

数 学 试 卷

2024. 1

本试卷共 6 页，三道大题，28 个小题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。考生务必将答案填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请交回答题卡。

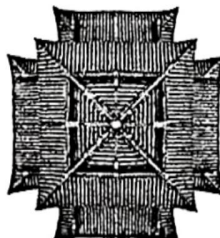
一、选择题（共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. $\sqrt{9}$ 的值是

- (A) 3 (B) -3 (C) ± 3 (D) 81

2. 昌平，取“昌盛平安”之意，自西汉设县以来距今已有 2000 多年。期间辖区内修建了众多的古今建筑。下列是昌平区的四个建筑图片，其中既是轴对称图形，又是中心对称图形的是



- (A) 银山塔林 (B) 昌平大桥 (C) 昌平公园弘文阁 (D) 十三陵牌坊

3. 以下列长度的三条线段为边，能组成一个等腰三角形的是

- (A) 2, 4, 7 (B) 5, 6, 6 (C) 1, 1, 2 (D) 3, 4, 5

4. 下列事件中，属于随机事件的是

- (A) 李叔叔以家庭主申请人的身份申请北京市小客车指标，在提交申请后的第一次“摇号”就中签
 (B) 直角三角形两锐角互余
 (C) 第一小组的 10 名同学中，包含了 3 名女生，若从这组选出 4 名同学完成任务，则至少有 1 名男生
 (D) 掷一枚标准的骰子，面朝上的点数等于 8

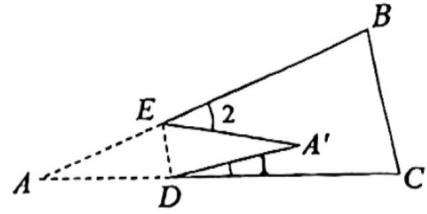
5. 下列选项中，最接近 $\sqrt{6}$ 的整数是

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

6. 甲做 360 个零件与乙做 480 个零件所用的时间相同，已知两人每天共做 140 个零件，若设甲每天做 x 个零件，则可列方程为

- (A) $\frac{360}{x} = \frac{480}{140-x}$ (B) $\frac{360}{140-x} = \frac{480}{x}$
 (C) $\frac{360}{x} = 140 - \frac{480}{x}$ (D) $\frac{360}{x} = \frac{480}{140+x}$

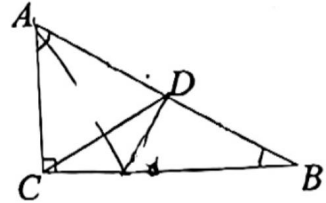
7. 如图, 把 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠后, 点 A 的对应点为 A' , 且点 A' 落在四边形 $BCDE$ 内部, 则 $\angle A'$, $\angle 1$, $\angle 2$ 之间满足的数量关系是
- (A) $\angle A' = \angle 1 + \angle 2$
 (B) $2\angle A' = \angle 1 + \angle 2$
 (C) $3\angle A' = 2\angle 1 + \angle 2$
 (D) $3\angle A' = 2(\angle 1 + \angle 2)$



8. 阅读下面材料:

已知: $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, 点 D 是 AB 中点, 给出下面四个结论:

- ① $\angle ACD = \angle BCD$;
 ② $\angle ADC = 60^\circ$;
 ③ $AC + BC > 2CD$;
 ④ 点 P 是 BC 上的一个动点, 当 $PD + PA$ 取最小值时, $PD + PA = BC$.



