



## 2018-2019 学年北师大附属实验中学八年级（上）期中数学试卷

### 一、选择题（本大题共 10 道小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 在 9 月份的“学农”活动中，剪纸不仅是同学们最喜欢的一门课程，很多老师也和同学们一起学习剪纸这项最古老的民间艺术，下面是刘红老师的剪纸作品，其中是轴对称图形的为（ ）



2. 下列各式中从左到右的变形，是因式分解的是（ ）

A.  $(a+2)(a-2) = a^2 - 4$

B.  $x^2+x-1 = (x-1)(x+2)+1$

C.  $a+ax+ay = a(x+y)$

D.  $a^2b - ab^2 = ab(a-b)$

3. 点  $A(3, -1)$  关于  $x$  轴的对称点是（ ）

A.  $(-1, 3)$

B.  $(-3, -1)$

C.  $(3, -1)$

D.  $(3, 1)$

4. 若分式  $\frac{x-1}{x+2}$  的值为零，则  $x$  的值是（ ）

A. 0

B. 1

C. -1

D. 2

5. 在  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$  中，已知  $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $AC = A'C'$ ，那么  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  运用的判定方法是（ ）

A. SAS

B. AAS

C. ASA

D. SSS

6. 下列说法中，错误的是（ ）

A. 全等三角形对应角相等

B. 全等三角形对应边相等

C. 全等三角形的面积相等

D. 面积相等的两个三角形一定全等

7. 等腰三角形的两边长分别为  $6\text{cm}$  和  $3\text{cm}$ ，则它的周长是（ ）

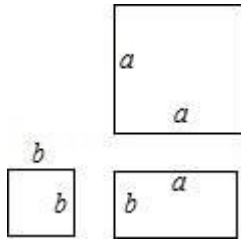
A.  $15\text{cm}$

B.  $12\text{cm}$

C.  $15\text{cm}$  或  $12\text{cm}$

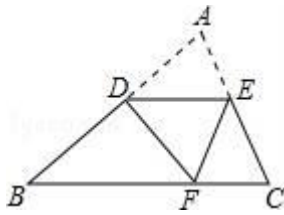
D. 以上都不正确

8. 如图，有三种卡片，分别是边长为  $a$  的正方形卡片 1 张，边长为  $b$  的正方形卡片 4 张和长宽为  $a$ 、 $b$  的长方形卡片 4 张，现使用这 9 张卡片拼成一个大的正方形，则这个大的正方形边长为（ ）



- A.  $a+3b$       B.  $2a+b$       C.  $a+2b$       D.  $4ab$

9. 如图,  $D$  是  $AB$  边上的中点, 将  $\triangle ABC$  沿过  $D$  的直线折叠, 使点  $A$  落在  $BC$  上  $F$  处, 若  $\angle B=50^\circ$ , 则  $\angle EDF$  的度数为 ( )

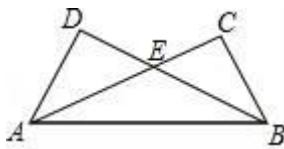


- A.  $50^\circ$       B.  $40^\circ$       C.  $80^\circ$       D.  $60^\circ$

10. 如图,  $AC=BD$ ,  $\angle ADB=\angle BCA=90^\circ$ ,  $AC$  与  $BD$  交于点  $E$ . 有下列结论:

- ①  $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ ;  
 ②  $\triangle ADE \cong \triangle BCE$ ;  
 ③ 点  $E$  在线段  $AB$  的垂直平分线上;  
 ④  $AC$ 、 $BD$  分别平分  $\angle DAB$  和  $\angle CBA$ ;

以上结论正确的个数有 ( )



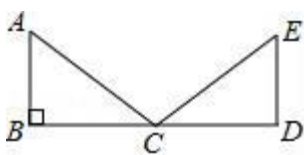
- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

二、填空题 (本大题共 8 道小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. 因式分解:  $x^2+2x=$ \_\_\_\_\_.

12. 使分式  $\frac{3}{a+4}$  有意义的  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

13. 如图, 已知  $AB \perp BD$ ,  $ED \parallel AB$ ,  $AB=ED$ , 要使  $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ , 可补充的一个条件是:\_\_\_\_\_. (答案不唯一, 写一个即可)

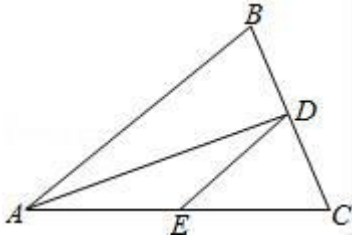


14. 若点  $(2x+1, 5)$  和  $(y, x-1)$  关于  $y$  轴对称, 则  $y=$ \_\_\_\_\_.



15. 已知等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为  $35^\circ$ ，则这个等腰三角形顶角的度数为\_\_\_\_\_.

16. 如图， $\triangle ABC$  中， $AD$  是  $\angle BAC$  的平分线， $DE \parallel AB$  交  $AC$  于点  $E$ ，若  $DE=7$ ， $CE=6$ ，则  $AC$  的长为\_\_\_\_\_.



17. 阅读下面材料：

在复习课上，围绕一道作图题，老师让同学们尝试应用学过的知识设计多种不同的作图方法，并交流其中蕴含的数学原理.

已知：直线和直线外的一点  $P$ .

求作：过点  $P$  且与直线垂直的直线  $PQ$ ，垂足为点  $Q$

某同学的作图步骤如下：

步骤	作法	推断
第一步	以点 $P$ 为圆心，适当长度为半径作弧，交直线于 $A, B$ 两点.	$PA=PB$
第二步	连接 $PA, PB$ ，作 $\angle APB$ 的平分线，交直线于点 $Q$ .	$\angle APQ = \angle$ _____
直线 $PQ$ 即为所求作.		$PQ \perp l$

请你根据该同学的作图方法完成以下推理：

$\because PA=PB$ ， $\angle APQ = \angle$ \_\_\_\_\_

$\therefore PQ \perp l$ . (依据：\_\_\_\_\_)

18. 若满足  $\angle AOB = 30^\circ$ ， $OA = 4$ ， $AB = k$  的  $\triangle AOB$  的形状与大小是唯一的，则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三.解答题 (本大题共 4 道小题，第 19~21 题 4 分，第 22 题 5 分，共 17 分)

19. (4 分) 分解因式： $3a^2 - 6a + 3$ .

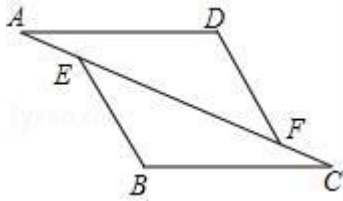
20. (4 分) 分解因式： $x^3y^2 - 16x^3$ .

21. (4 分) 计算： $\frac{2a^4b^2}{3c^3} \div \frac{6a^3b^2}{15c^2}$ .



