# 2023北京首都师大附中高三12月月考

# 数　　学

**第Ⅰ卷（共40分）**

**一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的）**

1. 若复数 $z$ 满足 $z(1+\mathrm{i})=2$，则 $z=$（　）

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

2. 设平面向量 $\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(x,-2)$，若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则 $x$ 等于（　）

A. 1　　B. $-1$　　C. 4　　D. $-4$

3. 设集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|x<1\}$，$N=\{x|-1<x<2\}$，则 $\{x|x\geq 2\}=$（　）

A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup\complement_U M$

C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup\complement_U N$

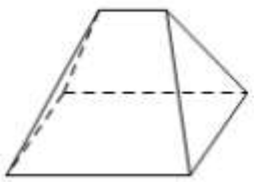
4. 一个袋中装有大小相同的3个白球和2个红球，现在不放回的取2次球，每次取出一个球，记“第1次拿出的是白球”为事件 $A$，“第2次拿出的是白球”为事件 $B$，则 $P(B|A)=$（　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{3}{10}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

5. 二项式 $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中的常数项为（　）

A. 1792　　B. $-1792$　　C. 1120　　D. $-1120$

6. 《九章算术》卷五商功中有如下描述：今有刍甍，下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈．意思为：今有底面为矩形的屋脊状的几何体，下底面宽3丈，长4丈，上棱长2丈，高1丈．现有一刍甍，如图所示，则该刍甍的体积为（　）



A. 5立方丈　　B. 20立方丈　　C. 40立方丈　　D. 80立方丈

7. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$S_n$ 是其前 $n$ 项和.则“$a_4>a_3$”是“对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\neq 3$，$S_n>S_3$”的（　）

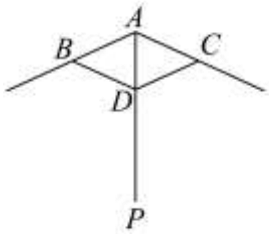
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

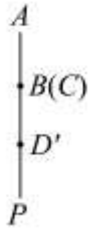
8. 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 $T$．若 $\dfrac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称，则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$（　）

A. 1　　　B. $\dfrac{3}{2}$　　　C. $\dfrac{5}{2}$　　　D. 3

9. 我国油纸伞的制作工艺巧妙．如图（1），伞不管是张开还是收拢，伞柄 $AP$ 始终平分同一平面内两条伞骨所成的角 $\angle BAC$，且 $AB=AC$，从而保证伞圈 $D$ 能够沿着伞柄滑动．如图（2），伞完全收拢时，伞圈 $D$ 已滑动到 $D'$ 的位置，且 A、$B$、$D'$ 三点共线，$AD'=40\text{cm}$，$B$ 为 $AD'$ 的中点，当伞从完全张开到完全收拢，伞圈 $D$ 沿着伞柄向下滑动的距离为 $24\text{cm}$，则当伞完全张开时，$\angle BAC$ 的余弦值是（　　）



(1)



(2)

A. $-\dfrac{17}{25}$　　　B. $-\dfrac{4\sqrt{21}}{25}$　　　C. $-\dfrac{3}{5}$　　　D. $-\dfrac{8}{25}$

10. 下图展示了一个由区间 $(0,1)$ 到实数集 R 的映射过程：区间 $(0,1)$ 中的实数 $m$ 对应数轴上的点 $M$（如图1）；将线段 $AB$ 围成一个圆，使两端点 A、$B$ 恰好重合（从 A 到 $B$ 是逆时针，如图 2）；再将这个圆放在平面直角坐标系中，使其圆心在 $y$ 轴上，点 A 的坐标为 $(0,1)$（如图 3），图 3 中直线 $AM$ 与 $x$ 轴交于点 $N(n,0)$，则 $m$ 的象就是 $n$，记作 $f(m)=n$．

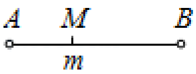


图1

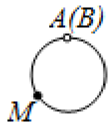


图2

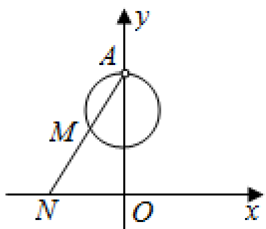


图3

则下列命题中正确的是（　）

A. $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=1$　　　B. $f(x)$ 是奇函数

C. $f(x)$ 在其定义域上单调递增　　　D. $f(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称

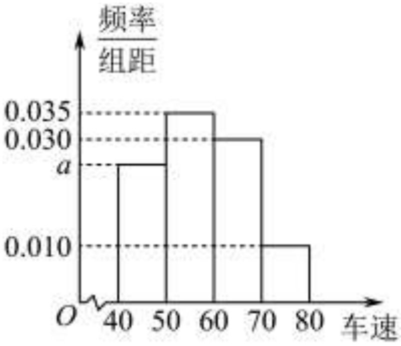
**第II卷（共 110 分）**

## 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ 的定义域为____________.

12. 已知直线 $m$ 和平面 $\alpha,\beta$.给出下列三个论断：① $m\parallel\alpha$；② $\alpha\parallel\beta$；③ $m\subset\beta$.以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：____________.

13. 某部门计划对某路段进行限速，为调查限速 60 km/h 是否合理，对通过该路段的 300 辆汽车的车速进行检测，将所得数据按 $[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80]$ 分组，绘制成如图所示频率分布直方图.则 $a=$________；这 300 辆汽车中车速低于限速 60 km/h 的汽车有______辆.




14. 设函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x,g\left(x\right)=mx^3$，

①若 $\omega=\frac{\pi}{2},m=1$，则不等式 $f\left(x\right)>g\left(x\right)$ 的解集为____________；

②若 $\omega=\frac{\pi}{4}$，且不等式 $f\left(x\right)>g\left(x\right)$ 的解集中恰有一个正整数，则 $m$ 的取值范围是____________.

15. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$E$ 是棱 $AA_1$ 上的一个动点，给出下列四个结论：

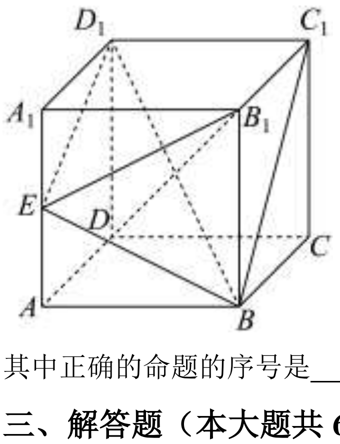
①三棱锥 $B_1-BED_1$ 的体积为定值；

②存在点 $E$ 使得 $B_1D\perp$ 平面 $BED_1$；

③ $D_1E+BE$ 的最小值为 $\sqrt{2}+1$；

④对每一个点 $E$，在棱 $DC$ 上总存在一点 $P$，使得 $AP\parallel$ 平面 $BED_1$；

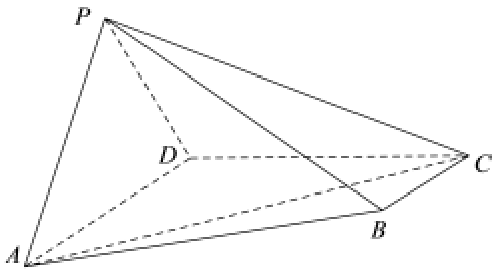
⑤ $M$ 是线段 $BC_1$ 上的一个动点，过点 $A_1$ 的截面 $\alpha$ 垂直于 $DM$，则截面 $\alpha$ 的面积的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.




其中正确的命题的序号是________.

**三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）**

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD//BC$，$CD\perp AD$，$AD=CD=2BC=2$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PD, PA=PD$.




（1）求证：$CD\perp PA$；

（2）求二面角 $C-PA-D$ 的余弦值；

（3）在棱 $PC$ 上是否存在点 $M$，使得 $BM\perp$ 平面 $PCD$？若存在，求 $\dfrac{PM}{PC}$ 的值？若不存在，说明理由.

17. 人工智能正在逐渐改变着我们的日常生活，不过，它所涉及的数学知识并非都是遥不可及的高深理论. 为了解“拼音输入法”的背后原理，随机选取甲类题材“新闻稿”中 1200 字作为样本语料库 A，其中“一”出现了 30 次，统计“一”与其后面一个字（或标点）的搭配情况，数据如下：

| “一”与其后面一个字（或标点）的搭配情况 | 频数 |
|---|---|
| “一个” | 6 |
| “一些” | 4 |
| “一穷” | 2 |
| “一条” | 2 |
| 其他 | $a$ |

假设用频率估计概率.

（1）求 $a$ 的值，并估计甲类题材中“一”出现的概率；

（2）在甲类题材“新闻稿”中随机抽取 2 个“一”，其中搭配“一个”出现的次数为 $X$，求 $X$ 的分布列和期望；

（3）另外随机选取甲类题材“新闻稿”中 800 字作为样本语料库 $B$ 进行统计，“一”出现了 24 次，“一格”出现了 2 次，若在甲类题材“新闻稿”的撰写中，输入拼音“yige”时，“一个”和“一格”谁在前面更合适？（结论不要求证明）

18. 在△ $ABC$ 中，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

（1）求证：△ $ABC$ 为等腰三角形；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使△ $ABC$ 存在且唯一，求 $b$ 的值.

条件①：$\angle B=\frac{\pi}{6}$；

条件②：$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{15}{2}$；

条件③：$AB$ 边上的高为$3$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

19. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$A(0,1)$.

（1）求椭圆 $C$ 的标准方程；

（2）点 $P$ 是椭圆上异于短轴端点 $A$，$B$ 的任意一点，过点 $P$ 作$PQ\perp y$轴于 $Q$，线段 $PQ$ 的中点为 $M$.直线 $AM$ 与直线$y=-1$交于点 $N$，$D$ 为线段 $BN$ 的中点，设 $O$ 为坐标原点，试判断以 $OD$ 为直径的圆与点 $M$ 的位置关系.

20. 已知函数 $f(x)=k\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2$ .

（1）当$k=1$时，求曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程；

（2）设$g(x)=f'(x)$，讨论函数$g(x)$的单调性；

（3）若对任意的$s,t\in(0,+\infty)$，当$0<t<s$时，$\frac{f(s)-f(t)}{s-t}>1$恒成立，求实数$k$的取值范围.

21. 数列$a_n$：$a_1$，$a_2$，…，$a_n(n\ge 4)$满足：$a_1=1$，$a_n=m$，$a_{k+1}-a_k=0$或 1（$k=1$，2，…，$n-1$），对任意 $i$，$j$，都存在 $s$，$t$，使得$a_i+a_j=a_s+a_t$，其中$i,j,s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$且两两不相等.

（1）若$m=2$，直接写出下列三个数列中所有符合题目条件的数列的序号：

①1，1，1，2，2，2；②1，1，1，1，2，2，2，2；③1，1，1，1，1，2，2，2，2

（2）记$S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，若$m=3$，证明：$S\ge 20$；

（3）若$m=2022$，求 $n$ 的最小值.

# 参考答案

## 第I卷（共40分）

**一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的）**

1.【答案】C

【分析】利用复数的除法化简可得出复数$z$.

【详解】由已知可得$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$.

故选：C.

2.【答案】D

【分析】根据向量平行的坐标运算求解.