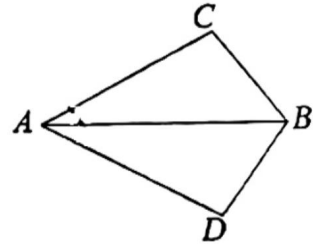
上述结论中, 所有正确结论的序号是

- (A) ①②④ (B) ②③ (C) ③④ (D) ②③④

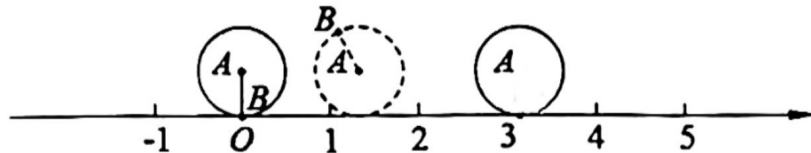
二、填空题 (共 8 道小题, 每小题 2 分, 共 16 分)

9. 若分式 $\frac{2x}{1-x}$ 的值为 0, 则 x 的值为_____.

10. 如图, $\angle CAB = \angle DAB$. 请你添加一个条件, 使 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$. 你添加的条件是_____ (要求: 不再添加辅助线, 只需填一个答案即可)



11. 如图所示, 为了在数轴上找到表示无理数 π 的点, 小王同学制作了一个以 A 为圆心, m 为半径的圆, 并在此圆上标记一个点 B , 将点 B 与原点重合. 若让此圆在数轴上向右滚动一周后, 点 B 就是数轴上表示无理数 π 的点, 则 $m =$ _____.

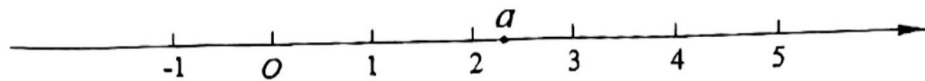


12. 已知命题“两个三角形全等, 则它们的面积相等”为真命题, 则这个命题的逆命题为_____命题. (用“真”, “假”填空)

13. 如图, 货架上水平摆放着九个外包装完全一样的盲盒, 每个盲盒内装有一件商品, 装甲商品的盲盒有 5 个, 装乙商品的盲盒有 4 个, 随机抽取一个盲盒, 则抽到_____种商品的可能性大. (用“甲”, “乙”填空)



14. 若实数 a 在数轴上的对应点的位置如图所示, 则 $\sqrt{(2-a)^2} =$ _____.



15. 如图, 点 O 在直线 l 上, 点 A 在直线 l 外. 若直线 l 上有一点 P 使得 $\triangle APO$ 为等腰三角形, 则满足条件的点 P 位置有 _____ 个.



16. 某学校计划租用客车接送 251 名学生和 5 名教师去博物馆, 每辆车至少有 1 名教师, 现有甲、乙、丙三种客车, 它们的载客量和租金如下表所示:

| | 甲客车 | 乙客车 | 丙客车 |
|---------------|------|------|------|
| 载客量 (单位: 人/辆) | 43 | 49 | 55 |
| 租金 (单位: 元/辆) | 1350 | 1500 | 1600 |

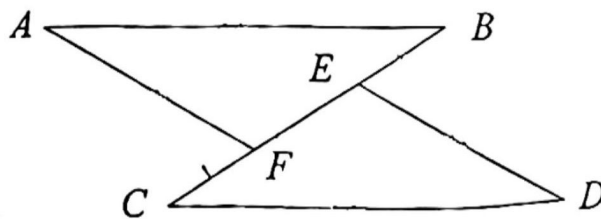
请写出一个满足乘坐需求的租车方案 _____, 若需要租车总费用最少, 则租车方案为 _____.

三、解答题 (本题共 12 道小题, 第 17 ~ 22 题, 每小题 5 分, 第 23 ~ 26 题, 每小题 6 分, 第 27 ~ 28 题, 每小题 7 分, 共 68 分)

17. 计算: $(\sqrt{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}) \times \sqrt{2}$.

18. 计算: $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$.

19. 已知: 如图, E, F 是线段 BC 上两点, $AB = DC$, $AF = DE$, $BE = CF$.
求证: $\triangle ABF \cong \triangle DCE$.