22. (5分) 已知: 如图, 点  $A$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $C$  在同一条直线上,  $DF=BE$ ,  $\angle B=\angle D$ ,  $AD\parallel BC$ , 求证:

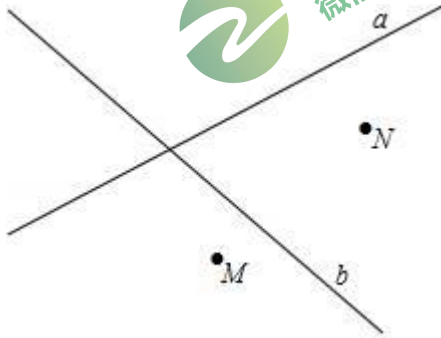
$$AE=CF.$$



四、解答题 (本大题共 3 道小题, 第 23 题 5 分, 第 24、25 题每小题 5 分, 共 17 分)

23. (5分) 先化简, 再求值:  $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \cdot \frac{x-y}{y^2-x^2}$ , 其中  $x=2017$ ,  $y=2018$ .

24. (6分) “学农”期间, 我们住在北京农学院,  $a$ 、 $b$  分别代表两条道路, 点  $M$ 、 $N$  分别代表宿舍楼和教学楼. 为了便于杨枫老师快速便捷地协调指挥, 现要建立联络站  $O$  点, 使  $O$  点到两条道路的距离相等, 且到宿舍楼和教学楼的距离也相等. 请用直尺和圆规画出所有满足条件的  $O$  点位置, 不写作法, 保留作图痕迹. 并指出杨枫老师应选择的联络站位置.



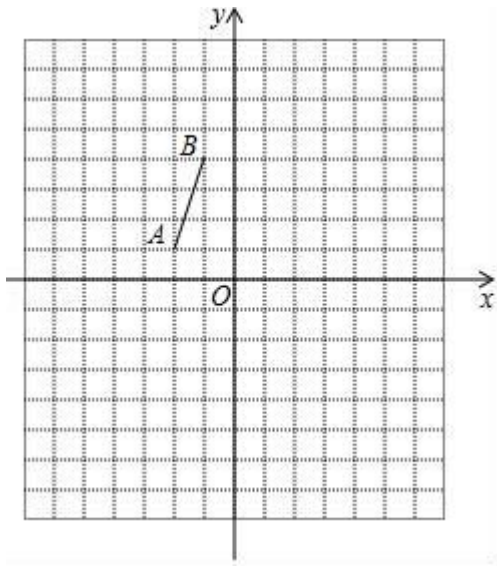
25. (6分) 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $A(-2, 1)$ 、 $B(-1, 4)$ , 连接  $AB$ ,

(1) 画线段  $A_1B_1$ , 使得线段  $A_1B_1$  与线段  $AB$  关于  $y$  轴对称, 请写出  $A_1$ 、 $B_1$  的坐标:  $A_1$ \_\_\_\_\_,  $B_1$ \_\_\_\_\_;

(2) 点  $P$  是  $y$  轴上一个动点, 请画出  $P$  点, 使  $PA+PB$  最小;

(3) 已知点  $C$  在坐标轴上, 且满足  $\triangle ABC$  是等腰  $\triangle ABC$ , 则所有符合条件的  $C$  点有\_\_\_\_\_个.



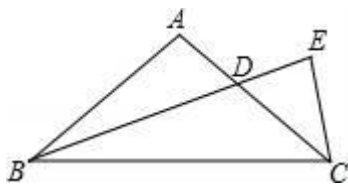


北京中考在线  
微信号: BJ\_zkao

五.解答题 (本大题共 2 道小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

26. (6 分) 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 100^\circ$ ,  $\angle ABC = 40^\circ$ ,  $BD$  是  $\triangle ABC$  的角平分线. 延长  $BD$  至  $E$ , 使  $DE = AD$ , 连接  $EC$ .

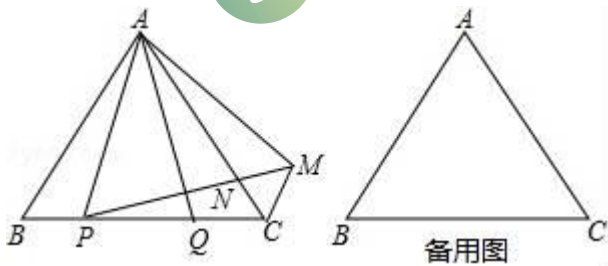
- (1) 直接写出  $\angle CDE$  的度数:  $\angle CDE =$  \_\_\_\_\_;
- (2) 猜想线段  $BC$  与  $AB + CE$  的数量关系为 \_\_\_\_\_, 并给出证明.



北京中考在线  
微信号: BJ\_zkao

27. (6 分) 如图, 在等边  $\triangle ABC$  中, 点  $P$ 、 $Q$  在边  $BC$  上, 并且满足  $BP = CQ$ , 作点  $Q$  关于直线  $AC$  的对称点  $M$ , 连接  $AP$ 、 $AQ$ 、 $AM$ 、 $CM$ 、 $PM$ , 线段  $PM$ 、 $AC$  交于点  $N$ ,

- (1) 当  $\angle BAP = 15^\circ$  时,  $\angle QAM =$  \_\_\_\_\_;
- (2) 求证:  $AP = PM$ ;
- (3) 若  $AB = 4$ , 当点  $P$  在边  $BC$  上运动时, 则线段  $CN$  的最大值为 \_\_\_\_\_.



六、填空题 (本大题共 6 分)

28. (6 分) 在学习整式乘法一章, 佩奇发现



$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3,$$

$$(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) = x^4 - y^4,$$

$$(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) = x^5 - y^5.$$

...

(1) 借助佩奇发现的等式，不完全归纳

$$(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 利用(1)中的规律，因式分解  $x^7 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 运用新知：计算  $1+5+5^2+5^3+\dots+5^{10} = \underline{\hspace{2cm}}.$

