2023 北京二中高二（上）第二学段段考

数　学

一、选择题（共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分，选出符合题目要求的一项）

1. 已知 i 为虚数单位，则复数 $z=\dfrac{3+i}{(1-i)i}$ 的虚部为(　)

A. i　　B. －1　　C. 2　　D. －i

2. 已知点$A(2,0)$与$B(0,4)$关于直线$ax+y+b=0$对称，则a,b的值分别为 (　)

A. 1，3　　B. $-\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$　　C. -2，0　　D. $\frac{1}{2}$，$-\frac{5}{2}$

3. 已知两条不重合的直线m、n和平面α，则$m//n$的一个充分不必要条件是(　)

A. $m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$　　B. $m//\alpha$，$n//\alpha$　　C. $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$　　D. $m//\alpha$，$n\subset\alpha$

4. 与椭圆 $9x^2+4y^2=36$ 有相同焦点，且满足短半轴长为 $2\sqrt{5}$的椭圆方程是(　)

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{20}=1$　　B. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$

C. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{45}=1$　　D. $\frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{85}=1$

5. 在$\triangle ABC$中，若$b=1$，$A=60°$，$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，则$a=$(　)

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 13　　D. $\sqrt{13}$

6. 直线l：$y=-\sqrt{3}x+1$与圆O：$x^2+y^2=1$相交于A，B两点，则$\triangle OAB$的面积为 (　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 若直线$l: ax+by+1=0$始终平分圆$M: x^2+y^2+4x+2y+1=0$的周长，则$\sqrt{(a-2)^2+(b-2)^2}$的最小值为 (　)

A. $\sqrt{5}$　　B. 5　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 10

8. 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$的左焦点是$F_1$，右焦点是$F_2$，点$P$在椭圆上，如果线段$PF_1$的中点在$y$轴上，那么$|PF_2|$：$|PF_1|=$(　)

A. $3:5$　　B. $3:4$　　C. $4:3$　　D. $5:3$

9 . 一名同学掷骰子 5 次，记录每次骰子出现的点数，可以判断一定没有出现点数6的是 (　)

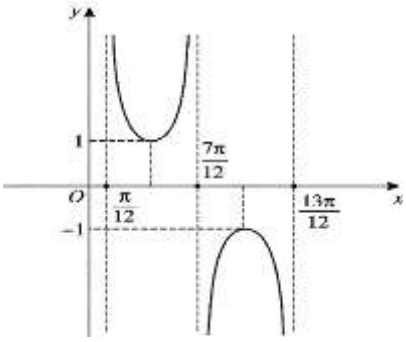
A. 平均数为3，中位数为2　　B. 中位数为3，众数为2

C. 平均数为2，方差为2.4　　D. 中位数为3，方差为2.8

10. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,a\neq b)$任意两条相互垂直的切线的交点轨迹为圆：$x^2+y^2=a^2+b^2$，这个圆称为椭圆的蒙日圆.在圆$(x-4)^2+(y-3)^2=r^2(r>0)$上总存在点$P$，使得过点$P$能作椭圆$x^2+\frac{y^2}{3}=1$的两条相互垂直的切线，则$r$的取值范围是(　)

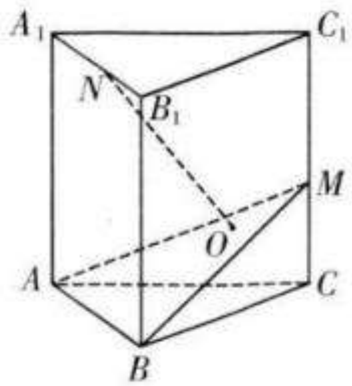
A. $(1,9)$　　B. $[1,9]$　　C. $(3,7)$　　D. $[3,7]$

11. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，若$g(x)\cdot f(x)=1$，且函数$g(x)$的部分图象如图所示，则$\varphi$等于（　）



A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $-\frac{\pi}{3}$　　D. $-\frac{\pi}{6}$

12. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$是边长为2的正三角形，$AA_1=3$，N为棱A_1B_1上的中点，M为棱CC_1上的动点，过N作平面ABM的垂线段，垂足为点O，当点M从点C运动到点C_1时，点O的轨迹长度为（　）



A. $\frac{\pi}{2}$

B. π

C. $\frac{3\pi}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

13. 若椭圆 $x^2+my^2=1(m>1)$ 离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$m=$______.

