2021平谷区一模

一、选择题（本大题共**10**小题，每小题**4**分，共**40**分；在每个小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

01．若集合 $A=\{x|-1\le x\le 2\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cap B$ 等于（　）

A．$\{x|1<x\le 2\}$　　B．$\{x|x>1\}$　　C．$\{x|x\ge -1\}$　　D．$\{x|-1\le x\le 2\}$

02．设复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$，则 z 等于（　）

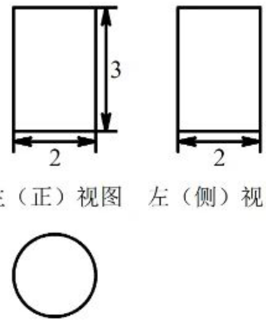
A．$-\mathrm{i}$　　B．i　　C．$-2\mathrm{i}$　　D．$2\mathrm{i}$

03．$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数是（　）

A．28　　B．56　　C．112　　D．256

04．一个几何体的三视图如图所示，该几何体的表面积是（　）

A．3π　　B．8π　　C．12π　　D．14π



主（正）视图　左（侧）视图

俯视图

05．设 P 是圆 $x^2+y^2-10x-6y+25=0$ 上的动点，Q 是直线 $x=-4$ 上的动点，则 $|PQ|$ 的最小值为（　）

A．6　　B．4　　C．3　　D．2

06．函数 $f(x)=\ln(x+1)$ 的图象与函数 $g(x)=x^2-4x+4$ 的图象的交点个数为（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

07．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$\varphi\in\mathbf{R}$），则"$f(x)$是偶函数"是"$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$"的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

08．已知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别是双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的两个焦点，双曲线 C_1 和圆 $C_2:x^2+y^2=c^2$ 的一个交点为 P，且 $\angle PF_2F_1=\dfrac{\pi}{3}$，那么双曲线 C_1 的离心率为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}+1$

09．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{2}{5}$，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{4a_n+2}{a_{n+1}+2}$，那么 a_4 为（　）

A．$\dfrac{1}{7}$　　B．7　　C．$\dfrac{1}{10}$　　D．10

10．某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 $5\,\mathrm{cm}$，秒针绕点 O 匀速旋转．当时间 $t=0$ 时，点 A 与钟面上标12点的点 B 重合．当 $t\in[0,60]$，A,B 两点的距离为 d（单位：cm），则 d 等于（　）

A．$5\sin\dfrac{t}{2}$　　B．$10\sin\dfrac{t}{2}$　　C．$5\sin\dfrac{\pi t}{30}$　　D．$10\sin\dfrac{\pi t}{60}$

二、填空题（本大题共**5**小题，每小题**5**分，共**25**分；请把答案填在答题卡中相应题中横线上）

11．函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\ln(x-1)$ 的定义域是____．

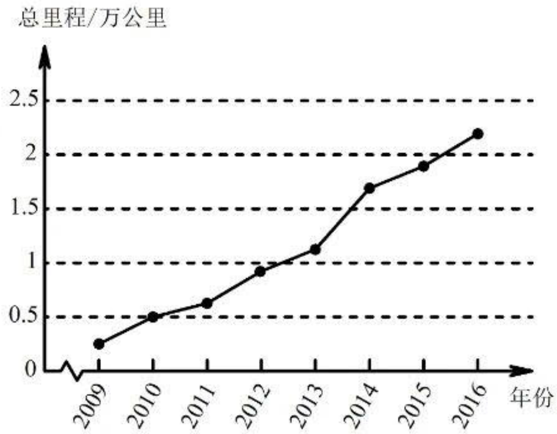
12．已知抛物线 $C:y^2=4x$ 上一点 M 到焦点的距离为3，那么点 M 到 y 轴的距离为____．

13．已知在直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=1$，$BC=2$，那么 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=$____；若 AM 是 BC 边

高，点 P 在 ΔABC 内部或边界上运动，那么 $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BP}$ 的最大值是____．

14．已知函数 $f(x)=\sin\omega x\,(\omega>0)$，在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，那么常数 ω 的一个取值为____．

15．从 2008 年京津城际铁路通车运营开始，高铁在过去几年里快速发展，并在国民经济和日常生活中扮演着日益重要的角色．下图是 2009 年至 2016 年高铁运营总里程数的折线图(图中的数据均是每年 12 月 31 日的统计结果)．根据上述信息，下列结论中正确的是