北京中考在线  
微信号: BJ\_zkao

### 七、解答题 (本大题共 6 分)

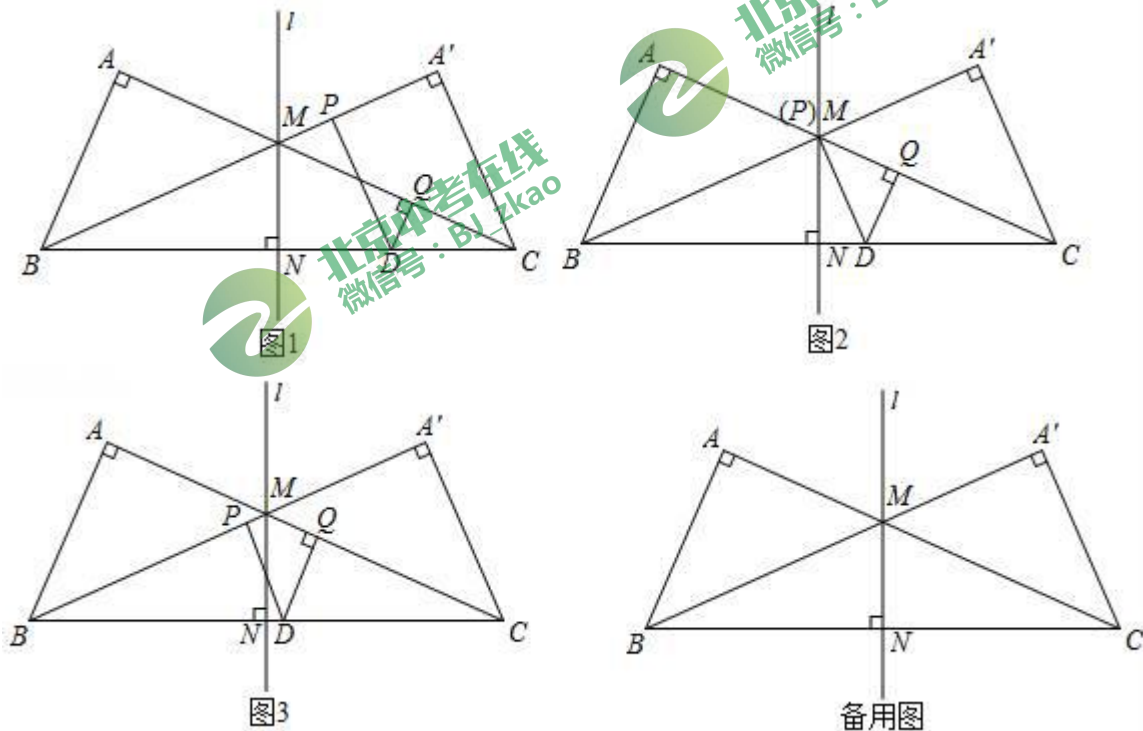
29. (6分) 如图1, 直线  $l$  是直角  $\triangle ABC$  的斜边  $BC$  的垂直平分线, 点  $A'$  与  $A$  关于直线  $l$  对称, 连接  $A'B$ 、 $A'C$ , 由轴对称的性质不难得到  $A'B$  与  $AC$  的交点  $M$  在直线  $l$  上, 点  $P$  是直线  $A'B$  上一点, 过点  $P$  作  $PD \parallel A'C$  交  $BC$  于点  $D$ , 过点  $D$  作  $DQ \perp AC$  于点  $Q$ ,

(1) 若  $\angle ABC = 65^\circ$ , 则  $\angle ACA' = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) 如图2, 当点  $P$  与点  $M$  重合时, 求证:  $DP + DQ = AB$ ;

(3) ①如图3, 当点  $P$  在线段  $A'B$  上 (不含端点) 时, 线段  $DP$ 、 $DQ$ 、 $AB$  的数量关系是  $\underline{\hspace{2cm}};$

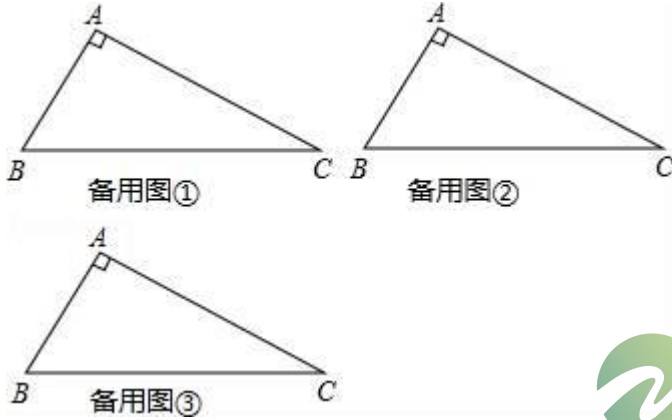
②当点  $P$  在线段  $A'B$  的延长线上时, 线段  $DP$ 、 $DQ$ 、 $AB$  的数量关系是  $\underline{\hspace{2cm}}.$



### 八、操作题 (本大题共 8 分)



30. (8分) (1) 已知 $\triangle ABC$ 中,  $\angle A=90^\circ$ ,  $\angle B=67.5^\circ$ , 请画一条直线, 把这个三角形分割成两个等腰三角形. (请你选用下面给出的备用图, 把所有不同的分割方法都画出来. 只需画图, 不必说明理由, 但要在图中标出相等两角的度数)



(2) 已知 $\triangle ABC$ 中,  $\angle C$ 是其最小的内角, 过顶点 $B$ 的一条直线把这个三角形分割成了两个等腰三角形, 请探求 $\angle ABC$ 与 $\angle C$ 之间的关系.



北京中考在线  
微信号: BJ\_zkao



北京中考在线  
微信号: BJ\_zkao



北京中考在线  
微信号: BJ\_zkao



北京中考在线  
微信号: BJ\_zkao



# 2018-2019 学年北京师大附属实验中学八年级（上）期中数学 试卷

参考答案与试题解析

## 一、选择题（本大题共 10 道小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. **【分析】**根据轴对称图形的概念：如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴进行分析.

**【解答】**解：A、不是轴对称图形，故此选项错误；

B、不是轴对称图形，故此选项错误；

C、是轴对称图形，故此选项正确；

D、不是轴对称图形，故此选项错误；

故选：C.

**【点评】**此题主要考查了轴对称图形，判断轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合.

2. **【分析】**直接利用因式分解的定义分析得出答案.

**【解答】**解：A、 $(a+2)(a-2)=a^2-4$ ，从左到右的变形是整式的乘法运算，不是因式分解，故此选项错误；

B、 $x^2+x-1=(x-1)(x+2)+1$ ，从左到右的变形，不是因式分解，故此选项错误；

C、 $a+ax+ay=a(1+x+y)$ ，故此选项错误；

D、 $a^2b-ab^2=ab(a-b)$ ，从左到右的变形，是因式分解，故此选项正确.

故选：D.

**【点评】**此题主要考查了因式分解，正确把握因式分解的定义是解题关键.

3. **【分析】**根据“关于  $x$  轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数”求解即可.

**【解答】**解：点  $A(3, -1)$  关于  $x$  轴的对称点  $A_1$  的坐标是  $(3, 1)$ .

故选：D.

**【点评】**本题考查了关于  $x$  轴、 $y$  轴对称的点的坐标，解决本题的关键是掌握好对称点的坐标规律：（1）关于  $x$  轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数；（2）关于  $y$  轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数.

4. **【分析】**分式的值是 0 的条件是：分子为 0，分母不为 0，则可得  $x-1=0$  且  $x+2 \neq 0$ ，从而解决



问题.

【解答】解：∵ $x - 1 = 0$  且  $x + 2 \neq 0$ ,

∴ $x = 1$ .

故选：B.

【点评】此题考查的是分式的值为零的条件，分式是 0 的条件中特别需要注意的是分母不能是 0，这是经常考查的知识点.

5. 【分析】两角及其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等. 根据全等三角形的判定方法结合已知条件可得答案.

【解答】解：∵ $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $AC = A'C'$ ，  
∴ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  (AAS)，

即 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  运用的判定方法是 AAS，

故选：B.

【点评】本题考查三角形全等的判定方法，判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、ASA、AAS、HL.

6. 【分析】根据全等三角形的性质：全等三角形对应边、对应角相等，能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形，进行分析即可.

【解答】解：A、全等三角形对应角相等，说法正确；

B、全等三角形对应边相等，说法正确；

C、全等三角形的面积相等，说法正确；

D、面积相等的两个三角形一定全等，说法错误，例如一边长为 6，这边上的高为 3 和一边长为 3，这边上的高为 6 的两个三角形，面积相等，却不全等；

故选：D.

【点评】此题主要考查了全等图形，关键是掌握全等三角形的性质.