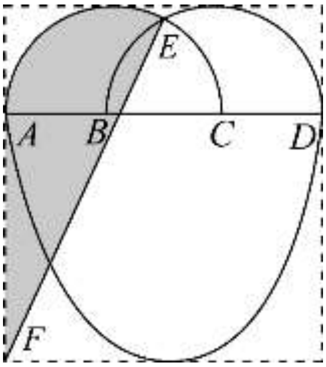
14. 已知x,y满足$x^2-4x+y^2=0$，则$x-2y$的最大值为______.

15.已知直线$l_1:mx-y=1$，$l_2:x-my-1=0$.若$l_1//l_2$，则m的值为______；若直线l_1与圆$x^2+2x+y^2-24=0$交于A,B两点，则$|AB|$的最小值是________.

16.已知椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别是$F_1$，$F_2$，$A(0,b)$，且$\triangle AF_1F_2$是面积为$\sqrt{3}$的正三角形．过$F_1$垂直于$AF_2$的直线交椭圆$M$于$B$，$C$两点，则$\triangle ABC$的周长为______.

17. 已知A为直线$l:x+y+2a=0$上的一个动点，P,Q为圆$(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2$上的两个动点，则$\angle PAQ$的最大值是________________.

18. 某中学开展“劳动创造美好生活”的劳动主题教育活动，展示劳动实践成果并进行评比，某学生设计的一款如图所示的“心形”工艺品获得了“十佳创意奖”，该“心形”由上、下两部分组成，并用矩形框(虚线)进行镶嵌，上部分是两个半径都为r的半圆，AC、BD分别为其直径，且$AB=BC=CD$，下部分是一个“半椭圆”，并把椭圆的离心率叫做“心形”的离心率.



(1)若矩形框的周长为12，则当该矩形框面积最大时，$r=$_____；

(2)若$r=1$，图中阴影区域的面积为$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，则该“心形”的离心率为_____.

三、解答题（共 5 题，共 72 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

19.（本题满分 13 分）

给出以下三个条件：

①直线$x=x_1$，$x=x_2$是$y=f(x)$图象的任意两条对称轴，且$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{4}$，

②$f(-\frac{\pi}{12})=0$，

③对任意的$x\in R$，$f(x)\le|f(\frac{\pi}{24})|$；

请从这三个条件中任选一个将下面的题目补充完整，并求解.

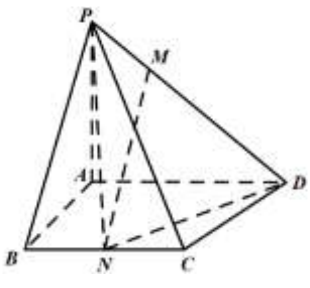
已知函数$f(x)=sin\omega x\cdot cos\omega x+\sqrt{3}\cos^2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$0<\omega<3$，______.

(1)求$f(x)$的表达式；

(2)将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位后，再将得到的图象上各点的横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变，得到函数$y=g(x)$的图象，求$g(x)$的单调递增区间以及在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的值域.

20.（本题满分 15 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，其中$AB\perp AD$，$AD/\!/BC$，$AD=3$，$AB=BC=2$，$PA\perp$平面$ABCD$，且$PA=3$，点M在棱PD上，点N为BC中点.



(1)证明：若$DM=2MP$，直线$MN/\!/$平面PAB；

(2)求二面角$C-PD-N$的余弦值；

(3)是否存在点M，使NM与平面PCD所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{6}$？若存在求出$\frac{PM}{PD}$值；若不存在，说明理由.