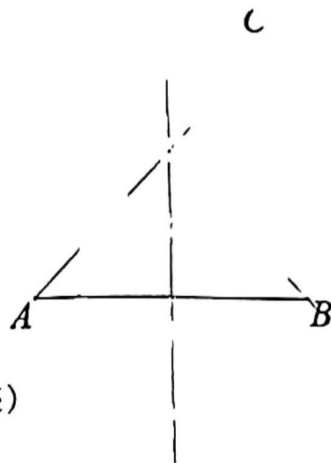
20. 计算: $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) + (\sqrt{3} - 1)^2$.

21. 解方程: $\frac{2}{x} + \frac{x}{x-3} = 1$.

22. 先化简 $\left(\frac{a}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right) \div \frac{1}{a^2-1}$, 再从 0, 1, 2 三个数中, 选择一个合适的数作为 a 的值代入求值.

23. 已知: 如图, $\angle BAC = 45^\circ$.
求作: 线段 BD , 使得 $BD \perp AC$.

作法: ①分别以点 A 和点 B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径作弧, 两弧分别交于点 M 和点 N ;
②作直线 MN , 交 AC 于点 D ;
③连接 BD .



所以线段 BD 即为所求作的线段.

(1) 使用直尺和圆规, 依作法补全图形. (保留作图痕迹)

(2) 完成下列证明:

证明: $\because MN$ 是线段 AB 的垂直平分线,

$\therefore AD = BD$ (_____). (填写推理依据)

$\therefore \angle DAB = \angle DBA =$ _____ $^\circ$.

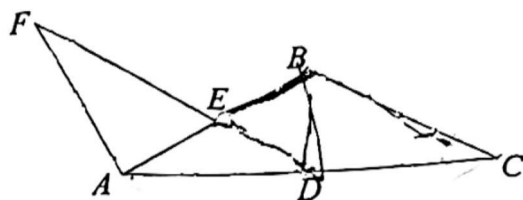
$\because \angle DAB + \angle DBA + \angle ADB = 180^\circ$,

$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle DBA = 90^\circ$.

$\therefore BD \perp AC$.

24. 第31届世界大学生夏季运动会，于2023年7月28日至8月8日在成都举办。上海的学生小李一家想在此次运动会期间前往成都观赛，可供选择的交通工具具有我国自主知识产权的高铁和C919大型民航客机。已知民航客机的平均速度是高铁的3倍，当路程均为1620千米时，搭乘民航客机会比高铁节省4小时，求民航客机和高铁的平均速度。

25. 已知： $\triangle ABC$ 中， $AB = BC = 6$ ， D 为 AC 中点，过点 D 作 $DE \parallel BC$ ，交 AB 于点 E ，在 DE 的延长线上有一点 F ，连接 AF ，满足 $AF = AD$ 。



(1) 求证： $BE = DE$ 。

(2) 若 $AC = 6\sqrt{3}$ ，试判断 $\triangle AEF$ 的形状，并证明。

26. 阅读材料：

$$\sqrt{1} \text{和} \sqrt{4} \text{为整数, } 4 - 1 = 3 = 2 \times 1 + 1;$$

$$\sqrt{4} \text{和} \sqrt{9} \text{为整数, } 9 - 4 = 5 = 2 \times 2 + 1;$$

$$\sqrt{9} \text{和} \sqrt{16} \text{为整数, } 16 - 9 = 7 = 2 \times 3 + 1;$$

.....

小明发现结论：若 \sqrt{a} 和 \sqrt{b} 为相邻的两个整数，其中 $a < b$ ，则有 $b - a = 2\sqrt{a} + 1$ 。并给出了证明：根据题意，得

