取第二张，记下名字．

（1）“A 志愿者被选中”是______ 事件（填“随机”或“不可能”或“必然”）；

（2）用画树状图或列表的方法求出 A，B 两名志愿者同时被选中的概率．

23．已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-(k+4)x+4k=0$．

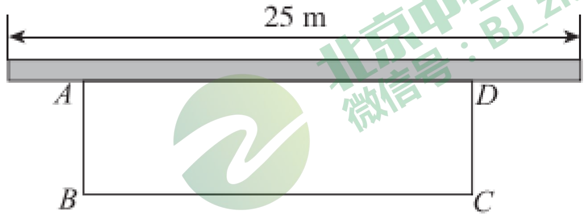
（1）求证：该方程总有两个实数根；

（2）若该方程有一个根小于 2，求 $k$ 的取值范围．

24．为了改善小区环境，某小区决定在一块一边靠墙(墙长 25m)的空地上修建一个矩形小花园 *ABCD*，小花园一边靠墙，另三边用总长 40m 的栅栏围住，如下图所示.若设矩形小花园 *AB* 边的长为 $x$ m，面积为 $y$m$^2$.

（1）求 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式;

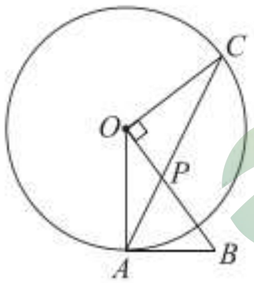
（2）当 $x$ 为何值时，小花园的面积最大？最大面积是多少？




25．如图，AC 是⊙O 的弦，过点 O 作 OP⊥OC 交 AC 于点 P，在 OP 的延长线上取点 B，使得 BA＝BP.

（1）求证：AB 是⊙O 的切线;

（2）若⊙O 的半径为 4，PC＝$2\sqrt{5}$，求线段 AB 的长.



26．在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点（1，$m$）和（2，$n$）在抛物线 $y=-x^2+bx$ 上．

（1）若 $m$＝0，求该抛物线的对称轴；

（2）若 $mn$＜0，设抛物线的对称轴为直线 $x=t$，

①直接写出 $t$ 的取值范围；

②已知点（－1，$y_1$），（$\frac{3}{2}$，$y_2$），（3，$y_3$）在该抛物线上．比较 $y_1$，$y_2$，$y_3$ 的大小，并说明理由．

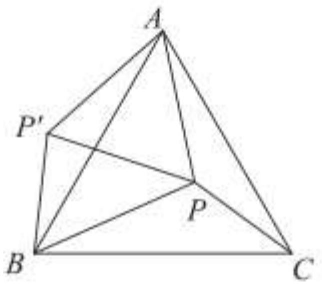
27．如图，在等边三角形 $ABC$ 中，点 $P$ 为△$ABC$ 内一点，连接 $AP$，BP，CP，将线段 $AP$ 绕点 $A$ 顺时针旋转 60°得到 $AP'$，连接 $PP'$，$BP'$．

（1）用等式表示 $BP'$ 与 $CP$ 的数量关系，并证明；

（2）当∠$BPC$＝120°时，

①直接写出∠$P'BP$ 的度数为____；

②若 $M$ 为 $BC$ 的中点，连接 $PM$，请用等式表示 $PM$ 与 $AP$ 的数量关系，并证明．



28．在平面直角坐标系 $xOy$ 中，⊙$O$ 的半径为 1，对于直线 $l$ 和线段 $AB$，给出如下定义：若将线段 $AB$ 关于直线 $l$ 对称，可以得到⊙$O$ 的弦 $A'B'$（$A'$，$B'$ 分别为 $A$，$B$ 的对应点），则称线段 $AB$ 是⊙$O$ 的关于直线 $l$ 对称的“关联线段”．例如：在图 1 中，线段 $AB$ 是⊙$O$ 的关于直线 $l$ 对称的“关联线段”．