①2015 年这一年，高铁运营里程数超过 0.5 万公里；

②2013 年到 2016 年高铁运营里程平均增长率大于 2010 年到 2013 年高铁运营里程平均增长率；

③从 2010 年至 2016 年，新增高铁运营里程数最多的一年是 2014 年；

④从 2010 年至 2016 年，新增高铁运营里程数逐年递增；

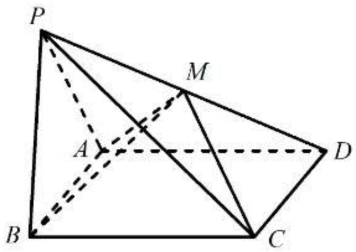
其中所有正确结论的序号是____．

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

16．（13 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，ΔPAB 为正三角形，且侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，$PM=MD$．

（Ⅰ）求证：PB // 平面 ACM；

（Ⅱ）求二面角 $M-BC-D$ 的余弦值．



17．（13 分）在锐角 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sqrt{3}c-2b\sin C=0$．

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）再从下面条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求 ΔABC 的面积．

条件①：$b=3\sqrt{3}$，$a=2$；

条件②：$a=2$，$A=\dfrac{\pi}{4}$．

18．（14 分）随着人民生活水平的提高，人们对牛奶品质要求越来越高．某牛奶企业针对生产的鲜奶和酸奶，在一地区进行了质量满意调查，现从消费者人群中随机抽取 500 人次作为样本，得到下表（单位：人次）

满意度	老年人		中年人		青年人	
	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶
满意	100	120	120	100	150	120
不满意	50	30	30	50	50	80

（Ⅰ）从样本中任意取 1 个人，求这个人恰好对生产的酸奶质量满意的概率；

（Ⅱ）从该地区的老年人中抽取 2 人，青年人中随机选取 1 人，估计这三人中恰好有 2 人对生产的鲜奶质量满意的概率；

（Ⅲ）依据表中三个年龄段的数据，你认为哪一个消费群体鲜奶的满意度提升 0.1，使得整体对鲜奶的满意度提升最大？（直接写出结果）

19．（15 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，并且经过 $P(0,\sqrt{3})$ 点．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过点 P 的直线与 x 轴交于点 N 点，与椭圆的另一个交点为 B，点 B 关于 x 轴的对称点为 B'，直线 PB' 交 x 轴于点 M，求证：$|OM|\cdot|ON|$ 为定值．

20．（15 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x+1}{\mathrm{e}^x}$．

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，过点 $P(-1,0)$ 可作几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切？请说明理由．

21．（15 分）已知数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n\ (0\le a_1<a_2<\cdots<a_n,n\ge 3)$ 具有性质 P：对任意 $i,j\ (1\le i\le j\le n)$，a_j+a_i 与 a_j-a_i 两数中至少有一个是该数列中的一项，S_n 为数列 A 的前 n 项和．

（Ⅰ）分别判断数列 0，1，3，5 与数列 0，2，4，6 是否具有性质 P；

（Ⅱ）证明：$a_1=0$，且 $S_n=\dfrac{na_n}{2}$；

（Ⅲ）证明：当 $n=4$ 时，a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等差数列．

平谷区 2020-2021 学年度第二学期质量监控

高三数学试卷参考答案

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 公众号：北京初高中数学

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	C	B	A	C	B	D	A	D

二. 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 25 分. 注：第 15 题第一空 3 分，第二空 2 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其它得 3 分.

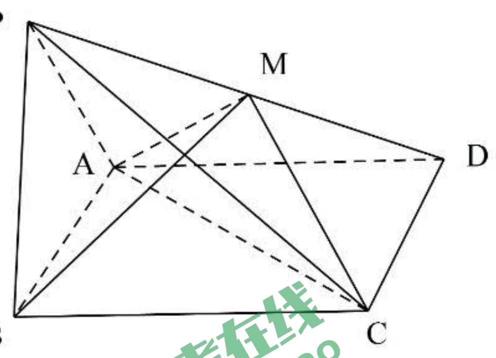
11. $\{x\,|\,1<x\le 3\}$；　　12. 2；　　13. −1；0.　　14. $(0,\frac{3}{4}]$中的一个值；

15. ②;③ .

三、解答题：（本大题共 **6** 小题，共 **80** 分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）.

16.（本小题满分 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，ΔPAB 为正三角形，且侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，$PM=MD$.