21.（本题满分 14 分）

某心理教育测评研究院为了解某市市民的心理健康状况，随机抽取了n位市民进行心理健康问卷调查，将所得评分(百分制)按研究院制定的心理测评评价标准整理，得到频率分布直方图．已知调查评分在[70,80)中的市民有200人．

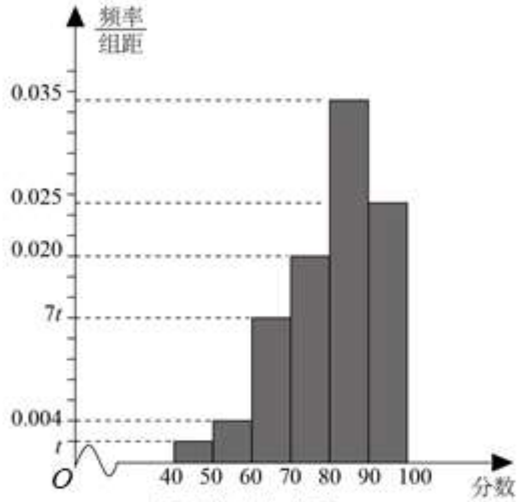
心理测评评价标准

调查评分	[0,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
心理等级	E	D		C		B	A

(I)求n的值及频率分布直方图中t的值；

(II)在抽取的心理等级为D的市民中，按照调查评分的分组，分为2层，通过分层随机抽样抽取3人进行心理疏导．据以往数据统计，经心理疏导后，调查评分在[40,50)的市民的心理等级转为B的概率为$\frac{1}{4}$，调查评分在[50,60)的市民的心理等级转为B的概率为$\frac{1}{3}$，假设经心理疏导后的等级转化情况相互独立，求在抽取的3人中，经心理疏导后至少有一人的心理等级转为B的概率；

(III)该心理教育测评研究院建议该市管理部门设定预案：若市民心理健康指数的平均值不低于0.75，则只需发放心理指导资料，否则需要举办心理健康大讲堂．根据调查数据，判断该市是否需要举办心理健康大讲堂，并说明理由．(每组的每个数据用该组区间的中点值代替，心理健康指数=调查评分÷100)



频率分布直方图

22.（本题满分 15 分）

已知线段AB的端点B的坐标是$(6,4)$，端点A的运动轨迹是曲线C，线段AB的中点M的轨迹方程是$(x-4)^2+(y-2)^2=1$．

(1)求曲线C的方程；

(2)已知斜率为k的直线l与曲线C相交于异于原点O的两点E,F, 直线OE,OF的斜率分别为k_1，k_2，且$k_1k_2=2$. 证明：直线l恒过定点.

23.（本题满分 15 分）

设A是正整数集的一个非空子集，如果对于任意$x\in A$，都有$x-1\in A$或$x+1\in A$，则称A为自邻集，记集合$A_n=\{1,2,\cdots,n\}(n\geq 2，n\in N)$的所有子集中的自邻集的个数为$a_n$．

(I)直接写出A_4的所有自邻集；

(II)若n为偶数且$n \geq 6$，求证：A_n的所有含5个元素的子集中，自邻集的个数是偶数；

(III)若$n \geq 4$，求证：$a_n \leq 2a_{n-1}$.

北京二中 2023-2024 学年度第二学段高二年级学段考试

数学答案

一、选择题

BBCB　DBAA　CDDB

二、填空题

13. 4　14. $2+2\sqrt{5}$　15. -1；$2\sqrt{23}$.　16. 8　17. $60°$　18. 1；$\frac{1}{2}$

三、解答题

19. 给出以下三个条件：

①直线$x=x_1$，$x=x_2$是$y=f(x)$图象的任意两条对称轴，且$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{4}$，

②$f(-\frac{\pi}{12})=0$，

③对任意的$x\in R$，$f(x)\le|f(\frac{\pi}{24})|$；

请从这三个条件中任选一个将下面的题目补充完整，并求解.