$$\sqrt{a} + 1 = \sqrt{b}.$$

等式两边同时_____，得

$$\underline{\hspace{2cm}} = b.$$

整理得

$$b - a = 2\sqrt{a} + 1.$$

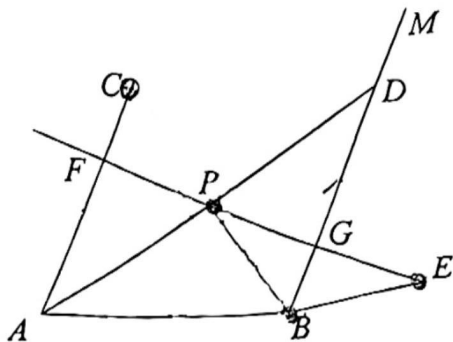
请根据以上材料，解决以下问题：

(1) 请补全小明的证明过程。

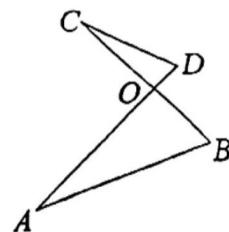
(2) 若 \sqrt{a} 和 $\sqrt{a+11}$ 为两个相邻整数，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 若 \sqrt{a} 和 $\sqrt{a+216}$ 为相差4的两个整数，求 a 的值。

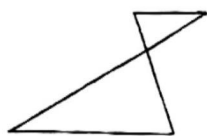
27. 已知：如图，线段 AB ，点 P 是线段 AB 上方一动点，且 $PA \perp PB$ ，线段 AB 和线段 AC 关于直线 AP 对称，过点 B 作 $BM \parallel AC$ ，与线段 AP 的延长线交于点 D ，点 P 和点 E 关于直线 BD 对称，作射线 EP 交 AC 于点 F ，交 BD 于点 G 。
- (1) 当 $PB=3$ ， $AB=5$ 时，求 PD 的长。
- (2) 请用等式表示线段 EF 与 PF 之间的数量关系，并证明。
- (3) 当线段 EF 的长取最大值时， $\frac{AB}{EF}$ 的值为_____。



28. 给出如下定义：两条线段相交于一点（交点不与端点重合），连接不同线段的两个端点，再连接另两个端点所得图形称为“8字形”。如图，线段 AD 与 BC 交于点 O ，连接 AB 和 CD ，所得图即为“8字形”。



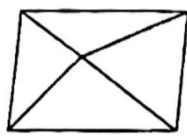
- (1) 下列四个图形中，含有“8字形”的有：_____。



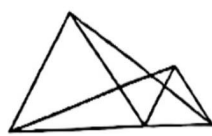
①



②



③



④

- (2) 如图 1， AD 与 BC 交于点 E ，连接 AB 和 CD ， AB 和 CD 的延长线交于点 F ，满足 $\angle ABC = \angle ADC = \alpha$ ， $AE = CF$ 。

① 当 $\alpha = 90^\circ$ 时，判断 BE 与 BF 的数量关系，并证明；

② 如图 2，当 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时，求证： $BE = BF$ 。

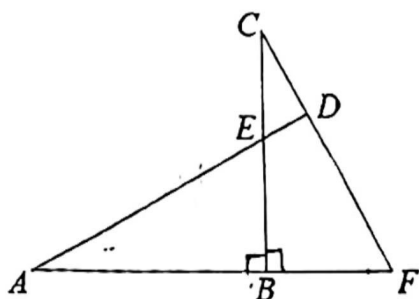


图 1

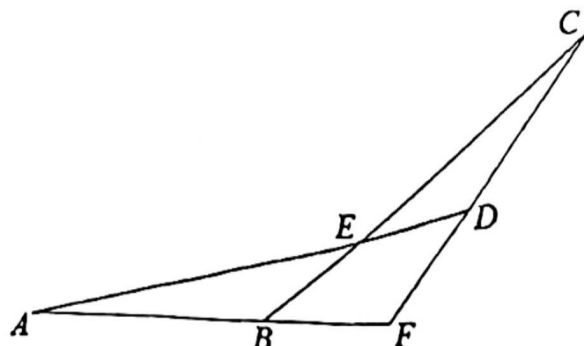


图 2

昌平区 2023—2024 学年第一学期初二年级期末质量抽测

数学试卷参考答案及评分标准

2024. 1

一、选择题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | A | C | B | A | C | A | B | D |