7. 【分析】题目给出等腰三角形有两条边长为 3cm 和 6cm，而没有明确腰、底分别是多少，所以要进行讨论，还要应用三角形的三边关系验证能否组成三角形.

【解答】解：当腰为 3cm 时， $3 + 3 = 6$ ，不能构成三角形，因此这种情况不成立.

当腰为 6cm 时， $6 - 3 < 6 < 6 + 3$ ，能构成三角形；

此时等腰三角形的周长为  $6 + 6 + 3 = 15\text{cm}$ .

故选：A.

【点评】本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系；题目从边的方面考查三角形，涉及



分类讨论的思想方法. 求三角形的周长, 不能盲目地将三边长相加起来, 而应养成检验三边长能否组成三角形的好习惯, 把不符合题意的舍去.

8. 【分析】可根据拼前与拼后面积不变, 求出正方形的边长.

【解答】解: 设拼成后大正方形的边长为  $x$ , 则  $a^2+4ab+4b^2=x^2$ ,

则  $(a+2b)^2=x^2$ ,

$\therefore x=a+2b$ ,

故选: C.

【点评】本题考查了完全平方公式的几何背景以及整式的混合运算, 解题的关键是依据面积相等列方程.

9. 【分析】先根据图形翻折不变的性质可得  $AD=DF$ , 根据等边对等角的性质可得  $\angle B = \angle BFD$ , 再根据三角形的内角和定理列式计算可得  $\angle BDF$  的解, 再根据平角的定义和折叠的性质即可求解.

【解答】解:  $\because \triangle DEF$  是  $\triangle DEA$  沿直线  $DE$  翻折变换而来,

$\therefore AD=DF$ ,

$\because D$  是  $AB$  边的中点,

$\therefore AD=BD$ ,

$\therefore BD=DF$ ,

$\therefore \angle B = \angle BFD$ ,

$\because \angle B = 50^\circ$ ,

$\therefore \angle BDF = 180^\circ - \angle B - \angle BFD = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$ ,

$\therefore \angle EDF = (180^\circ - \angle BDF) \div 2 = 50^\circ$ .

故选: A.

【点评】本题考查的是图形翻折变换的图形能够重合的性质, 以及等边对等角的性质, 熟知折叠的性质是解答此题的关键.

10. 【分析】由“HL”可证  $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle BAC$ , 可得  $\angle DAB = \angle DBA$ ,  $\angle DBA = \angle CAB$ ,  $AD = BC$ , 由“AA”可证  $\triangle ADE \cong \triangle BCE$ , 可得  $AE = BE$ , 即可求解.

【解答】解:  $\because AC = BD$ ,  $AB = AB$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle BAC$  (HL)

$\therefore \angle DAB = \angle DBA$ ,  $\angle DBA = \angle CAB$ ,  $AD = BC$

$\therefore \angle DAE = \angle CBE$ , 且  $AD = BC$ ,  $\angle ADB = \angle BCA = 90^\circ$





$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCE$  (AAS)

$\therefore AE = BE$

$\therefore$  点  $E$  在线段  $AB$  的垂直平分线上,

故选:  $C$ .

**【点评】** 本题考查了全等三角形的判定和性质, 线段垂直平分线的性质, 熟练运用全等三角形的判定和性质是本题的关键.

## 二、填空题 (本大题共 8 道小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. **【分析】** 直接提取公因式  $x$  即可.

**【解答】** 解: 原式  $= x(x+2)$ ,

故答案为:  $x(x+2)$ .

**【点评】** 此题主要考查了提公因式法分解因式, 关键是正确找出公因式, 找公因式的方法: 当各项系数都是整数时, 公因式的系数应取各项系数的最大公约数; 字母取各项的相同的字母, 而且各字母的指数取次数最低的; 取相同的多项式, 多项式的次数取最低的.

12. **【分析】** 直接利用分式的定义分析得出答案.

**【解答】** 解: 分式  $\frac{3}{a+4}$  有意义,

则  $a+4 \neq 0$ ,

解得:  $a \neq -4$ .

故答案为:  $a \neq -4$ .

**【点评】** 此题主要考查了分式有意义的条件, 分式有意义的条件是分母不等于零.

13. **【分析】** 依据  $AB \perp BD$ ,  $ED \parallel AB$ , 可得  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ , 再根据  $AB = ED$ , 即可得到可补充的一个条件, 使得  $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ .

**【解答】** 解:  $\because AB \perp BD$ ,  $ED \parallel AB$ ,

$\therefore \angle B = \angle D = 90^\circ$ ,

又  $\because AB = ED$ ,

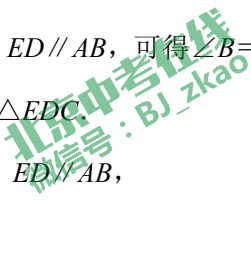
$\therefore$  当  $\angle A = \angle E$  时,  $\triangle ABC \cong \triangle EDC$  (ASA);

当  $\angle ACB = \angle ECD$  时,  $\triangle ABC \cong \triangle EDC$  (AAS);

当  $BC = DC$  时,  $\triangle ABC \cong \triangle EDC$  (SAS);

当  $AC = EC$  时,  $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle EDC$  (HL);

故答案为:  $\angle A = \angle E$  或  $\angle ACB = \angle ECD$  或  $BC = DC$  或  $AC = EC$ .







【点评】本题主要考查了全等三角形的判定，掌握全等三角形的判定定理是解题的关键.

14. 【分析】根据关于  $y$  轴对称横坐标互为相反数、纵坐标相等列出方程求得  $x$ 、 $y$  的值即可.

【解答】解：∵点  $(2x+1, 5)$  和  $(y, x-1)$  关于  $y$  轴对称，

$$\therefore 2x+1 = -y, x-1=5,$$

解得：  $x=6, y=-13$ ，

故答案为：  $-13$ 。

【点评】本题考查了关于  $x$  轴、 $y$  轴对称的点的坐标的知识，牢记其坐标特点是解答本题的关键，难度不大.

15. 【分析】分别从  $\triangle ABC$  是锐角三角形与钝角三角形去分析求解即可求得答案.

【解答】解：如图（1），

$$\because AB=AC, BD \perp AC,$$

$$\therefore \angle ADB=90^\circ,$$

$$\because \angle ABD=35^\circ,$$

$$\therefore \angle A=55^\circ;$$

如图（2），

$$\because AB=AC, BD \perp AC,$$

$$\therefore \angle BDC=90^\circ,$$

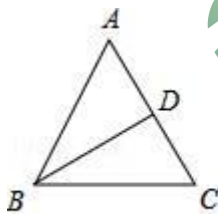
$$\because \angle ABD=35^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD=55^\circ,$$

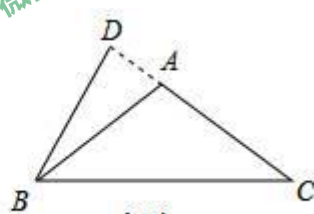
$$\therefore \angle BAC=125^\circ;$$

综上所述，它的顶角度数为：  $55^\circ$  或  $125^\circ$ 。

故答案为：  $55^\circ$  或  $125^\circ$ 。



(1)



(2)

【点评】此题考查了等腰三角形的性质. 此题难度适中，注意掌握分类讨论思想的应用是解此题的关键.