已知函数$f(x)=sin\omega x\cdot cos\omega x+\sqrt{3}\cos^2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$0<\omega<3$，______.

(1)求$f(x)$的表达式；

(2)将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位后，再将得到的图象上各点的横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变，得到函数$y=g(x)$的图象，求$g(x)$的单调递增区间以及在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的值域.

【答案】解：(1)$f(x)=sin\omega x\cdot cos\omega x+\sqrt{3}\cos^2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{1}{2}sin2\omega x+\frac{\sqrt{3}(cos2\omega x+1)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$=\frac{1}{2}sin2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}cos2\omega x=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})$.

选①时，由于直线$x=x_1$，$x=x_2$是$y=f(x)$图象的任意两条对称轴，且$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{4}$，

所以$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{4}$，解得$\omega=2$，

所以$f(x)=\sin(4x+\frac{\pi}{3})$.

选②时，$f(-\frac{\pi}{12})=0$，即$\sin(-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3})=0$，

整理得$-\frac{\omega}{6}\pi+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in Z)$，

故$\omega=2-6k(k\in Z)$，
由于$0<\omega<3$，
故当$k=0$时，$\omega=2$，

所以$f(x)=\sin(4x+\frac{\pi}{3})$.

选③时，对任意的$x\in R$，$f(x)\leq|f(\frac{\pi}{24})|$，

所以$f(\frac{\pi}{24})=\sin(2\omega\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{3})=\pm1$，

即$\frac{\omega\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$(k\in Z)$，解得：$\omega=2+12k$，$(k\in Z)$，
由于$0<\omega<3$，故当$k=0$时，$\omega=2$，

所以$f(x)=\sin(4x+\frac{\pi}{3})$.

(2)函数$f(x)=\sin(4x+\frac{\pi}{3})$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位后，再将得到的图象上各点的横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变，得到函数$y=g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$的图象，

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{6}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，

整理得$-\frac{\pi}{6}+k\pi\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$，

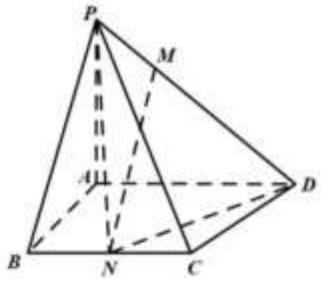
所以函数$g(x)$的单调递增区间为：$[-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\pi+\frac{\pi}{3}](k\in Z)$.

由于$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，

故$\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$.

所以函数$g(x)$的值域为$[-\frac{1}{2},1]$.

20. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，其中$AD//BC$，$AD=3$，$AB=BC=2$，$PA\perp$平面$ABCD$，且$PA=3$，点M在棱PD上，点N为BC中点.



(1)证明：若$DM=2MP$，直线$MN//$平面PAB；

(2)求二面角$C-PD-N$的余弦值；

(3)是否存在点M，使NM与平面PCD所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{6}$？若存在求出$\frac{PM}{PD}$值；若不存在，说明理由.

【答案】(1)证明：如图所示，在线段AD上取一点Q，使$AQ=\frac{1}{3}AD$，连接MQ，NQ，

$\because DM=2MP$，$\therefore QM//AP$，又$AD=3$，$AB=BC=2$，

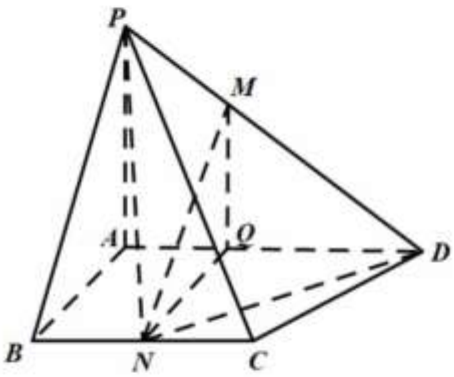
$\therefore AQ//BN$且$AQ=BN$，四边形$ABNQ$为平行四边形，