二、填空题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---------------|----|----|---------|----|--|
| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 答案 | 0 | $AC = AD$ （或 $\angle C = \angle D$ ，或 $\angle ABC = \angle ABD$ ） | $\frac{1}{2}$ | 假 | 甲 | $a - 2$ | 4 | 5 辆丙客车（答案不唯一）； 1 辆甲客车，1 辆乙客车， 3 辆丙客车 |

三、解答题（本题共 12 道小题，第 17 - 22 题，每小题 5 分，第 23 - 26 题，每小题 6 分，第 27、28 题，每小题 7 分，共 68 分）

17. 解：原式 = $\sqrt{8} \times \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$ 2 分
 $= 4 - 1$ 4 分
 $= 3$ 5 分

18. 解：原式 = $\frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{2x}{x(x+1)}$ 3 分
 $= \frac{3x+1}{x(x+1)}$ 5 分

19. 证明：∵ $BE = CF$ ，
 ∴ $BE + EF = CF + EF$ 2 分
 即 $BF = CE$.
 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle DCE$ 中，

$$\begin{cases} AB = DC, \\ AF = DE, \\ BF = CE, \end{cases}$$

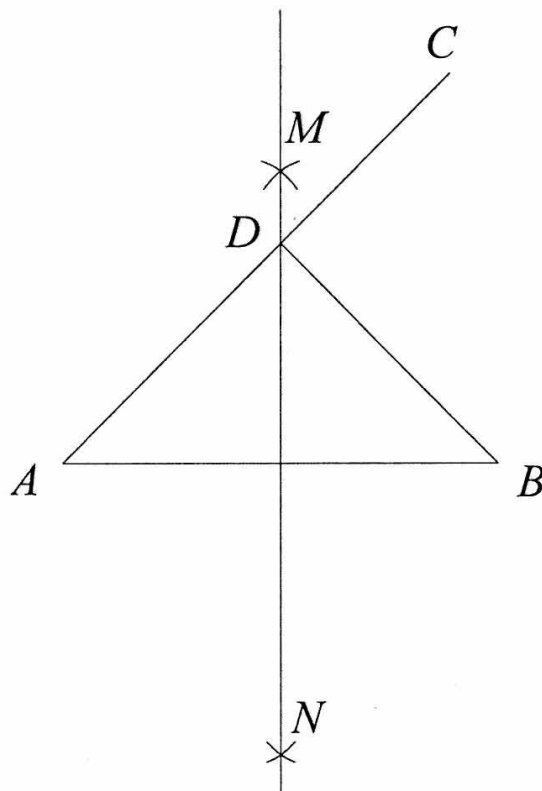
 ∴ $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ (SSS). 5 分

20. 解：原式 = $(\sqrt{5})^2 - 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1^2$ 4 分
 $= 5 - 4 + 3 - 2\sqrt{3} + 1$
 $= 5 - 2\sqrt{3}$ 5 分

21. 解: $\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{x-3}\right) \cdot x(x-3) = x(x-3)$ 1分
 $2(x-3) + x^2 = x(x-3)$ 2分
 $2x - 6 + x^2 = x^2 - 3x$ 3分
 $5x = 6$
 $x = \frac{6}{5}$ 4分
 检验: 当 $x = \frac{6}{5}$ 时, 方程左右两边相等, 所以 $x = \frac{6}{5}$ 是原方程的解. 5分
 所以原方程的解是 $x = \frac{6}{5}$.

22. 解: 原式 = $\left[\frac{a(a+1)}{(a+1)(a-1)} - \frac{a-1}{(a+1)(a-1)}\right] \cdot (a+1)(a-1)$ 2分
 $= \frac{a^2 + a - a + 1}{(a+1)(a-1)} \cdot (a+1)(a-1)$ 3分
 $= a^2 + 1$ 4分
 将 $a=0$ 代入, 得: $0^2 + 1 = 1$. (或将 $a=2$ 代入, 得: $2^2 + 1 = 5$.) 5分

23. 解: (1) 作图:



- 3分
 (2) 线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等. 5分
 45° 6分

24. 解：设高铁的平均速度为 x 千米/时，则民航客机的平均速度为 $3x$ 千米/时.
 1 分
- 根据题意，得
- $$\frac{1620}{3x} + 4 = \frac{1620}{x}. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$
- 解得
- $$x = 270. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$
- 经检验， $x = 270$ 是原方程的解，且符合实际问题的意义. 5 分
- 当 $x = 270$ 时， $3x = 810$.
- 答：高铁平均速度为 270 千米/时，民航平均速度为 810 千米/时. 6 分

25. 解：(1) 证明：∵ $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ，点 D 为 AC 中点，
 ∴ BD 平分 $\angle ABC$ 1 分
- ∴ $\angle ABD = \angle CBD$.
- ∵ $DE \parallel BC$ ，
 ∴ $\angle BDE = \angle CBD$ 2 分
- ∴ $\angle ABD = \angle BDE$.
- ∴ $BE = DE$ 3 分
- (2) 判断： $\triangle AEF$ 为直角三角形. 4 分
- 证明：∵ $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ，点 D 为 AC 中点，
 ∴ $BD \perp AC$ ， $\angle ADB = 90^\circ$.
- ∵ 点 D 为 AC 中点， $AC = 6\sqrt{3}$ ，
 ∴ $AD = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{3}$.
- ∵ $\angle ADB = 90^\circ$ ， $AD = 3\sqrt{3}$ ， $AB = 6$ ，
 ∴ $BD^2 + AD^2 = AB^2$ ，即 $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 3$.
- ∵ $DE \parallel BC$ ， $AB = BC$ ，
 ∴ $\angle ADE = \angle C = \angle BAC$.
- ∴ $AE = DE = BE = \frac{1}{2}AB = 3$.
- ∴ $DE = BE = BD$.
- ∴ $\triangle BDE$ 是等边三角形. 5 分
- ∴ $\angle DBE = \angle BED = 60^\circ = \angle AEF$.
- ∴ $\angle BAD = \angle ADF = 30^\circ$ 6 分
- ∵ 在 $\triangle AEF$ 中，
 ∴ $\angle EAF = 180^\circ - \angle F - \angle AEF = 90^\circ$.
- ∴ $\triangle AEF$ 为直角三角形.

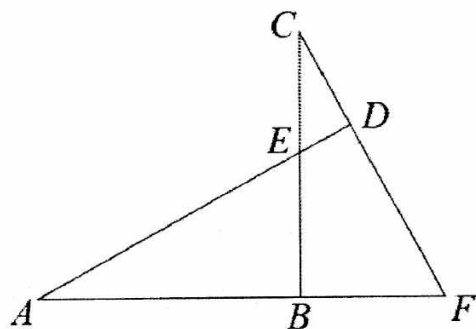
26. 解: (1) 平方; $(\sqrt{a} + 1)^2$ 2 分
 (2) 25. 4 分
 (3) 解: 根据题意, 得
 $\sqrt{a} + 4 = \sqrt{a + 216}$ 5 分
 等式两边同时平方, 得
 $(\sqrt{a} + 4)^2 = (\sqrt{a + 216})^2$.
 $(\sqrt{a})^2 + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot 4 + 4^2 = a + 216$.
 $a + 8\sqrt{a} + 16 = a + 216$.
 $\sqrt{a} = 25$.
 $a = 625$ 6 分