16. 【分析】先根据角平分线的性质得出  $\angle BAD = \angle CAD$ ，再根据平行线的性质得出  $\angle CAD = \angle ADE$ ，

故可得出  $AE = DE = 6$ ，再根据  $AC = AE + CE$  即可得出结论.



**【解答】**解：∵ $\triangle ABC$ 中， $AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\because DE \parallel AB, DE = 7, CE = 6,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ADE,$$

$$\therefore AE = DE = 7,$$

$$\therefore AC = AE + CE = 7 + 6 = 13.$$

故答案为：13.

**【点评】**本题考查的是等腰三角形的判定与性质，熟知等腰三角形的两底角相等是解答此题的关键.

17. **【分析】**由 $AP=AQ$ 、 $BP=BQ$ ，依据到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上知点 $A$ 、 $B$ 在线段 $PQ$ 的中垂线上，据此可得 $PQ \perp l$ .

**【解答】**解：由作图可知 $AP=AQ$ 、 $BP=BQ$ ，

所以点 $A$ 、 $B$ 在线段 $PQ$ 的中垂线上（到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上），  
所以 $PQ \perp l$ ，

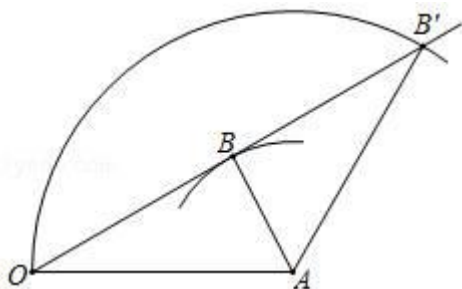
故答案为： $BPQ$ ，等腰三角形三线合一

**【点评】**本题主要考查作图 - 基本作图，解题的关键是熟练掌握线段中垂线的性质及过直线外一点作已知直线的垂线的尺规作图.

18. **【分析】**分两种情况讨论，依据 $\angle AOB = 30^\circ$ ， $OA = 4$ ， $AB = k$ 的 $\triangle AOB$ 的形状与大小是唯一的，即可得到 $k$ 的取值范围.

**【解答】**解：如图所示，以点 $A$ 为圆心，2为半径画弧，弧线与射线 $OB$ 有唯一交点 $B$ ，即 $\triangle AOB$ 的形状与大小是唯一的；

以 $A$ 为圆心，大于等于4为半径画弧，弧线与射线 $OB$ （不含端点）有唯一交点 $B'$ ，即 $\triangle AOB'$ 的形状与大小是唯一的；



综上所述， $k$ 的取值范围是 $k=2$ 或 $k \geq 4$ .



故答案为： $k=2$  或  $k \geq 4$ .

**【点评】** 本题主要考查了全等三角形的判定，需要通过三角形的角与边的关系来判断，考虑最特殊的两种情况，即直角三角形以及等腰三角形.

### 三.解答题（本大题共 4 道小题，第 19~21 题 4 分，第 22 题 5 分，共 17 分）

19. **【分析】** 直接提取公因式 3，再利用完全平方公式分解因式即可.

**【解答】** 解：原式  $= 3(a^2 - 2a + 1)$   
 $= 3(a - 1)^2$ .

**【点评】** 此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式，正确运用公式是解题关键.

20. **【分析】** 直接提取公因式  $x^3$ ，再利用平方差公式分解因式即可.

**【解答】** 解：原式  $= x^3(y^2 - 16)$   
 $= x^3(y + 4)(y - 4)$ .

**【点评】** 此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式，正确应用公式是解题关键.

21. **【分析】** 原式利用除法法则变形，约分即可得到结果.

**【解答】** 解：原式  $= \frac{2a^4b^2}{3c^3} \cdot \frac{15c^2}{6a^3b^2} = \frac{5a}{3c}$ .

**【点评】** 此题考查了分式的乘除法，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

22. **【分析】** 由平行线性质可得  $\angle A = \angle C$ ，由“ $AAS$ ”可证  $\triangle ADF \cong \triangle CBE$ ，可得  $AF = CE$ ，即可得结论.

**【解答】** 证明：  $\because AD \parallel BC$ ,

$\therefore \angle A = \angle C$ ，且  $\angle B = \angle D$ ， $DF = BE$ ，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$  ( $AAS$ )

$\therefore AF = CE$

$\therefore AF - EF = CE - EF$

$\therefore AE = CF$

**【点评】** 本题考查了全等三角形的判定和性质，灵活运用全等三角形的判定是本题的关键.

### 四、解答题（本大题共 3 道小题，第 23 题 5 分，第 24、25 题每小题 5 分，共 17 分）

23. **【分析】** 根据分式的乘法可以化简题目中的式子，然后将  $x$ 、 $y$  的值代入化简后的式子即可解答本题.

**【解答】** 解：  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{y^2 - x^2}$



$$= \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} \cdot \frac{x-y}{(y+x)(y-x)}$$

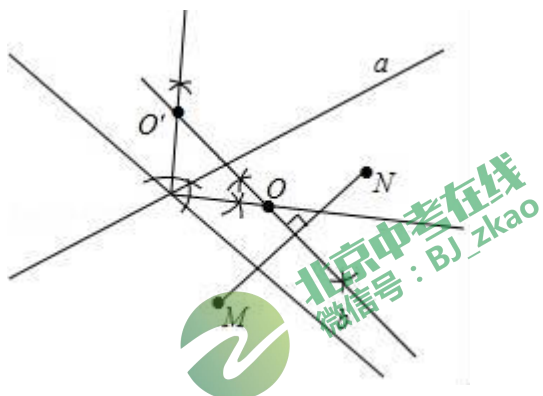
$$= \frac{1}{y-x},$$

当  $x=2017$ ,  $y=2018$  时, 原式  $\frac{1}{2018-2017}=1$ .

**【点评】** 本题考查分式的化简求值, 解答本题的关键是明确分式化简求值的方法.

24. **【分析】** 直接利用角平分线的作法以及线段垂直平分线的作法得出交点即可得出答案.

**【解答】** 解: 如图所示: 点  $O$  即为所求.



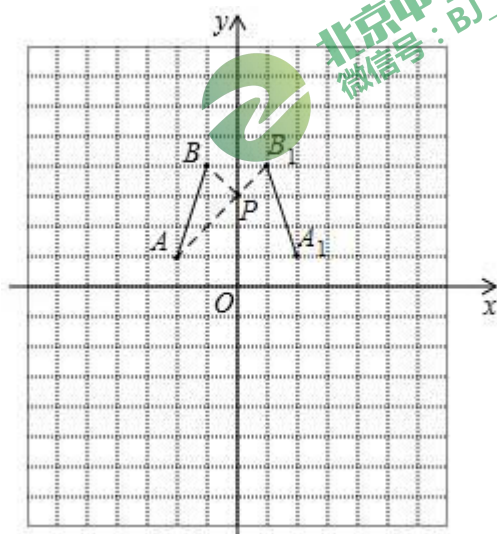
**【点评】** 此题主要考查了应用设计与作图, 正确掌握角平分线的性质以及线段垂直平分线的性质是解题关键.