【详解】因为$\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(x,-2)$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$，

所以$2\times(-2)=x\times 1$，所以$x=-4$.

故选：D

3.【答案】A

【分析】由题意逐一考查所给的选项运算结果是否为$\{x\mid x\geq 2\}$即可.

【详解】由题意可得$M\cup N=\{x\mid x<2\}$，则$\complement_U(M\cup N)=\{x\mid x\geq 2\}$，选项A正确；

$\complement_U M=\{x\mid x\geq 1\}$，则$N\cup\complement_U M=\{x\mid x>-1\}$，选项B错误；

$M\cap N=\{x\mid -1<x<1\}$，则$\complement_U(M\cap N)=\{x\mid x\leq -1\text{或}x\geq 1\}$，选项C错误；

$\complement_U N=\{x\mid x\leq -1\text{或}x\geq 2\}$，则$M\cup\complement_U N=\{x\mid x<1\text{或}x\geq 2\}$，选项D错误；

故选：A.

4.【答案】D

【分析】根据条件概率结合古典概型计算求解即可.

【详解】由已知条件得$P(A)=\dfrac{3}{5},P(AB)=\dfrac{3\times 2}{5\times 4}=\dfrac{3}{10}$,

由条件概率公式可得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}.$$

故选：D.

5.【答案】C

【分析】根据二项式定理展开式求解即可.

【详解】因为$T_{r+1}=C_8^r\left(2\sqrt{x}\right)^{8-r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=\left(-1\right)^r\times 2^{8-r}C_8^r x^{4-r}$，

令$4-r=0$，得$r=4$，

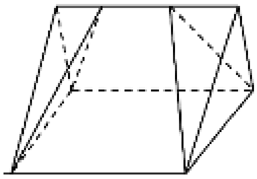
所以二项式展开式中的常数项为$T_5=\left(-1\right)^4\times 2^4C_8^4=1120$.

故选：C.

6.【答案】A

【分析】刍甍的体积为直三棱柱的体积减去两个相同的三棱锥的体积，计算得到答案.

【详解】如图所示：刍甍的体积为直三棱柱的体积减去两个相同的三棱锥的体积，



即$V=\frac{1}{2}\times1\times3\times4-2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times3\times\frac{1}{2}\times\left(4-2\right)=6-1=5$.

故选：A

7.【答案】B

【分析】利用等差数列前$n$项和的函数性质判断“对于任意$n\in\mathbf{N}^*$且$n\neq3$，$S_n>S_3$”与“$a_4>a_3$”推出关系，进而确定它们的关系.

【详解】由等差数列前$n$项和公式知：$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，

$\therefore$要使对于任意$n\in\mathbf{N}^*$且$n\neq3$，$S_n>S_3$，则$d>0$，即$\{a_n\}$是递增等差数列，

$\therefore$“对于任意$n\in\mathbf{N}^*$且$n\neq3$，$S_n>S_3$”必有“$a_4>a_3$”，

而$a_4>a_3$，可得$d>0$，但不能保证“对于任意$n\in\mathbf{N}^*$且$n\neq3$，$S_n>S_3$”成立，

$\therefore$“$a_4>a_3$”是“对于任意$n\in\mathbf{N}^*$且$n\neq3$，$S_n>S_3$”的必要而不充分条件.

故选：B.

8.【答案】A

【分析】由三角函数的图象与性质可求得参数，进而可得函数解析式，代入即可得解.

【详解】由函数的最小正周期$T$满足$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，得$\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$，解得$2<\omega<3$，

又因为函数图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$对称，所以$\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in Z$，且$b=2$，

所以$\omega=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}k,k\in Z$，所以$\omega=\frac{5}{2}$，$f(x)=\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+2=1$.

故选：A

9.【答案】A

【分析】求出 $AB$ 、 $BD$ 、 $AD$ 的长，利用余弦定理求出 $\cos\angle BAD$ ，再利用二倍角的余弦公式可求得 $\cos\angle BAC$ 的值.

【详解】依题意分析可知，当伞完全张开时， $AD=40-24=16(\text{cm})$ ,

因为 B 为 $AD'$ 的中点，所以， $AB=AC=\frac{1}{2}AD'=20(\text{cm})$ ,

当伞完全收拢时， $AB+BD=AD'=40(\text{cm})$ ，所以， $BD=20(\text{cm})$ ,

在 $\triangle ABD$ 中， $\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{400+256-400}{2\times20\times16}=\frac{2}{5}$ ,

所以， $\cos\angle BAC=\cos(2\angle BAD)=2\cos^2\angle BAD-1=2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2-1=-\frac{17}{25}$ .

故选：A

10.【答案】C

【分析】借助于图形来看四个选项，先由 $f(\frac{1}{4})=-1$ 可判断 A，实数 $m$ 所在区间 $(0, 1)$ 不关于原点对称，知 B 错，从图形上可得 $f(x)$ 在定义域上单调递增，C 对，先找到 $f(\frac{1}{2})=0$ ，再利用图形判断 D 错，

【详解】如图，因为点 $M$ 在以 $\left(0,1-\frac{1}{2\pi}\right)$ 为圆心， $\frac{1}{2\pi}$ 为半径的圆上运动，

对于 A，当 $m=\frac{1}{4}$ 时， $M$ 的坐标为 $(-\frac{1}{2\pi}$ ， $1-\frac{1}{2\pi})$ ，

直线 $AM$ 的方程为 $\frac{y-1}{1-\frac{1}{2\pi}-1}=\frac{x-0}{-\frac{1}{2\pi}-0}$ ，即 $y=x+1$ ，所以点 $N$ 的坐标为 $(-1,0)$ ，

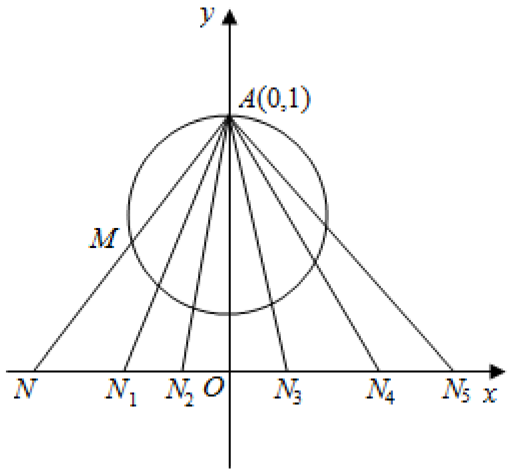
故 $f(\frac{1}{4})=-1$ ，即 A 错.