（I）求证：$PB\,//$ 平面 ACM；

（II）求二面角 $M-BC-D$ 的大小

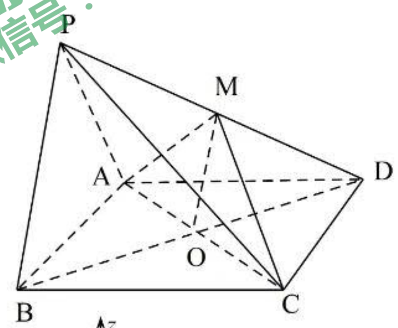
（Ⅰ）证明：连接 BD，与 AC 交于 O，在$\triangle PBD$中，

因为 O，M 分别为 BD，PD的中点，

所以 $BP//OM$.………… 4 分

因为 $BP\not\subset$平面 ADE，$OM\not\subset$ 平面 CAM，

所以 $BP//$ 平面 CAM. …………6分



(Ⅲ) 因为 $ABCD$ 是正方形，ΔPAB 为正三角形，E 是 AB 的中点，

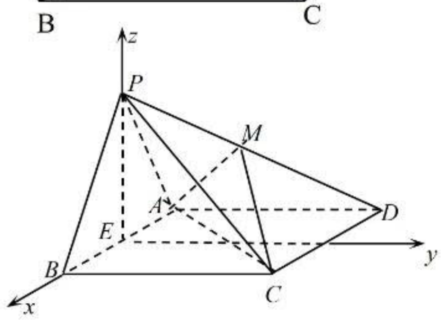
所以 $PE\perp AB$.又因为面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，

所以 $PE\perp$平面 $ABCD$…………8 分

过 E 作 EF 平行于 CB与 CD 交于 F.

以 E 为原点，分别以 EB,EF,EP 为 x,y,z 轴，

建立空间直角坐标系 $E-xyz$，…………9 分



则 $E(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，

$P(0,0,\sqrt{3})$，$C(1,2,0)$，$D(-1,2,0)$. $M\left(-\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ………10 分

所以$\overrightarrow{CM}=\left(-\dfrac{3}{2},-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，

设平面 CBM 的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CM}=-\dfrac{3}{2}x-y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2y=0\end{cases}，\ y=0,令x=1．则 z=\sqrt{3}$$

得 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{3})$． …………11 分

因为 $PE\perp$平面 $ABCD$，

所以平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ………… 12 分

所以二面角 $M-BC-D$ 的大小为 30^0 ………… 13 分

17.（本小题满分 13 分）

在锐角△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sqrt{3}c-2b\sin C=0$．

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）再从下面条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：△ABC 的面积．

① $b=3\sqrt{3},a=2$．

② $a=2$，$A=\dfrac{\pi}{4}$，

解（Ⅰ）因为 $\sqrt{3}c-2b\sin C=0$，由正弦定理 $\sqrt{3}\sin C-2\sin B\sin C=0$ …………5 分

所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …………． 7 分

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ …………． 8 分

（Ⅱ）**解法一**：因为 $b=3\sqrt{3},a=2$．

根据余弦定理得 $b^2=c^2+a^2-2c\cdot a\cdot\cos B$， ………………9 分

化简为 $c^2-2c-23=0$，解得 $c=1+2\sqrt{6}$． ………………11 分

所以 △ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}c\cdot a\sin B=\dfrac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{2}$． ………………13 分

解法二：因为 $A=\dfrac{\pi}{4}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，

根据正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$， ……………7 分

所以 $b=\dfrac{a\cdot\sin B}{\sin A}=\sqrt{6}$． ………………8 分

因为 $C=\pi-A-B=\dfrac{5\pi}{12}$，　　　　　　　　　　　　………………9 分

所以 $\sin C=\sin\dfrac{5\pi}{12}=\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，　　　　　　　　　　………………11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}b\cdot a\sin C=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.　　　　………………13 分

18. （本小题满分 14 分）

随着人民生活水平的提高，人们对牛奶需求越来越大，品质要求越来越高，某牛奶企业针对生产的鲜奶和和酸奶，在一地区进行了质量满意度调查，现从中随机抽取 500 人次作为样本，得到下表（单位：人次）：

满意度	老年人		中年人		青年人	
	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶
满意	100	120	120	100	150	120
不满意	50	30	30	50	50	80