25. **【分析】** (1) 依据线段  $A_1B_1$  与线段  $AB$  关于  $y$  轴对称, 即可得到线段  $A_1B_1$ , 并得到  $A_1$ 、 $B_1$  的坐标;

(2) 依据两点之间线段最短, 连接  $AB_1$  交  $y$  轴于点  $P$ , 则  $PA+PB$  最小;

(3) 依据点  $C$  在坐标轴上, 且  $\triangle ABC$  是等腰  $\triangle ABC$ , 即可得出所有符合条件的  $C$  点.

**【解答】** 解: (1) 如图所示, 线段  $A_1B_1$  即为所求,  $A_1(2, 1)$ 、 $B_1(1, 4)$ ;

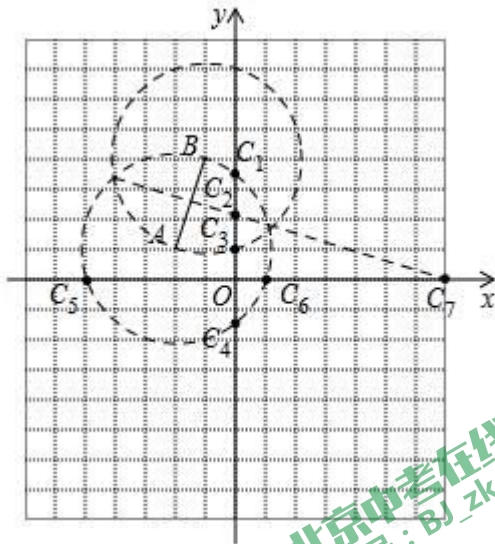




故答案为：(2, 1)；(1, 4)；

(2) 如图所示，点 P 即为所求；

(3) 如图所示，满足  $\triangle ABC$  是等腰  $\triangle ABC$  的 C 点有 7 个。



故答案为：7.

**【点评】**此题主要考查了轴对称变换作图以及最短路线问题，正确得出对应点位置是解题关键. 凡是涉及最短距离的问题，一般要考虑线段的性质定理，结合轴对称变换来解决，多数情况要作点关于某直线的对称点.

### 五.解答题 (本大题共 2 道小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

26. **【分析】** (1) 由角平分线的性质和三角形内角和定理可求  $\angle CDE$  的度数;

(2) 在  $BC$  上截取  $BF=AB$ , 由“SAS”可证  $\triangle ABD \cong \triangle FBD$ , 可得  $AD=DF$ ,  $\angle ADB = \angle BDF = 60^\circ$ , 可得  $\angle FDC = 180^\circ - \angle ADB - \angle BDF = 60^\circ = \angle EDC$ , 由“SAS”可证  $\triangle CDF \cong \triangle CDE$ , 可得  $CE=CF$ , 则可得结论.

**【解答】** 解: (1)  $\because \angle ABC = 40^\circ$ ,  $BD$  平分  $\angle ABC$ ,

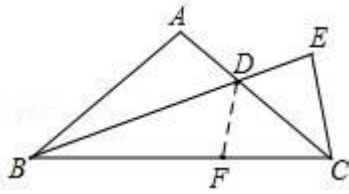
$$\therefore \angle ABD = 20^\circ$$

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle A - \angle ABD = 60^\circ = \angle CDE,$$

故答案为:  $60^\circ$

(2)  $BC = AB + CE$

理由如下: 如图, 在  $BC$  上截取  $BF = AB$ ,



$\because BD$  平分  $\angle ABC$ ,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$ , 且  $BD = BD$ ,  $AB = BF$ ,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle FBD$  (SAS)

$\therefore AD = DF$ ,  $\angle ADB = \angle BDF = 60^\circ$

$\therefore \angle FDC = 180^\circ - \angle ADB - \angle BDF = 60^\circ = \angle EDC$ , 且  $DE = DF$ ,  $CD = CD$

$\therefore \triangle CDF \cong \triangle CDE$  (SAS)

$\therefore CE = CF$ ,

$\therefore BC = BF + CF = AB + CE$

故答案为:  $BC = AB + CE$

**【点评】** 本题考查了全等三角形的判定和性质, 角平分线的性质, 添加恰当辅助线构造全等三角形是本题的关键.

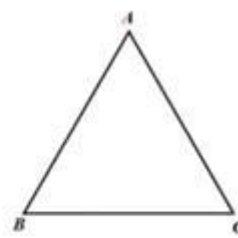
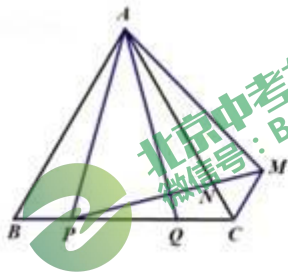
27. 如图, 在等边  $\triangle ABC$  中, 点  $P$ 、 $Q$  在边  $BC$  上, 并且满足  $BP = CQ$ , 作点  $Q$  关于直线  $AC$  的对称点  $M$ , 连接  $AP$ 、 $AQ$ 、 $AM$ 、 $CM$ 、 $PM$ , 线段  $PM$ 、 $AC$  交于点  $N$ ,

(1) 当  $\angle BAP = 15^\circ$  时,  $\angle QAM =$  \_\_\_\_\_  $^\circ$ ;

(2) 求证:  $AP = PM$ ;

(3) 若  $AB = 4$ , 当点  $P$  在边  $BC$  上运动时, 线段  $CN$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

27. **【分析】**



备用图

(1) 根

据等边三角形的证明:  $\triangle ABP \cong \triangle ACQ$  (SAS), 得  $\angle CAQ = \angle BAP = 15^\circ$ , 在证明  $\triangle AQC \cong \triangle AMC$

(SSS), 得  $\angle CAM = \angle CAQ = 15^\circ$ , 相加可得结论, 也可以根据等腰三角形的性质得到  $\angle APQ = \angle AQP$ , 由三角形外角的性质即可得到  $\angle APQ$  的度数, 即可得出  $\angle PAQ$ , 进而得到  $\angle BAQ$  的度数;

(2) 如图 2 根据等腰三角形的性质得到  $\angle APQ = \angle AQP$ , 由邻补角的定义得到  $\angle APB = \angle AQC$ , 由点  $Q$  关于直线  $AC$  的对称点为  $M$ , 得到  $AQ = AM$ ,  $\angle OAC = \angle MAC$ , 等量代换得到  $\angle MAC = \angle BAP$ , 推出  $\triangle APM$  是等边三角形, 根据等边三角形的性质即可得到结论.