对于 B，因为实数 $m$ 所在区间 $(0, 1)$ 不关于原点对称，所以 $f(x)$ 不存在奇偶性．故 B 错.

对于 C，当实数 $m$ 越来越大时，直线 $AM$ 与 $x$ 轴的交点 $N(n,0)$ 也越来越往右，即 $n$ 也越来越大，所以 $f(x)$ 在定义域上单调递增，即 C 对.

对于 D，当实数 $m=\frac{1}{2}$ 时，对应的点在点 A 的正下方，此时点 $N(0,0)$ ，所以 $f(\frac{1}{2})=0$ ，

再由图形可知 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}$ ， $0)$ 对称，而非关于 $y$ 轴对称，即 D 错.




故选：C．

## 第II卷（共110分）

## 二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，共25分）

11.【答案】$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

【分析】根据被开方数是非负数，求解分式不等式即可求得结果.

【详解】要使得函数有意义，则$1-\frac{1}{x}\geq 0$，即$\frac{x-1}{x}\geq 0$，$x(x-1)\geq 0$且$x\neq 0$，

解得$x\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$，故$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

12.【答案】若$\alpha // \beta, m\subset\beta$，则$m \parallel \alpha$

【分析】分三种情况判断：①②作条件，③作结论；①③作条件，②作结论；②③作条件，①作结论. 只要以上三个命题为真即可.

【详解】解：将①②作条件，③作结论：若$m // \alpha$，$\alpha // \beta$，则$m\subset\beta$.此命题为假命题（结论应为$m\subset\beta$或$m // \beta$）；

将①③作条件，②作结论：若$m // \alpha$，$m\subset\beta$，则$\alpha // \beta$.此命题为假命题（结论应为$\alpha$与$\beta$相交或$\alpha // \beta$）；

将②③作条件，①作结论：若$\alpha // \beta$，$m\subset\beta$，则$m // \alpha$.由两平面平行的性质定理可知此命题为真命题.

故答案为：若$\alpha // \beta$，$m\subset\beta$，则$m // \alpha$.

13.【答案】 ①. 0.025 ②. 180

【分析】根据个小矩形面积之和为1即可求出$a$的值；根据频率分布直方图可以求出车速低于限速60 km/h的频率，从而可求出汽车有多少辆.

【详解】由$10\times(a+0.035+0.030+0.010)=1$解得：$a=0.025$.

这300辆汽车中车速低于限速60 km/h的汽车有$300\times10\times(0.025+0.035)=180$.

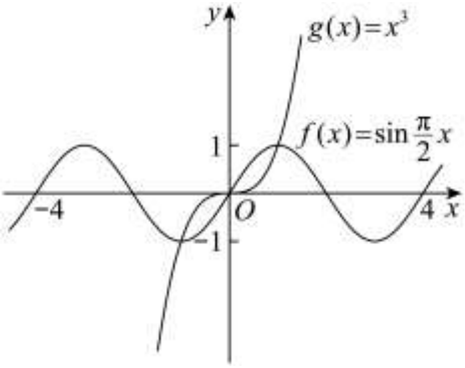
故答案为：0.025；180 .

14.【答案】 ①. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ ②. $\left[\frac{1}{8},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

【分析】①在坐标系中分别作出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象，利用图像法求解即可；

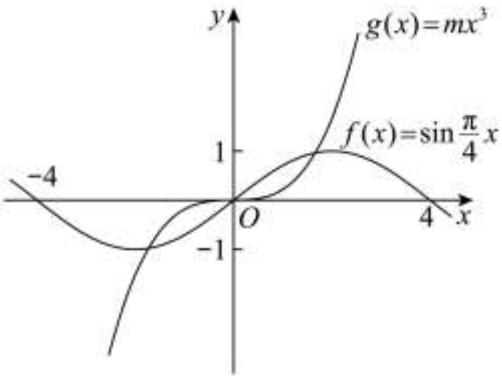
②在坐标系中分别作出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象，根据图象列不等式组求解即可.

【详解】①当 $\omega=\frac{\pi}{2}, m=1$ 时，$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 和 $g(x)=x^3$ 的图象如图所示，




由图象可得当 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 时，$f(x)>g(x)$；

②当 $\omega=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$ 的图象如图所示，




若不等式 $f(x)>g(x)$ 的解集中恰有一个正整数，

则由图象可得 $\begin{cases} f(1)>g(1) \\ f(2)\le g(2) \end{cases}$，即 $\begin{cases} \sin\frac{\pi}{4}>m \\ \sin\frac{\pi}{2}\le 8m \end{cases}$，解得 $m\in\left[\frac{1}{8},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

故答案为：$(-\infty,-1)\cup(0,1)$；$\left[\frac{1}{8},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

15.【答案】①⑤

【分析】对于①，利用等体积法转化为 $V_{B-BED_1}=V_{D_1-BEB_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle BEB_1}\cdot h$，从而得到体积为定值；

对于②，假设存在点 $E$ 使得 $B_1D\perp$ 平面 $BED_1$，经过推理得 $BB_1=B_1D_1$，与 $B_1D_1=\sqrt{2}BB_1$ 矛盾；

对于③，将侧面 $AA_1D_1D$ 与侧面 $AA_1B_1B$ 展开铺平即可得到最小值；

对于④，当点 $E$ 在点 A 时，此时 $AP$ 与平面 $BED_1$ 相交，得到在棱 $DC$ 上不存在一点 $P$，使得 $AP//$ 平面 $BED_1$；

对于⑤，利用立体几何的相关知识找到该截面，并表示截面的面积，求出最小值即可.