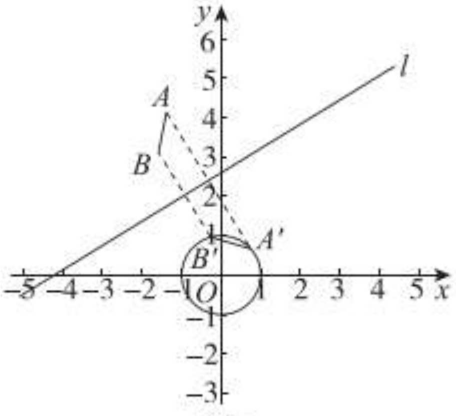


图 1

（1）如图 2，$A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ 的横、纵坐标都是整数．

①在线段 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$ 中，⊙$O$ 的关于直线 $y=x+2$ 对称的“关联线段”是_______；

②若线段 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$ 中，存在⊙$O$ 的关于直线 $y=-x+m$ 对称的“关联线段”，则 $m=$_______；

（2）已知直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+b(b>0)$ 交 $x$ 轴于点 $C$，在△$ABC$ 中，$AC=3$，$AB=1$，若线段 $AB$ 是⊙$O$ 的关于直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+b(b>0)$ 对称的“关联线段”，直接写出 $b$ 的最大值和最小值，以及相应的 $BC$ 长．

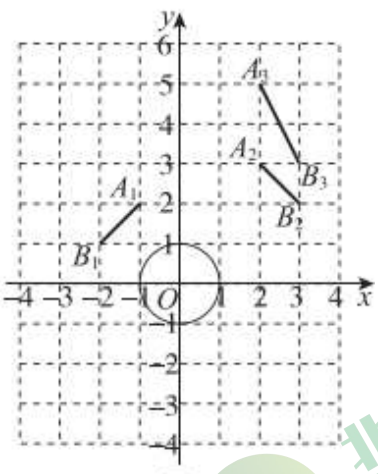


图 2

# 2022 北京东城初三（上）期末数学

## 参考答案

一、选择题（每题 2 分，共 16 分）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 答案 | B | B | A | D | A | C | D | C |

二、填空题(每题 2 分，共 16 分）

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 答案 | （1,2） | 1 | 答案不唯一<br>如：<br>$y=x^2+2$ | 0.2 | $10(1+x)^2=12.1$ | 30° | $\sqrt{2}$ | $90^\circ$,$\sqrt{5}-1$ |

三、解答题（共 68 分，17-22 题，每题 5 分，23-26 题，每题 6 分，27-28 题，每题 7 分)

17．解方程： $x^2-2x-8=0$ ．

解：移项，得 $x^2-2x=8$ . …………………1 分

配方，得 $(x-1)^2=9$ . …………………3 分

$\therefore x_1=4$ ， $x_2=-2$ …………………5 分

18．解：如图，连接 $OA$.

$\because OM:MC=3:2$，$OC=10$，

$\therefore OM=6$． ………………..2 分

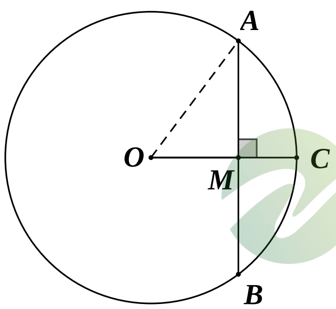
$\because OC\perp AB$，

$\therefore \angle OMA=90°$，$AB=2AM$.

在 Rt△$AOM$ 中，$AO=10$，$OM=6$，

$\therefore AM=8$． ………………..4 分

$\therefore AB=16$． ………………..5 分




19． （1）图略……2 分

（2）$BC$，90°，直径所对的圆周角是直角．……5 分

20．解：(1)抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 经过点 $A(0，-3)$，$B(1，0)$.

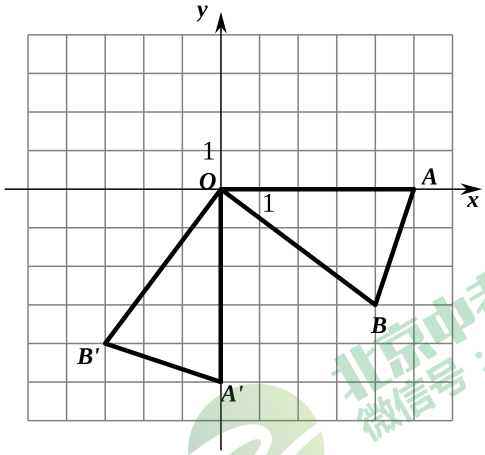
则 $\begin{cases} -3=c, \\ 0=a+2+c. \end{cases}$ ………………..2 分

