



北京市第一六一中学 2023—2024 学年第一学期 12 月阶段练习

高二数学

2023. 12

班级_____ 姓名_____ 学号_____

本试卷共 2 页，共 120 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。

一、选择题：本大题共 10 道小题，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题卡上相应的位置。

1. 椭圆 $\frac{y^2}{5} + \frac{x^2}{4} = 1$ 的焦点坐标是

- A. (1,0), (-1,0) B. (0,1), (0,-1) C. (3,0), (-3,0) D. (0,3), (0,-3)

2. 在空间直角坐标系中， $A(1, -2, -3), B(-1, -1, -1), C(0, 0, -5)$ ，则 $\triangle ABC$ 是

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 形状不确定

3. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 4，若抛物线上一点 P 到 y 轴的距离 1，则 $|PF|$ 的值为

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

4. 直线 $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ 截圆 $x^2 + y^2 = 4$ 得到的劣弧所对的圆心角的大小为

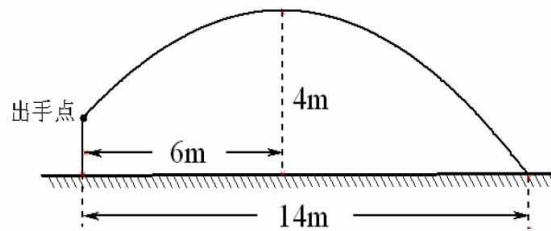
- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

5. 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x$ ，则双曲线离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B. $\frac{5}{4}$ 或 $\frac{5}{3}$ C. $\frac{5}{4}$ D. 2

6. 如图，一位运动员投掷铅球的成绩是 14m，当铅球运行的水平距离是 6m 时，达到最大高度 4m。若铅球运行的路线是抛物线，则铅球出手时距地面的高度是

- A. 2.25m B. 2.15m
C. 1.85m D. 1.75m





7. “ $k = \pm 1$ ”是“直线 $kx - y + k = 0$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 有唯一公共点”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

8. 将正方形 $ABCD$ 沿对角线折成直二面角 $A-BD-C$ ，以下结论中错误的是

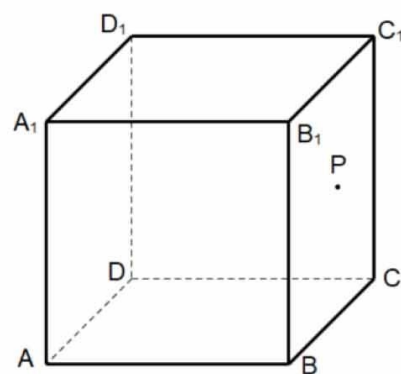
- A. $AC \perp BD$ B. $\triangle ACD$ 是等边三角形
C. AB 与平面 BCD 所成的角为 60° D. AB 与 CD 所成的角为 60°

9. 在平面直角坐标系内，若曲线 $C: x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 5a^2 - 4 = 0$ 上所有的点均在第二象限内，则实数 a 的取值范围为

- A. $(2, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, -2)$

10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是侧面 BB_1C_1C 内一动点，若 P 到直线 BC 与到直线 C_1D_1 的距离相等，则动点 P 的轨迹所在的曲线是

- A. 直线 B. 圆 C. 双曲线 D. 抛物线



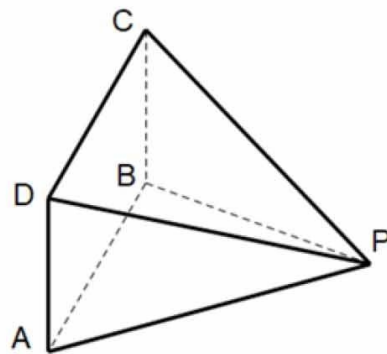
二、填空题：本大题共 5 小题，共 25 分。把答案填在答题纸中相应的横线上。

11. 点 $(2, 3)$ 关于直线 $y = x + 3$ 的对称点坐标为_____.

12. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点，

$|AB| = 6$ ，则 $|AF_2| + |BF_2| =$ _____.

13. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为矩形， $AD:AB = 1:2$ ， $\triangle PAB$ 为等边三角形，则直线 PD 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为_____.





14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 的一个焦点到它的一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$, 则

$m =$ _____ ; 若双曲线 C_1 与 C 不同, 且与 C 有相同的渐近线, 则 C_1 的方程可以为 _____ . (写

出一个答案即可)

15. 曲线 C 是平面内与定点 $F(2,0)$ 和定直线 $x = -2$ 的距离的积等于 4 的点的轨迹, 给出下列四个命题:

- ① 曲线 C 过坐标原点;
- ② 曲线 C 关于 x 轴对称;
- ③ 曲线 C 与 y 轴有 3 个交点;
- ④ 若点 M 在曲线 C 上, 则 $|MF|$ 的最小值是 $2\sqrt{2} - 2$;

其中, 所有正确结论的序号是 _____ .

三、解答题: 本大题共 4 小题, 共 55 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程, 并把答案写在答题纸中相应位置上。

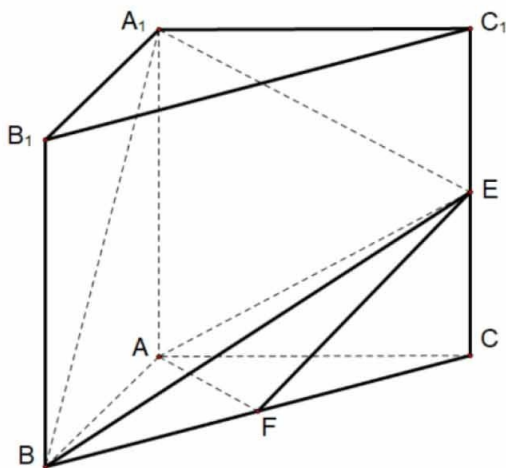
16. (本题 14 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AC = AA_1 = 2$,

$\angle BAC = 90^\circ$, E, F 分别为 CC_1, BC 的中点.

(I) 求异面直线 A_1B 与 EF 所成角的余弦值;

(II) 求点 B_1 到平面 AEF 的距离;

(III) 求二面角 $B_1 - A_1B - E$ 的余弦值.





17. (本题 13 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点是 F_1, F_2 , 且 $|F_1F_2| = 2$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 若椭圆 C 与直线 $y = x + m$ 交于 M, N 两点, 且 $|MN| = \frac{12\sqrt{2}}{7}$, 求实数 m 的值.

18. (本题 13 分) 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.

(I) 求圆心 C 的坐标及半径的大小;

(II) 已知直线 l 与圆 C 相切, 且在 x, y 轴上的截距相等且不为 0, 求直线 l 的方程;

(III) 从圆 C 外一点 $P(x, y)$ 向圆引一条切线, 切点为 M, O 为坐标原点, 且有 $|MP| = |OP|$, 求点 P 的轨迹方程.

19. (本题 15 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(1, 0)$, 短轴长为 2.

直线 l 过点 F 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B , 线段 AB 的中点为 M .

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;

(III) 延长线段 OM 与椭圆 C 交于点 P , 若四边形 $OAPB$ 为平行四边形, 求此时直线 l 的斜率.