【详解】解：对于①，$V_{B-BED_1}=V_{D_1-BEB_1}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BEB_1}\cdot h$，显然 $S_{\triangle BEB_1}$ 是定值，

因为 $D_1A_1\perp$ 平面 $ABB_1A_1$，所以 $h$ 是定值，所以三棱锥 $B_1-BED_1$ 的体积是定值，①正确；

对于②，若存在点 $E$，使得 $B_1D\perp$ 平面 $BED_1$，又 $BD_1\subset$ 平面 $BED_1$，

可得 $BD_1\perp B_1D$，所以四边形 $BDD_1B_1$ 为正方形，

即 $BB_1=B_1D_1$，这与 $B_1D_1=\sqrt{2}BB_1$ 矛盾，②错误；

对于③，如图，将侧面 $AA_1D_1D$ 与侧面 $AA_1B_1B$ 展开铺平，则 $D_1E+BE$ 的最小值 $\sqrt{5}$，③错误；

对于④，当点 $E$ 在点 A 时，平面 $BED_1$ 即是平面 $ABD_1$，此时 $AP$ 与平面 $BED_1$ 相交，

故不存在点 $P$ 符合要求，④错误；

对于⑤，如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $A_1C\perp BD, A_1C\perp BC_1$，且 $BD, BC_1$ 是平面 $BDC_1$ 内两条相交直线，所以 $A_1C$ 上平面 $BDC_1$，又 $DM\subset$ 平面 $BDC_1$，

所以 $A_1C\perp DM$，因为 $M$ 是 $BC_1$ 上的动点，且过点 $A_1$ 的截面 $\alpha$ 垂直 $DM$，

所以截面 $\alpha$ 过点 $C$，截面 $\alpha$ 交 $D_1C_1$ 与 $G$，交 $AB$ 于 $H$，设 $D_1G=x\left(0\le x\le 1\right)$，

则 $A_1G=\sqrt{1+x^2}, CG=\sqrt{(1-x)^2+1}$，在 $\triangle A_1GC$ 中，可得

$$\cos\angle A_1GC=\frac{1+x^2+x^2-2x+2-3}{2\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}},$$

$$\sin\angle A_1GC=\sqrt{1-\left(\frac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2x^2-2x+2}}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}},$$

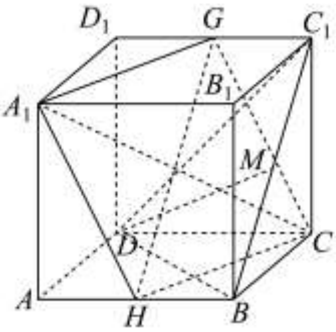
则该截面的面积为 $S=2\times\dfrac{1}{2}A_1G\cdot CG\sin\angle A_1GC=\sqrt{2x^2-2x+2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$，

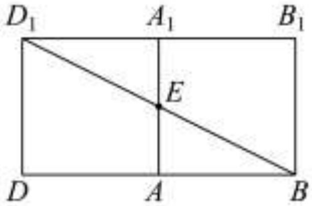
因为 $x\in[0,1]$，所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$S_{\min}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

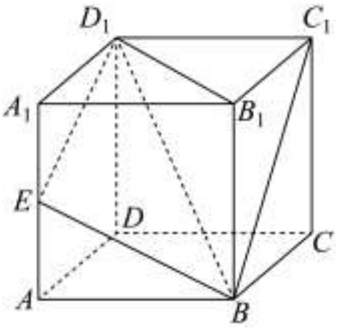
此时 $G, H$ 分别是 $D_1C_1$ 和 $AB$ 的中点，当 $M$ 是 $BC_1$ 中点时，$DM\perp BC_1$，即 $DM\perp GH$，

所以 $DM\perp$ 平面 $A_1HCG$，满足题意，⑤正确.

故答案为：①⑤.




**三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）**

16.【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；（3）不存在，理由见解析

【分析】

(1)利用面面垂直的性质得到线面垂直，再由线面垂直的性质得出 $CD \perp PA$；

(2)建立空间直角坐标系，利用向量法求解即可；

(3)由 $P$，C，M 三点共线，利用向量共线得出 $\overrightarrow{PM} = \lambda\overrightarrow{PC}$，利用线面垂直的判定定理证明平面 $PCD$，由于 $\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{PA}$ 不平行，则不存在棱 $PC$ 上的点 $M$，使得 $BM \perp$ 平面 $PCD$.

【详解】（1）在四棱锥 $P-ABCD$ 中

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$

又因为 $CD \perp AD$，$CD \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $CD \perp$ 平面 $PAD$

因为 $PA \subset$ 平面 $PAD$

所以 $CD \perp PA$

（2）取 $AD$ 中点 $O$，连接 $OP, OB$

因为 $PA = PD$

所以 $PO \perp AD$

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$

因为 $PO \subset$ 平面 $PAD$

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$

所以 $PO \perp OA, PO \perp OB$

因为 $CD \perp AD, BC // AD, AD = 2BC$

所以 $BC // OD, BC = OD$

所以四边形 $OBCD$ 是平行四边形

所以 $OB \perp AD$

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则

$O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,2,0), C(-1,2,0), D(-1,0,0), P(0,0,1).$

$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0),\overrightarrow{AP}=(-1,0,1)$.