$\therefore NQ//AB$，又$NQ\cap MQ=Q$，$AB\cap AP=A$，

所以平面$MNQ//$平面PAB，

$\because MN\subset$平面MNQ，

$\therefore MN//$平面PAB；



(2)解：如图所示，以点A为坐标原点，以AB为x轴，AD为y轴，AP为z轴建立空间直角坐标系，

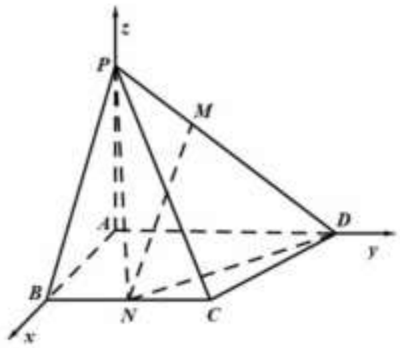
则$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，

又N是BC中点，则$N(2,1,0)$，

所以$\overrightarrow{PD}=(0,3,-3)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{DN}=(2,-2,0)$，

设平面PCD的法向量$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{n_1}=3y_1-3z_1=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{n_1}=-2x_1+y_1=0\end{cases}$，

令$x_1=1$，则$\overrightarrow{n_1}=(1,2,2)$，



设平面PND的法向量$\vec{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{n_2}=3y_2-3z_2=0\\\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{n_2}=2x_2-2y_2=0\end{cases}$，令$x_2=1$，则$\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$，

所以$\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle=\frac{1+2+2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，

则二面角$C-PD-N$的余弦值为$\frac{5\sqrt{3}}{9}$

(3)存在，$\frac{PM}{PD}=\frac{1}{3}$或$\frac{PM}{PD}=1$，假设存在点$M$，

设$\frac{PM}{PD}=\lambda$，即$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}$，$\lambda\in[0,1]$，

由(2)得$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，$N(2,1,0)$，且平面PCD的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,2,2)$，

则$\overrightarrow{PD}=(0,3,-3)$，$\overrightarrow{PM}=(0,3\lambda,-3\lambda)$，

则$M(0,3\lambda,3-3\lambda)$，$\overrightarrow{MN}=(2,1-3\lambda,3\lambda-3)$，

$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{MN},\vec{n}_1\rangle|=\left|\frac{2+2(1-3\lambda)+2(3\lambda-3)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(1-3\lambda)^2+(3\lambda-3)^2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{6}$，

解得$\lambda=\frac{1}{3}$或$\lambda=1$，

故存在点M，此时$\frac{PM}{PD}=\frac{1}{3}$或$\frac{PM}{PD}=1$.

21. 某心理教育测评研究院为了解某市市民的心理健康状况，随机抽取了n位市民进行心理健康问卷调查，将所得评分(百分制)按研究院制定的心理测评评价标准整理，得到频率分布直方图．已知调查评分在[70,80)中的市民有200人．

心理测评评价标准

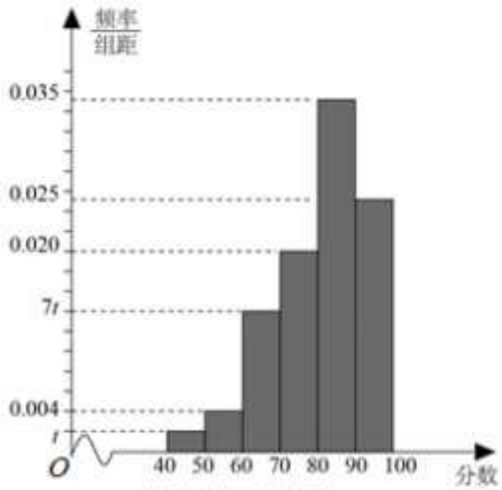
调查评分	[0,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
心理等级	E	D		C		B	A