27. (1)  $\angle QAM = 30^\circ$  ; .....1分

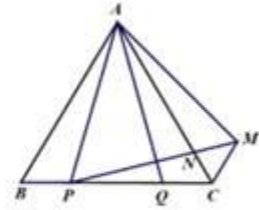
(2) 可证  $AP = AQ$ ,  $\angle BAP = \angle QAC$   
.....1分, 二者有一个即可给1分

可证  $AQ = AM$  即  $AP = AM$ ,  
.....1分

$\angle PAM = \angle BAC = 60^\circ$  ;  
.....1分

所以得等边  $\triangle APM$ ,  
所以  $AP = PM$ ; .....1分

(3) 1. ....1分



解: (1)  $\because \triangle ABC$  是等边三角形,

$\therefore AB = AC, \angle B = \angle ACB = 60^\circ$  ,

$\because BP = CQ$ ,

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACQ$  (SAS)

$\therefore \angle CAQ = \angle BAP = 15^\circ$  ,

$\because$  点  $Q$  关于直线  $AC$  的对称点  $M$ ,

$\therefore AQ = AM, CQ = CM$ ,

$\because AC = AC$ ,

$\therefore \triangle AQC \cong \triangle AMC$  (SSS) ,

$\therefore \angle CAM = \angle CAQ = 15^\circ$  ,

$\therefore \angle QAM = 30^\circ$  ;

故答案为:  $30^\circ$  ;

(2) 由 (1) 知:  $\triangle ABP \cong \triangle ACQ \cong \triangle ACM$ ,

$\therefore AP = AQ = AM, \angle CAM = \angle BAP$ ,

$\because \angle BAC = 60^\circ$  ,

$\therefore \angle PAM = 60^\circ$  ,

$\therefore \triangle APM$  是等边三角形,

$\therefore AP = PM$ ;

(3)

$AP = AQ$ ,

$\therefore \angle APQ = \angle AQP$ ,

$\therefore \angle APQ = \angle AQP$ ,







$\because \triangle ABC$  是等边三角形,  
 $\therefore \angle B=60^\circ$  ,  
 又  $\because \angle BAP=15^\circ$  ,  
 $\therefore \angle AQB=\angle APQ=\angle BAP+\angle B=75^\circ$  ,  
 $\therefore \angle PAQ=30^\circ$  ,  
 $\therefore \angle BAQ=15^\circ +30^\circ =45^\circ$  ;

(2) ①如图 2, 作点  $Q$  关于直线  $AC$  的对称点  $M$ , 连接  $AM$ 、 $PM$ .  
 ②相等.

$\because AP=AQ$ ,  
 $\therefore \angle APQ=\angle AQP$ ,  
 $\therefore \angle APB=\angle AQC$ ,  
 $\because \triangle ABC$  是等边三角形,  
 $\therefore \angle B=\angle C=60^\circ$  ,  
 $\therefore \angle BAP=\angle CAQ$ ,  
 $\because$  点  $Q$  关于直线  $AC$  的对称点为  $M$ ,  
 $\therefore AQ=AM$ ,  $\angle QAC=\angle MAC$ ,  
 $\therefore \angle MAC=\angle BAP$ ,  
 $\therefore \angle BAP+\angle PAC=\angle MAC+\angle CAP=60^\circ$  ,  
 $\therefore \angle PAM=60^\circ$  ,  
 $\because AP=AQ$ ,  
 $\therefore AP=AM$ ,  
 $\therefore \triangle APM$  是等边三角形,  
 $\therefore AM=PM$ .

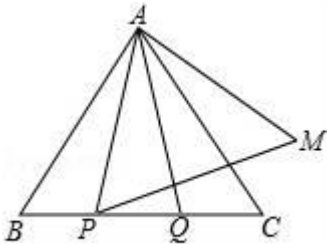


图2

【点评】 本题考查了等边三角形的性质和判定, 等腰三角形的性质, 三角形的外角的性质, 轴对



称的性质，熟练掌握等边三角形的判定和性质是解题的关键。

### 六、填空题（本大题共 6 分）

28. 【分析】根据题目中的规律解答即可。

【解答】解：（1） $(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n$ ;

（2） $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ ;

（3） $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{10} = \frac{1}{4} \times (5 - 1)(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{10}) = \frac{1}{4}(5^{11} - 1)$  .

故答案为： $x^n - y^n$ ； $(x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ ； $\frac{1}{4}(5^{11} - 1)$

【点评】本题考查了平方差公式，正确的找出规律是解题的关键。

### 七、解答题（本大题共 6 分）

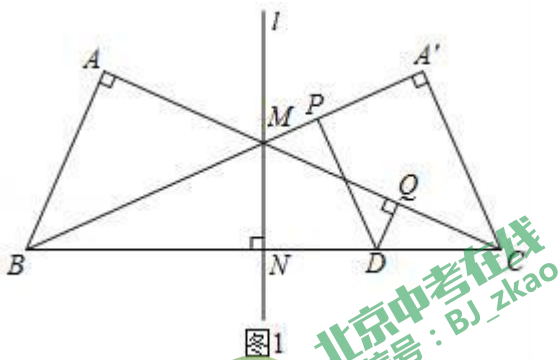
29. 【分析】（1）根据  $\angle ACA' = \angle BCA' - \angle ACB$ ，只要求出  $\angle ACB$ ， $\angle A'CB$  即可；

（2）利用面积法： $S_{\triangle BCM} = S_{\triangle BDM} + S_{\triangle CMD}$  即可证明；

（3）①结论： $AB = DQ + DP$ . 如图 3 中，利用面积法：根据  $S_{\triangle BCM} = S_{\triangle BDM} + S_{\triangle CMD}$  即可证明；

②结论： $AB = DQ - DP$ . 如图 4 中，连接  $DM$ . 利用面积法：根据  $S_{\triangle BCM} = S_{\triangle CMD} - S_{\triangle BDM}$ ，即可证明；

【解答】（1）解：如图 1 中，



$\because \angle ABC = 65^\circ, \angle A = 90^\circ,$

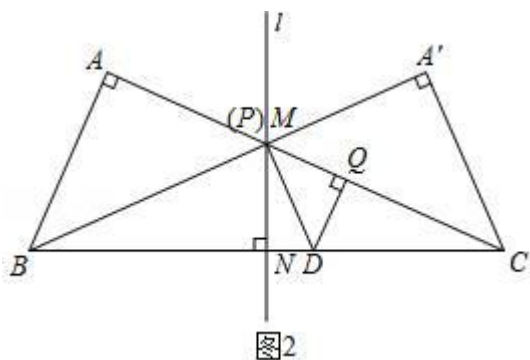
$\therefore \angle ACB = 25^\circ,$

$\because \angle A'CB = \angle ABC = 65^\circ$

$\therefore \angle ACA' = 65^\circ - 25^\circ = 40^\circ .$

故答案为  $40^\circ$  .

（2）证明：如图 2 中，



$\because PD \parallel CA'$  ,

$\therefore \angle DPB = \angle A' = 90^\circ$  ,

$\therefore DP \perp A'B$  ,

$\because DQ \perp AC$  ,  $S_{\triangle BCM} = S_{\triangle BDM} + S_{\triangle CMD}$  ,

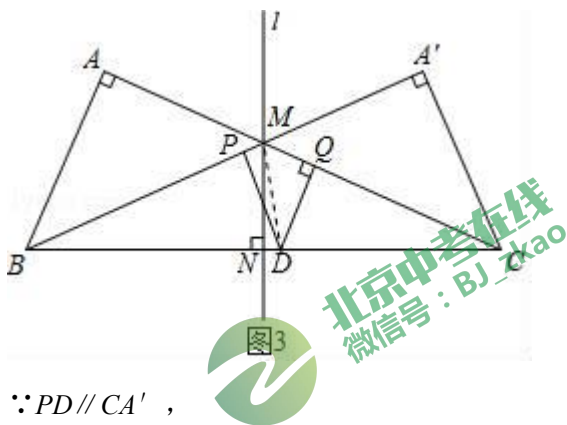
$$\therefore \frac{1}{2} \cdot CM \cdot BA = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot DP + \frac{1}{2} \cdot CM \cdot DQ$$

$\because BM = CM$  ,

$\therefore AB = DP + DQ$  .