设平面 $PAC$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -x+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1,z=1$.

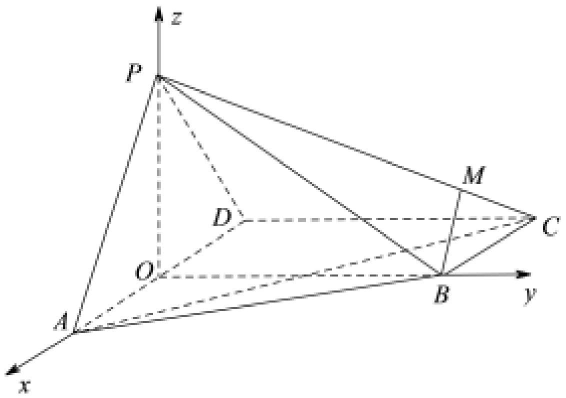
所以 $\vec{n}=(1,1,1)$.

因为平面 $PAD$ 的法向量 $\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$，

所以 $\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{OB}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由图可知，二面角 $C-PA-D$ 为锐二面角，

所以二面角 $C-PA-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.




（3）设 $M$ 是棱 $PC$ 上一点，则存在 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$.

设 $M(x_0,y_0,z_0)$，则 $\overrightarrow{PM}=(x_0,y_0,z_0-1),\overrightarrow{PC}=(-1,2,-1)$.

所以 $(x_0,y_0,z_0-1)=\lambda(-1,2,-1)$.

所以 $x_0=-\lambda,y_0=2\lambda,z_0=1-\lambda$.

所以 $M(-\lambda,2\lambda,1-\lambda)$.

所以 $\overrightarrow{BM}=(-\lambda,2\lambda-2,1-\lambda)$.

因为 $AP\perp PD,AP\perp CD,CD\cap PD=D,CD,PD\subset$ 平面 $PCD$

所以 $PA\perp$ 平面 $PCD$.

所以 $\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$ 是平面 $PCD$ 的一个法向量.

若 $BM\perp$ 平面 $PCD$，则 $\overrightarrow{BM}\,//\,\overrightarrow{PA}$.

所以$\begin{cases}2\lambda-2=0,\\ \lambda=1-\lambda.\end{cases}$

因为方程组无解，

所以在棱$PC$上不存在点$M$，使得$BM\perp$平面$PCD$.

【点睛】本题主要考查了利用线面垂直证明线线垂直以及利用向量法求二面角，属于中档题.

17.【答案】(1) 16；$\dfrac{1}{40}$

(2) 分布列见解析；$\dfrac{2}{5}$

(3)“一个”在前更合适

【分析】(1) 根据表中数据即可求得 $a$ 的值；根据古典概型的概率公示可求得甲类题材中“一”出现的概率；

(2) 确定$X\sim B(2,\dfrac{1}{5})$，根据二项分布的概率计算即可求得答案；

(3) 计算样本语料库$A$，$B$中“一个”和“一格”出现的概率，比较大小，可得结论.

【小问1详解】

由题意可得$a=30-6-4-2-2=16$；

故甲类题材中“一”出现的概率为$\dfrac{30}{1200}=\dfrac{1}{40}$；

【小问2详解】

由题意在甲类题材“新闻稿”中随机抽取2个“一”，搭配“一个”出现的概率为$P=\dfrac{6}{30}=\dfrac{1}{5}$，

则$X\sim B(2,\dfrac{1}{5})$，则$P(X=0)=C_2^0(\dfrac{1}{5})^0(1-\dfrac{1}{5})^2=\dfrac{16}{25}$，$P(X=1)=C_2^1(\dfrac{1}{5})^1(1-\dfrac{1}{5})^1=\dfrac{8}{25}$，

$P(X=2)=C_2^2(\dfrac{1}{5})^2(1-\dfrac{1}{5})^0=\dfrac{1}{25}$，

故$X$的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{16}{25}$ | $\dfrac{8}{25}$ | $\dfrac{1}{25}$ |

则$E(X)=2\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}$.

【小问3详解】

由题意知样本语料库$B$中“一格”出现的概率为$\dfrac{2}{800}=\dfrac{1}{400}$，

甲类题材中“一个”出现的概率为$\dfrac{6}{1200}=\dfrac{1}{200}$，

由于 $\frac{1}{200}>\frac{1}{400}$，故输入拼音“yige”时，“一个”在前面更合适.

18.【答案】（1）证明见解析；

（2）详见解析.

【分析】（1）把 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 转化为边 $a$、$b$ 之间的倍数关系，把 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 转化为三边 $a$、$b$、$c$ 之间的关系，综合可得证；

（2）条件①,与已知 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 矛盾，三角形无解，不可选；

条件②，通过三角形面积公式解得 $a$，可使△ $ABC$ 存在且唯一；

条件③，通过转化条件，可使△ $ABC$ 存在且唯一.

【小问 1 详解】

在△ $ABC$ 中，由 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，可得 $b=\frac{\sqrt{10}}{5}a$

则由 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，可得 $a^2=(\frac{\sqrt{10}a}{5})^2+c^2-2\times\frac{\sqrt{10}a}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}c$

即 $(a-c)(3a+5c)=0$，故有 $c=a$

故△ $ABC$ 为等腰三角形.