(Ⅰ)从样本中任取 1 个人，求这个人恰好对生产的酸奶满意的概率；

(Ⅱ)从该地区的老年人中抽取 2 人，青年人中随机选取 1 人，估计这三人中恰有 2 人对生产的鲜奶质量满意的概率；

(Ⅲ) 依据表中三个年龄段的数据，哪部分人对鲜奶的满意度提升 0.1，使得整体对鲜奶的满意度提升最大？　（直接写结果）

解：(Ⅰ)设这个人恰好对生产的酸奶满意人数事件为 A,总人次为 500 人,

共抽取了 100+120+150=370 人次对酸奶满意,

所以 $P(A)=\dfrac{370}{500}=\dfrac{37}{50}$.…………5 分

(Ⅱ)由频率估计总体，由已知抽取老年人满意度的概率为 $P(B)=\dfrac{4}{5}$,抽取青年人满意度的概率为 $P(C)=\dfrac{3}{5}$,抽取这三人中恰有 2 人对生产的鲜奶质量满意的概率 $P(D)$,

$$P(D)=C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{4}{5})+\left(\frac{4}{5}\right)^2\times(1-\frac{3}{5})=\frac{56}{125},$$

所以这三人中恰有 2 人对生产的鲜奶质量满意的概率为 $\dfrac{56}{125}$.…………11 分

(Ⅲ)青年人 …………14 分

19. （本小题满分 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，并且经过 $P(0,\sqrt{3})$ 点

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过点 P 的直线与 x 轴交于 N 点，与椭圆的另一个交点为 B，点 B 关于 x 轴的对称点为 B'，直线 PB' 交 x 轴于 M，求证：$|OM|\cdot|ON|$ 为定值。

解：（Ⅰ）由已知 $\begin{cases}\dfrac{3}{b^2}=1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$ 所以椭圆 C ：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.…………5 分

（Ⅱ）**证明**：由已知斜率存在

以下给出证明：

由题意，设直线 PB 的方程为 $y=kx+\sqrt{3}(k\neq 0)$，$P(0,\sqrt{3})$，$B(x_1,y_1)$，则 $B'(x_1,-y_1)$. …………. 7 分

由 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12,\\ y=kx+\sqrt{3},\end{cases}$

得 $(3+4k^2)x^2+8k\sqrt{3}x=0$， ……………… 9 分

所以 $\Delta=(8k\sqrt{3})^2>0$，

$$x_1+0=-\frac{8k\sqrt{3}}{3+4k^2}, \quad x_1=-\frac{8k\sqrt{3}}{3+4k^2} \quad y_1=-\frac{8k\sqrt{3}}{3+4k^2}+\sqrt{3}$$

所以 $B(-\dfrac{8k\sqrt{3}}{3+4k^2},-\dfrac{8k\sqrt{3}}{3+4k^2}+\sqrt{3})$ 即 $B(-\dfrac{8k\sqrt{3}}{3+4k^2},\dfrac{-4\sqrt{3}k^2+3\sqrt{3}}{3+4k^2})$

$B'(-\dfrac{8k\sqrt{3}}{3+4k^2},\dfrac{4\sqrt{3}k^2-3\sqrt{3}}{3+4k^2})$ …………11 分

直线 PB' 的方程为 $y-\dfrac{4\sqrt{3}k^2-3\sqrt{3}}{3+4k^2}=\dfrac{3}{4k}(x-\dfrac{-8k\sqrt{3}}{3+4k^2})$

令 $y=0$ 得 $x=\dfrac{(-4\sqrt{3}k^2-3\sqrt{3})4k}{3(3+4k^2)}$ 所以 $M(\dfrac{(-4\sqrt{3}k^2-3\sqrt{3})4k}{3(3+4k^2)},0)$

令 $y=0$ 由 $y=kx+\sqrt{3}$ 得 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{k}$ 所以 $N(-\dfrac{\sqrt{3}}{k},0)$ …………13 分

所以 $|OM|\cdot|ON|=|\dfrac{(-4\sqrt{3}k^2-3\sqrt{3})4k}{3(3+4k^2)}|\cdot|-\dfrac{\sqrt{3}}{k}|=4$ …………15 分

法二：设 $B(x_0,y_0)$，$B'(x_0,-y_0)$ 则 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$…………3 分

则直线 PB 的方程为 $y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}-y_0}{-x_0}(x-0)$…………5 分

令 $y=0$ $x=\dfrac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3}-y_0}$ 所以 $N(\dfrac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3}-y_0},0)$ 同理 $M(\dfrac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3}+y_0},0)$…………9 分

所以 $|OM|\cdot|ON|=|\dfrac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3}+y_0}|\cdot|\dfrac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3}-y_0}|=|\dfrac{3x_0^2}{3-y_0^2}|$………. 12 分

因为 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$ 所以 $3x_0^2+4y_0^2=12$

所以 $|OM|\cdot|ON|=|\dfrac{3x_0^2}{3-y_0^2}|=|\dfrac{12-4y_0^2}{3-y_0^2}|=4$………. 15 分

20（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x+1}{e^x}$.