解这个方程组，得 $\begin{cases} a=1, \\ c=-3. \end{cases}$

所求抛物线的解析式是 $y=x^2+2x-3$． ………………..3 分

(2) $-3<x<1$． ………………..5 分

21．解：（1）如图，△$OA'B'$即为所求．



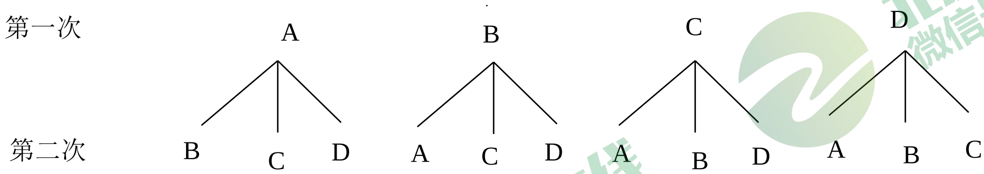

点 $A'$ 的坐标为 $(0,-5)$ ………………..3 分

（2）由题意可求，$OB$=5………………..4 分

$\therefore l_{BB'}=\dfrac{90\pi\times5}{180}=\dfrac{5}{2}\pi$……5分

22．(1)随机……1 分

(2)



…………3 分

由上述树状图可知：所有可能出现的结果共有 12 种,并且每一个结果出现的可能性相同．其中 $A$，$B$ 两名志愿者同时被选中的有 2 种．

∴$P$（$A$，$B$ 两名志愿者同时被选中）$=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$ …………5 分

23．解：(1)∵ $\Delta=[-(k+4)]^2-4\times4k=k^2-8k+16=(k-4)^2\ge0$， ………………..3 分

∴方程总有两个实数根．

(2)由求根公式，得

$x_1=4$，$x_2=k$

依题意可，得 $k<2$． …………6 分

24．（1）$y=x(40-2x)=-2x^2+40x$．（$7.5\le x<20$） ……………..3 分

(2)$\because y=-2(x-10)^2+200$，$(7.5\le x<20)$……………..5 分

$\therefore$当 $x=10$ 时，$y_{\max}=200$ ………………..6 分

答：当 $x$ 为 10m 时，小花园的面积最大，最大面积是 $200m^2$.

25．解：（1）证明：$\because BA=BP$，

$\therefore \angle BPA=\angle BAP$.

$\because OA=OC$，

$\therefore \angle OAC=\angle OCA$.

$\because OP\perp OC$，

$\therefore \angle COP=90°$.

$\therefore \angle OPC+\angle OCP=90°$.

$\because \angle APB=\angle OPC$，

$\therefore \angle BAP+\angle OAC=90°$.

即 $\angle OAB=90°$，

$\therefore OA\perp AB$.

$\because OA$ 为半径，

$\therefore AB$ 为⊙$O$ 的切线．……………..3 分

（2）解：在 Rt△$OPC$ 中，$OC=4$，$PC=2\sqrt{5}$，

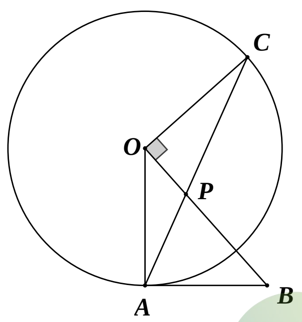
$\therefore OP=2$.

设 $AB=x$，则 $OB=x+2$.

在 Rt△$AOB$ 中，$x^2+4^2=(x+2)^2$，

$\therefore x=3$.

即 $AB=3$．……………..6 分




26．解：（1）$\because$点（1，$m$）在抛物线 $y=-x^2+bx$ 上，$m=0$，

$\therefore -1+b=0$.

$\therefore b=1$.

$\therefore$该抛物线的对称轴为 $x=\frac{1}{2}$．……………..2 分

（2）①$\frac{1}{2}<t<1$……………..4 分

② $y_3 < y_1 < y_2$ .

理由如下：

由题意可知，抛物线过原点.

设抛物线与 $x$ 轴另一交点的横坐标为 $x'$.