【小问 2 详解】

选择条件①：$\angle B=\frac{\pi}{6}$ 时，由（1）知 $c=a$，则有 $\angle A=\angle C=\frac{5\pi}{12}$，

此时 $\cos A=\cos\frac{5\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\neq\frac{\sqrt{10}}{10}$，

与已知矛盾，三角形无解.不能选；

选择条件②：△ $ABC$ 的面积为 $\frac{15}{2}$ 时，

由 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 得，$\sin B=\sin(\pi-2A)=2\sin A\cos A=2\times\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{5}$

故有 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}a^2=\frac{15}{2}$，解得 $a=5$，$c=5$ ,$b=\sqrt{10}$.

三角形存在且唯一，可选.

选择条件③：$AB$ 边上的高为 $3$.

由 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 得，$\sin B=\sin(\pi-2A)=2\sin A\cos A=2\times\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{5}$

可得 $a=\dfrac{3}{\sin B}=\dfrac{3}{\frac{3}{5}}=5$，则有 $c=5$，$b=\sqrt{10}$.

三角形存在且唯一，可选.

综上可知:选择条件②时，三角形存在且唯一，$b=\sqrt{10}$.

选择条件③时，三角形存在且唯一，$b=\sqrt{10}$.

19.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ (2) 点 $M$ 在以 $OD$ 为直径的圆上

【分析】

(1) 根据题意列出关于 $a$，$b$，$c$ 的方程组，解出 $a$，$b$，$c$ 的值，即可得到椭圆 $C$ 的标准方程;

(2) 设点 $P(x_0,\ y_0)$，则 $M(\dfrac{x_0}{2},\ y_0)$，求出直线 $AM$ 的方程，进而求出点 $N$ 的坐标，再利用中点坐标公式得到点 $D$ 的坐标，下面结合点 $P$ 在椭圆 $C$ 上证出 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{DM}=0$，所以点 $M$ 在以 $OD$ 为直径的圆上.

【详解】(1) 由题意可知，$\begin{cases} b=1 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$，

$\therefore$ 椭圆 $C$ 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 设点 $P(x_0,\ y_0)$，则 $M(\dfrac{x_0}{2},\ y_0)$，

$\therefore$ 直线 $AM$ 的斜率为 $\dfrac{y_0-1}{\frac{x_0}{2}-0}=\dfrac{2(y_0-1)}{x_0}$，

$\therefore$ 直线 $AM$ 的方程为：$y=\dfrac{2(y_0-1)}{x_0}x+1$，

令 $y=-1$ 得，$x=\dfrac{x_0}{1-y_0}$，

$\therefore$ 点 $N$ 的坐标为 $(\dfrac{x_0}{1-y_0},\ -1)$，

$\therefore$ 点 $D$ 的坐标为 $(\dfrac{x_0}{2(1-y_0)},\ -1)$，

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{DM}=(\dfrac{x_0}{2},\ y_0)\cdot(\dfrac{x_0}{2}-\dfrac{x_0}{2(1-y_0)},y_0+1)=\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2-\dfrac{{x_0}^2}{4-4y_0}+y_0$，

又$\because$ 点 $P(x_0,\ y_0)$ 在椭圆 $C$ 上，

$\therefore \dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，${x_0}^2=4-4{y_0}^2$，

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{DM}=1-\dfrac{4(1-{y_0}^2)}{4(1-y_0)}+y_0=1-(1+y_0)+y_0=0$，

$\therefore$ 点 $M$ 在以 $OD$ 为直径的圆上.

【点睛】本题主要考查了椭圆方程，考查了中点坐标公式，以及平面向量的基本知识，属于中档题.

20.【答案】（1）$(\mathrm{e}-1)x-y+\dfrac{1}{2}=0$

（2）答案见解析　（3）$[1,+\infty)$

【分析】（1）将 $k=1$ 代入函数中，对函数求导，求出切线斜率，利用点斜式即可；

（2）先对原函数求导，然后利用分类讨论的思想进行分析求解即可；

（3）构造函数，将问题转化，然后利用函数导数的单调性求解即可.

【小问 1 详解】

$\because k=1$，

$\therefore f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x^2$，

$\therefore f'(x)=\mathrm{e}^x-x$，

当 $x=1$ 时，$f(1)=\mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 切点坐标为 $\left(1,\ \mathrm{e}-\dfrac{1}{2}\right)$，

又 $f'(1)=\mathrm{e}-1$，$\therefore$ 切线斜率为 $\mathrm{e}-1$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处切线方程为：

$(\mathrm{e}-1)x-y+\dfrac{1}{2}=0$.

【小问 2 详解】

$\because f(x)=k\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x^2$，$x\in\mathbf{R}$，

$\therefore g(x)=f'(x)=k\mathrm{e}^x-x$，$x\in\mathbf{R}$，

$\therefore g'(x)=k\mathrm{e}^x-1$，$x\in\mathbf{R}$，

①当 $k\le 0$ 时，$g'(x)<0$ 成立，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $\mathrm{R}$，无单调递增区间.