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（3）当 $a=1$ 时，过点 $P(-1,0)$ 可作几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切？请说明理由.

（Ⅰ）因为当 $a=0$ 时，$f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$，

由 $f'(x)=\dfrac{-x}{e^x}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，………… 3 分

则 $f'(x)$ 及 $f(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $f(x)$ 的递减区间为 $(0,+\infty)$；递增区间为 $(-\infty,0)$.　　…………7 分

（Ⅱ）因为当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{e^x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{x-x^2}{e^x}$ ………… 9 分

设切点为 $A(x_0,y_0)$，则切线方程为：$y-y_0=\dfrac{x_0-x_0^2}{e^{x_0}}(x-x_0)$，又因为切线过 $P(-1,0)$，所以 $-y_0=\dfrac{x_0-x_0^2}{e^{x_0}}(-1-x_0)$　　所以 $-\dfrac{x_0^2+x_0+1}{e^{x_0}}=\dfrac{x_0-x_0^2}{e^{x_0}}(-1-x_0)$，化简得

$x_0^3+x_0^2+1=0$,…………11 分

令 $g(x)=x^3+x^2+1$,所以 $g'(x)=3x^2+2x$,

则 $g'(x)$ 及 $g(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,-\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3},0)$	0	$(0,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极大值 $\frac{31}{27}$	↘	极小值 1	↗

所以函数 $g(x)$ 的递减区间为 $(-\frac{2}{3},0)$，递增区间为 $(-\infty,-\frac{2}{3})$，$(0,+\infty)$．$g(-2)=-3<0$

$g(-\frac{2}{3})=\frac{31}{27}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-2,0)$ 有唯一一个零点，…………. 13 分

所以方程 $x_0^3+x_0^2+1=0$ 有唯一一个解．所以过 $P(-1,0)$ 只能作一条曲线 $f(x)$ 的切线．…………15 分

21（本小题满分 15 分）

已知数列 A：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(0\le a_1<a_2<\cdots<a_n,n\ge 3)$ 具有性质 P：对任意 $i,j\,(1\le i\le j\le n)$，a_j+a_i 与 a_j-a_i 两数中至少有一个是该数列中的一项，S_n 为数列 A 的前 n 项和．

（Ⅰ）分别判断数列 $0,1,3,5$ 与数列 $0,2,4,6$ 是否具有性质 P；

（Ⅱ）证明：$a_1=0$，且 $S_n=\frac{na_n}{2}$；

（Ⅲ）证明：当 $n=4$ 时，a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等差数列．

（Ⅰ）因为 $1+3=4\notin A$，$3-1=2\notin A$，所以数列 $0,1,3,5$ 不具有性质 P；因为 $0+2,\ 2-0$；$0+4,\ 4-0$；$0+6,\ 6-0$；$2+4,\ 4-2$；$2+6,\ 6-2$；$6+4,\ 6-4$，六组数中，至少有一个属于 P，所以数列 $0,2,4,6$ 具有性质 P。…………5 分

（Ⅱ）∵数列 A：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(0\le a_1<a_2<\cdots<a_n,n\ge 3)$ 具有性质 P，∴ a_n-a_n 与 a_n+a_n 中至少有一个属于 A，∵ $a_n>0$，$a_n+a_n>a_n$，故 $a_n+a_n\notin A$，∴ $a_n-a_n\in A$，∴ $a_1=0$。

由 A 具有性质 P 可知 $a_n - a_k \in A\left(k=1,2,3,\cdots,n\right)$.

$\therefore a_n - a_1 > a_n - a_2 > a_n - a_3 > \cdots a_n - a_{n-1} > a_n - a_n$,

$\therefore a_n - a_1 = a_n$

$a_n - a_2 = a_{n-1}$

$a_n - a_3 = a_{n-2}$

……

$a_n - a_n = a_1$；从而 $na_n - (a_1 + a_2 + \cdots a_n) = a_n + a_{n-1} + \cdots a_1$，$\therefore na_n - S_n = S_n$，$\therefore$

$S_n = \dfrac{na_n}{2}$ …………10 分

（III）证明：由（II）知，$\therefore a_5 - a_4 = a_2$，$a_5 - a_3 = a_3$，$\therefore a_5 = a_4 + a_2 = 2a_3$

$a_3 - a_2 = a_2$，$\therefore a_3 = 2a_2$，$a_4 = 3a_2$，$a_5 = 4a_2$，$\therefore$ 数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是以 0 为首项，共差为 a_2 的等差数列。 …………15 分