(I)求n的值及频率分布直方图中t的值；

(II)在抽取的心理等级为D的市民中，按照调查评分的分组，分为2层，通过分层随机抽样抽

取3人进行心理疏导．据以往数据统计，经心理疏导后，调查评分在[40,50)的市民的心理等级转为B的概率为$\frac{1}{4}$，调查评分在[50,60)的市民的心理等级转为B的概率为$\frac{1}{3}$，假设经心理疏导后的等级转化情况相互独立，求在抽取的3人中，经心理疏导后至少有一人的心理等级转为B的概率；

(III)该心理教育测评研究院建议该市管理部门设定预案：若市民心理健康指数的平均值不低于0.75，则只需发放心理指导资料，否则需要举办心理健康大讲堂．根据调查数据，判断该市是否需要举办心理健康大讲堂，并说明理由．(每组的每个数据用该组区间的中点值代替，心理健康指数=调查评分÷100)



频率分布直方图

解：(I)由已知条件可得$n=\frac{200}{0.02\times10}=1000$，又因为每组的小矩形的面积之和为1．

所以$(0.035+0.025+0.02+0.004+8t)\times10=1$，解得$t=0.002$；

(II)由(I)知：$t=0.002$，

所以调查评分在[40,50)中的人数是调查评分在[50,60)中人数的$\frac{1}{2}$，

若按分层抽样抽取3人，则调查评分在[40,50)中有1人，在[50,60)中有2人，

设事件$M=$“在抽取的3人中，经心理疏导后至少有一人的心理等级转为B”．

因为经心理疏导后的等级转化情况相互独立，

所以$P(\bar{M})=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，

所以$P(M)=1-P(\bar{M})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

故经心理疏导后至少有一人的心理等级转为B的概率为$\frac{2}{3}$；

(III)由频率分布直方图可得，

$45\times 0.02+55\times 0.04+65\times 0.14+75\times 0.2+85\times 0.35+95\times 0.25=80.7$.

估计市民心理健康调查评分的平均值为80.7，

所以市民心理健康指数平均值为$\frac{80.7}{100}=0.807>0.75$.

所以只需发放心理指导材料，不需要举办心理健康大讲堂活动.

22. 已知线段AB的端点B的坐标是$(6,4)$，端点A的运动轨迹是曲线C，线段AB的中点M的轨迹方程是$(x-4)^2+(y-2)^2=1$.

(1)求曲线C的方程；

(2)已知斜率为k的直线l与曲线C相交于异于原点O的两点E,F,直线OE,OF的斜率分别为k_1，k_2，且$k_1k_2=2$. 证明：直线l恒过定点.

【答案】解：(1)设$A(x,y)$，$M(x_0,y_0)$，

由中点坐标公式得$\begin{cases}x_0=\frac{x+6}{2},\\ y_0=\frac{y+4}{2}\end{cases}$.

因为点M的轨迹方程是$(x-4)^2+(y-2)^2=1$，

所以$(\frac{x+6}{2}-4)^2+(\frac{y+4}{2}-2)^2=1$，

整理得曲线C的方程为$(x-2)^2+y^2=4$.

(2)设直线l的方程为$y=kx+m$，$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，$x_1x_2\neq 0$，

由$\begin{cases}y=kx+m\\ (x-2)^2+y^2=4\end{cases}$，得$(1+k^2)x^2+2(km-2)x+m^2=0$，

所以$x_1+x_2=-\frac{2(km-2)}{1+k^2}$，$x_1x_2=\frac{m^2}{1+k^2}$，

所以$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}$

$=k^2+\frac{\frac{2km(2-km)}{1+k^2}+m^2}{\frac{m^2}{1+k^2}}=1+\frac{4k}{m}=2$，

所以$m=4k$，且$\Delta>0$即$4(km-2)^2-4(1+k^2)m^2>0$，

即$m^2+4km-4<0$，

所以直线l的方程为$y=k(x+4)$，即直线l过定点$P(-4,0)$.