②当 $k>0$ 时，令 $g'(x)=ke^x-1=0\Rightarrow x=-\ln k$，

所以当 $x<-\ln k$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,-\ln k)$ 上单调递减

$x>-\ln k$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-\ln k,+\infty)$ 上单调递增

综上：$k\le 0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\mathrm{R}$，无单调递增区间；

$k>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\ln k,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,-\ln k)$；

【小问 3 详解】

$\because 0<t\le s$，

$\therefore f(s)-f(t)>s-t$，

$\therefore f(s)-s>f(t)-t$，

令 $g(x)=f(x)-x$， $x>0$，

由已知可得：

$\because 0<t<s$ 且 $g(t)<g(s)$，

$\therefore g(x)$ 的单调区间是 $(0,+\infty)$

$\because g(x)=ke^{x}-\frac{1}{2}x^{2}-x$， $x>0$，

$\therefore x>0$ 时， $g'(x)=ke^{x}-x-1\ge 0$ 恒成立，

$\therefore k\ge\frac{x+1}{e^{x}}$， $(x>0)$，

令 $h(x)=\frac{x+1}{e^{x}}$， $x>0$，即证 $k\ge h(x)$， $(x>0)$，

$\therefore h'(x)=-\frac{x}{e^{x}}<0$ 成立，

$\therefore h(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$，

$\therefore h(x)<h(0)=1$，

$\therefore k\ge 1$ 恒成立，

综上： $k$ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

【点睛】方法点睛：对函数进行求导，结合函数导数与函数的单调性等性质解决，在证明不等式或求参数取值范围时，通常会对函数进行参变分离，构造新函数，对新函数求导再结合导数与单调性等解决.

21.【答案】(1) ②③ (2) 证明见解析

(3) 2030

【分析】(1) 根据题中数列满足的要求一一判断所给数列，可得结论；

(2) 设数列中 1，2，3 出现的频数依次为 $q_1,q_2,q_3$，判断出 $q_1,q_2,q_3$ 的取值情况，即可证明结论；

(3) 设 $1,2,3,\cdots,2022$ 出现的频数依次为 $q_1,q_2,\cdots,q_{2022}$，同 (2) 判断 $q_1,q_2,\cdots,q_{2022}$ 的取值情况，即可由 $q_1,q_2,\cdots,q_{2022}$ 取最小值时求得 $n$ 的最小值，然后分类讨论，证明此时符合题目要求即可.

【小问 1 详解】

对于①，由于 $a_1+a_2=2$，故 $a_s+a_t=3$ 或 $a_s+a_t=4$，不合题意；

对于②，当 $a_i+a_j=2$ 时，存在 $s$，$t$ 两两不相等，使得 $a_s+a_t=2$；

当 $a_i+a_j=3$ 时，存在 $s$，$t$ 两两不相等，使得 $a_s+a_t=3$；

当 $a_i+a_j=4$ 时，存在 $s$，$t$ 两两不相等，使得 $a_s+a_t=4$；符合题意；

同理③也符合题意，

故所有符合题目条件的数列的序号为②③；

【小问 2 详解】

证明：当 $m=3$ 时， 设数列中 1，2，3 出现的频数依次为 $q_1,q_2,q_3$，

由题意知 $q_i\ge 1(i=1,2,3)$，

假设 $q_1<4$，则有 $a_1+a_2<a_s+a_t$，（对任意 $s>t>2$），与已知矛盾，

故 $q_1\ge 4$，同理可证 $q_3\ge 4$；

假设 $q_2=1$，则存在唯一的 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $a_k=2$，

那么对于 $\forall s,t$，都有 $a_1+a_k=1+2\ne a_s+a_t$，（$k$，$s$，$t$ 两两不相等），

与已知矛盾，故 $q_2\ge 2$；

综上可得 $q_1\ge 4,q_3\ge 4,q_2\ge 2$，

所以 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n\ge 1\times 4+2\times 2+3\times 4=20$，

即 $S\ge 20$.

【小问 3 详解】

设$1,2,3,\cdots,2022$出现的频数依次为 $q_1,q_2,\cdots,q_{2022}$，

同（2）的证明，$q_1\ge 4,q_{2022}\ge 4,q_2\ge 2$，$q_{2021}\ge 2$，则 $n\ge 2030$；

取 $q_1=q_{2022}=4,q_2=q_{2021}=2,q_i=1$，$i=3,4,5,\cdots,2020$，

得到的数列为：$1,1,1,1,2,2,3,4,\cdots,2019,2020,2021,2021,2022,2022,2022,2022$，

下面证明该数列满足题目要求：

对于 $i,j\in\{1,2,\cdots,2030\}$，不妨令 $a_i\le a_j$，

如果 $a_i=a_j=1$，或 $a_i=a_j=2022$，由于 $q_1=4,q_{2022}=4$，故符合条件；

②如果 $a_i=1,a_j=2$，或 $a_i=2021,a_j=2022$，由于 $q_1=4,q_{2022}=4$，$q_2=2,q_{2021}=2$，

故也符合条件；

③如果 $a_i=1,a_j>2$，则可选取 $a_s=2$，$a_t=a_j-1$，

同样的，如果 $a_i<2021$，$a_j=2022$，则可选取 $a_s=a_i+1,a_t=2021$，

使得 $a_i+a_j=a_s+a_t$，且 $i,j,s,t$ 两两不相等；

④如果$1<a_i\le a_j<2022$，则可选取 $a_s=a_i-1,a_t=a_j+1$，

注意到这种情况每个数最多被选取了一次，因此也符合条件，

综上，对任意 $i$，$j$，都存在 $s$，$t$，使得 $a_i+a_j=a_s+a_t$，其中$i,j,s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$且两两不相等，

即数列$1,1,1,1,2,2,3,4,\cdots,2019,2020,2021,2021,2022,2022,2022,2022$符合题目要求，

故 $n$ 的最小值为 2030.

【点睛】难点点睛：本题是给出了数列需满足的要求。也可以认为是数列的一个新定义，因此解答的关键是要理解这些要求，按其要求去判断解答问题；难点在于第三问的解答，设$1,2,3,\cdots,2022$出现的频数依次为$q_1,q_2,\cdots,q_{2022}$，要判断出$q_1\geq 4,q_{2022}\geq 4,q_2\geq 2$，$q_{2021}\geq 2$，进而取$q_1=q_{2022}=4,q_2=q_{2021}=2,q_i=1$，求得$n$的最小值，继而分类讨论，证明求得的值符合题目要求.