∵抛物线经过点(1，$m$)，(2，$n$)，$mn$＜0

∴1＜$x'$＜2.

∴ $\frac{1}{2} < t < 1$ .

设点（－1，$y_1$）关于抛物线的对称轴 $x = t$ 的对称点为 $(x_0, y_1)$ .

∵点（－1，$y_1$）在抛物线上，

∴点 $(x_0, y_1)$ 也在抛物线上.

由 $x_0 - t = t - (-1)$ 得 $x_0 = 2t + 1$ .

∵ $\frac{1}{2} < t < 1$，

∴1＜2t＜2.

∴2＜2t＋1＜3.

∴ $2 < x_0 < 3$ .

由题意可知，抛物线开口向下.

∴当 $x > t$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小.

∵点（$\frac{3}{2}$，$y_2$），$(x_0, y_1)$，（3，$y_3$）在抛物线上，且 $t < \frac{3}{2} < x_0 < 3$，

∴ $y_3 < y_1 < y_2$ ……………..6 分

27. （1）$BP'$ ＝$CP$.

证明：在等边三角形 $ABC$ 中，$AB$＝$AC$，∠$BAC$＝60°，

由旋转可知：$AP$＝$AP'$ ，∠$PAP'$ ＝60°，

∴∠$PAP'$ －∠$BAP$＝∠$BAC$－∠$BAP$

即∠$BAP'$ ＝∠$CAP$

在△$ABP'$ 和△$ACP$ 中

$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAP' = \angle CAP, \\ AP' = AP, \end{cases}$$

∴△$ABP'$ ≌△$ACP$（$SAS$）. ……………..3 分

∴$BP'$ ＝$CP$.

（2）①60°. ……………..4 分

②$PM$＝$\frac{1}{2}AP$ .

证明：如图，延长 $PM$ 到 $N$，使得 $NM$＝$PM$，连接 $BN$.

∵$M$ 为 $BC$ 的中点，

∴$BM=CM$.

在△$PCM$ 和△$NBM$ 中

$$\begin{cases} PM=NM, \\ \angle PMC=\angle NMB, \\ CM=BM, \end{cases}$$

∴△$PCM$≌△$NBM$（$SAS$）.

∴$CP=BN$，$\angle PCM=\angle NBM$.

∴$BN=BP'$ .

∵$\angle BPC=120°$，

∴$\angle PBC+\angle PCB=60°$.

∴$\angle PBC+\angle NBM=60°$.

即$\angle NBP=60°$.

∵$\angle ABC+\angle ACB=120°$，

∴$\angle ABP+\angle ACP=60°$.

∴$\angle ABP+\angle ABP'=60°$.

即$\angle P'BP=60°$.

∴$\angle P'BP=\angle NBP$.

在△$PNB$ 和△$PP'B$ 中

$$\begin{cases} BN=BP', \\ \angle NBP=\angle P'BP, \\ BP=BP, \end{cases}$$

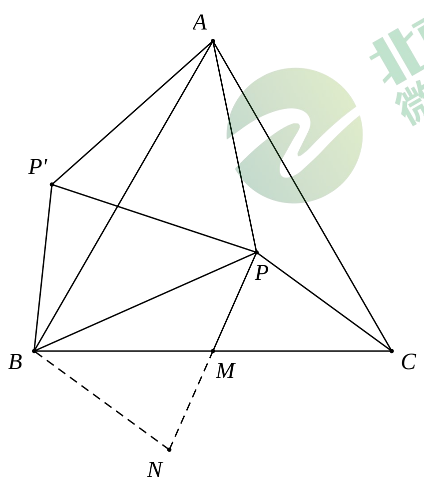
∴△$PNB$≌△$PP'B$（$SAS$）.

∴$PN=PP'$ .

∵△$PAP'$ 为等边三角形，

∴$P'P=AP$.

∴$PM=\frac{1}{2}AP$ . ……………..7 分



28．（1）①$A_1B_1$；……………..1 分

②2 或 3．……………..3 分

（2）$b$ 的最大值为$\frac{4}{3}\sqrt{3}$，此时 $BC=\sqrt{13}$；……………..5 分；

$b$ 的最大值为$\frac{2}{3}\sqrt{3}$，此时 $BC=\sqrt{7}$；……………..7 分；