23. 设A是正整数集的一个非空子集，如果对于任意$x\in A$，都有$x-1\in A$或$x+1\in A$，则称A为自邻集，记集合$A_n=\{1,2,\cdots,n\}(n\geq 2，n\in N)$的所有子集中的自邻集的个数为$a_n$.

(I)直接写出A_4的所有自邻集；

(II)若n为偶数且$n \geq 6$，求证：A_n的所有含5个元素的子集中，自邻集的个数是偶数；

(III)若$n \geq 4$，求证：$a_n \leq 2a_{n-1}$.

【答案】解：(I)A_4的所有自邻集有：$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$.

(II)证明：对于A_n的含5个元素的自邻集$B=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，

不妨设$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$.

因为对于$\forall x_i \in B$，都有$x_i-1 \in B$或$x_i+1 \in B$，$i=1$，2，3，4，5，

所以$x_2=x_1+1$，$x_4=x_5-1$，$x_3=x_2+1$或$x_3=x_4-1$.

对于集合$C=\{n+1-x_5,n+1-x_4,n+1-x_3,n+1-x_2,n+1-x_1\}$，

因为$1 \leq x_1<x_2<x_3<x_4<x_5 \leq n$，所以$1 \leq n+1-x_i \leq n$，$i=1$，2，3，4，5，

$n+1-x_5<n+1-x_4<n+1-x_3<n+1-x_2<n+1-x_1$，所以$C \subseteq A_n$.

因为$x_2=x_1+1$，$x_4=x_5-1$，$x_3=x_2+1$或$x_3=x_4-1$.

所以 $n+1-x_2=(n+1-x_1)-1$，$n+1-x_4=(n+1-x_3)+1$，

$n+1-x_3=(n+1-x_4)+1$或$n+1-x_3=(n+1-x_2)-1$，

所以对于任意$n+1-x_i+1 \in C$或$n+1-x_i-1 \in C$，$i=1$，2，3，4，5，

所以集合C也是自邻集.

因为当n为偶数时，$x_3 \neq n+1-x_3$，所以$B \neq C$.

所以对于集合A_n的含5个元素的自邻集，在上述对应方法下会存在一个不同的含有5个元素的自邻集与其对应.

故A_n的所有含5个元素的子集中，自邻集的个数是偶数.

(III)证明：记自邻集中最大元素为k的自邻集的个数为b_k，$k=1$，2，3，⋯，n.

当$n \geq 4$时，$a_{n-1}=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$，$a_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$，

显然$a_n=a_{n-1}+b_n$.

下面证明：$b_n \leq a_{n-1}$.

①自邻集含有$n-2$，$n-1$，n这三个元素，记去掉的这个自邻集中的元素的集合为D，

因为$n-1.n-2 \in D$，所以D仍是自邻集，且集合D中的最大元素是$n-1$，

所以含有$n-2$，$n-1$，n这三个元素的自邻集的个数为b_{n-1}.

②自邻集含有$n-1$，n这两个元素，不含$n-2$，且不只有$n-1$，n这两个元素，

记自邻集除$n-1$，n之外最大元素为m，则$2 \leq m \leq n-3$，每个自邻集去掉$n-1$，n这两个元素后，仍为自邻集.

此时的自邻集的最大元素为m，可将此时的自邻集分为$n-4$；

含有最大数为2的集合个数为b_2，

含有最大数为3的集合个数为b_3，

，……，

含有最大数为$n-3$的集合个数为b_{n-3}.

则这样的集合共有$b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}$个.

③自邻集只含有$n-1$，n这两个元素，这样的自邻集只有1个.

综上可得$b_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}+b_{n-1}+1\le b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}+b_{n-1}+b_{n-2}\ =a_n$，

所以$b_n\le a_{n-1}$，

故$n\ge 4$时，$a_n\le 2a_{n-1}$得证.