(3) ①结论:  $AB = DP + DQ$  .

理由: 连接  $DM$  .



$\because PD \parallel CA'$  ,

$\therefore \angle DPB = \angle A' = 90^\circ$  ,

$\therefore DP \perp A'B$  ,

$\because DQ \perp AC$  ,  $S_{\triangle BCM} = S_{\triangle BDM} + S_{\triangle CMD}$  ,

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot CM \cdot BA = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot DP + \frac{1}{2} \cdot CM \cdot DQ$$

$\because BM = CM$  ,

$\therefore AB = DP + DQ$  .





故答案为  $AB=DQ+DP$ .

②结论:  $AB=DQ - DP$ .

理由: 如图 4 中, 连接  $DM$ .

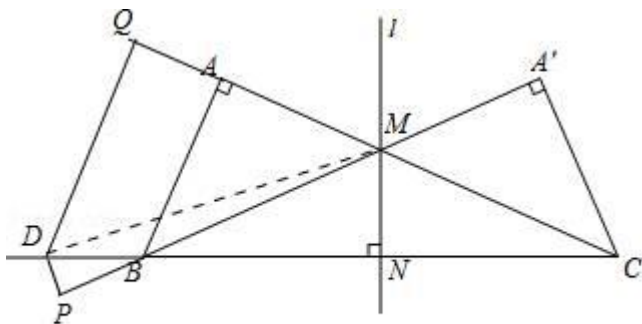


图4

$\because PD \parallel CA'$  ,

$\therefore \angle DPB = \angle A' = 90^\circ$  ,

$\therefore DP \perp A'B$  ,

$\because DQ \perp AC$  ,  $S_{\triangle BCM} = S_{\triangle CMD} - S_{\triangle BDM}$  ,

$\therefore \frac{1}{2} \cdot CM \cdot BA = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot DQ - \frac{1}{2} \cdot BM \cdot DP$

$\because BM = CM$  ,

$\therefore AB = DQ - DP$ .

故答案为:  $AB = DQ - DP$ .

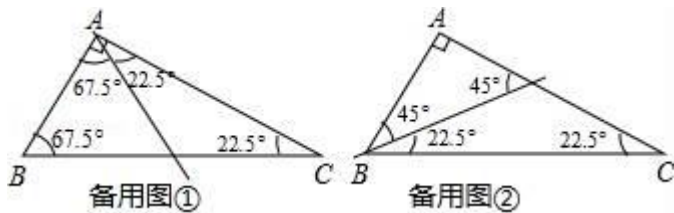
**【点评】** 本题属于三角形综合题, 考查了平行线的性质, 直角三角形的性质, 三角形的面积等知识, 解题的关键是学会利用面积法解决线段之间的关系, 属于中考压轴题.

## 八、操作题 (本大题共 8 分)

30. **【分析】** (1) 已知角度, 要分割成两个等腰三角形, 可以运用直角三角形、等腰三角形性质结合三角形内角和定理, 先计算出可能的角度, 或者先从草图中确认可能的情况, 及角度, 然后画上.

(2) 在 (1) 的基础上, 由“特殊”到“一般”, 需要把直角三角形分成两个等腰三角形的各种情形列方程, 可得出角与角之间的关系.

**【解答】** 解: (1) 如图 (共有 2 种不同的分割法).



(2) 设  $\angle ABC=y$ ,  $\angle C=x$ , 过点  $B$  的直线交边  $AC$  于  $D$ . 在  $\triangle DBC$  中,

①若  $\angle C$  是顶角, 如图 1, 则  $\angle CBD=\angle CDB=90^\circ - \frac{1}{2}x$ ,  $\angle A=180^\circ - x - y$ .

而  $\angle ADB > 90^\circ$ , 此时只能有  $\angle A = \angle ABD$ , 即  $180^\circ - x - y = y - (90^\circ - \frac{1}{2}x)$

即  $3x+4y=540^\circ$ , 即  $\angle ABC=135^\circ - \frac{3}{4}\angle C$ ;

②若  $\angle C$  是底角,

第一种情况: 如图 2, 当  $DB=DC$  时, 则  $\angle DBC=x$ ,  $\triangle ABD$  中,  $\angle ADB=2x$ ,  $\angle ABD=y-x$ .

由  $AB=AD$ , 得  $2x=y-x$ , 此时有  $y=3x$ , 即  $\angle ABC=3\angle C$ .

由  $AB=BD$ , 得  $180^\circ - x - y=2x$ , 此时  $3x+y=180^\circ$ , 即  $\angle ABC=180^\circ - 3\angle C$ .

由  $AD=BD$ , 得  $180^\circ - x - y=y-x$ , 此时  $y=90^\circ$ , 即  $\angle ABC=90^\circ$ ,  $\angle C$  为小于  $45^\circ$  的任意锐角.

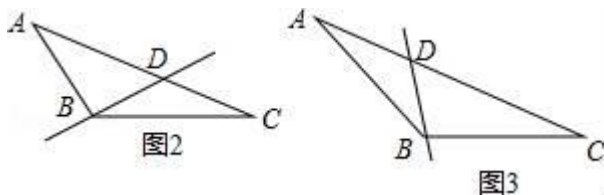
第二种情况, 如图 3, 当  $BD=BC$  时,  $\angle BDC=x$ ,  $\angle ADB=180^\circ - x > 90^\circ$ , 此时只能有  $AD=BD$ ,

从而  $\angle A = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle C < \angle C$ , 这与题设  $\angle C$  是最小角矛盾.

$\therefore$  当  $\angle C$  是底角时,  $BD=BC$  不成立.

综上,  $\angle ABC$  与  $\angle C$  之间的关系是:  $\angle ABC=135^\circ - \frac{3}{4}\angle C$  或  $\angle ABC=180^\circ - 3\angle C$  或  $\angle ABC=$

$3\angle C$  或  $\angle ABC=90^\circ$ ,  $\angle C$  是小于  $45^\circ$  的任意角



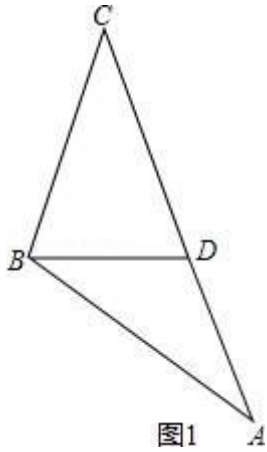


图1

【点评】本题考查了等腰三角形的性质；第（1）问是计算与作图相结合的探索。本问对学生运用作图工具的能力，以及运用直角三角形、等腰三角形性质等基础知识解决问题的能力都有较高的要求。

第（2）问在第（1）问的基础上，由“特殊”到“一般”，“分类讨论”把直角三角形分成两个等腰三角形的各种情形并结合“方程思想”探究角与角之间的关系。本题不仅趣味性强，创造性强，而且渗透了由“特殊”到“一般”、“分类讨论”、“方程思想”、“转化思想”等数学思想，是一道不可多得的好题。