27. 解: (1) \because 线段 AB, AC 关于直线 AP 对称,
 $\therefore \angle CAP = \angle BAP$.
 $\because BD \parallel AC$,
 $\therefore \angle CAP = \angle ADB$.
 $\therefore \angle BAD = \angle ADB$.
 $\therefore AB = AD$.
 $\because PA \perp PB$,
 $\therefore BP$ 为 AD 中线. 1 分
 $\therefore AP = PD$.
 $\because \angle APB = 90^\circ, AB = 5, PB = 3$,
 $\therefore AP^2 + BP^2 = AB^2$, 即 $AP = \sqrt{AB^2 - PB^2} = 4$ 2 分
 $\therefore PD = 4$ 3 分
 (2) $EF = 3PF$ 4 分
 证明: \because 点 P 关于直线 BD 的对称点为 E ,
 $\therefore BD$ 是线段 PE 的垂直平分线.
 $\therefore PG = EG$ 5 分
 在 $\triangle APF$ 和 $\triangle DPG$ 中,

$$\begin{cases} \angle CAP = \angle ADB, \\ AP = PD, \\ \angle APF = \angle DPG, \end{cases}$$
 $\therefore \triangle APF \cong \triangle DPG$ (ASA). 6 分
 $\therefore PF = PG = EG$.
 $\therefore EF = 3PF$.
 (3) $\frac{AB}{EF} = \frac{2}{3}$ 7 分

28. 解：(1) ①④. 2分
 (2) ① $BE = BF$ 3分

证明：∵ $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$,
 ∴ $\angle A + \angle AEB = 90^\circ$, $\angle C + \angle CED = 90^\circ$,
 $\angle ABC = \angle CBF = 90^\circ$.
 ∴ $\angle AEB = \angle CED$,
 ∴ $\angle A = \angle C$.



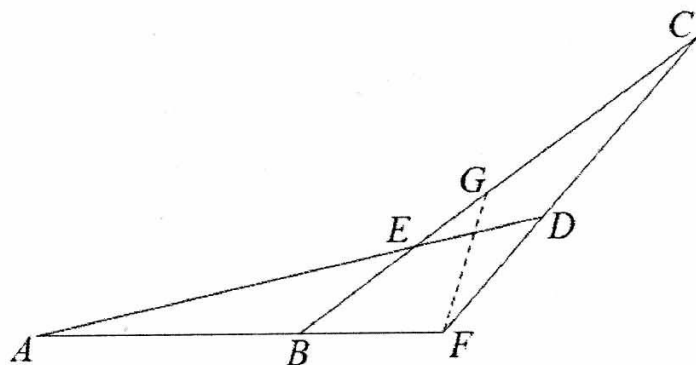
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle CBF, \\ \angle A = \angle C, \\ AE = CF, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ (AAS). 4分
 ∴ $BE = BF$.

②方法一:

证明：作辅助线，在 CB 上截取 $CG = AB$ 5分



在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CGF$ 中,

$$\begin{cases} AB = CG, \\ \angle A = \angle C, \\ AE = CF, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle CGF$ (SAS). 6分

∴ $BE = GF$, $\angle ABE = \angle CGF$.

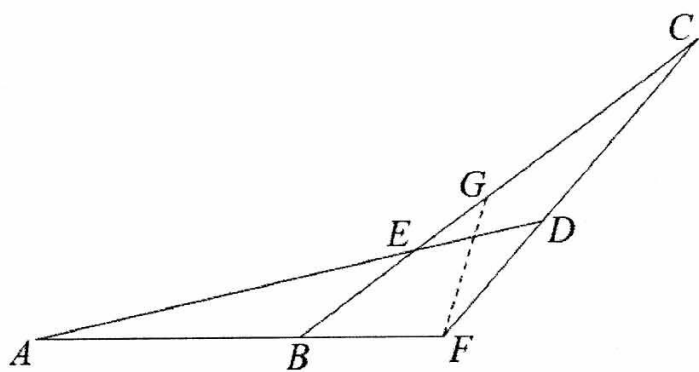
∴ $\angle GBF = \angle BGF$.

∴ $BF = GF$ 7分

∴ $BE = BF$.

方法二:

证明：作辅助线，在 CB 上取一点 G ，使得 $\angle CGF = \angle ABE$ 5分



在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CGF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle CGF, \\ \angle A = \angle C, \\ AE = CF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CGF$ (AAS). 6分

$\therefore BE = GF$.

$\therefore \angle ABE = \angle CGF$,

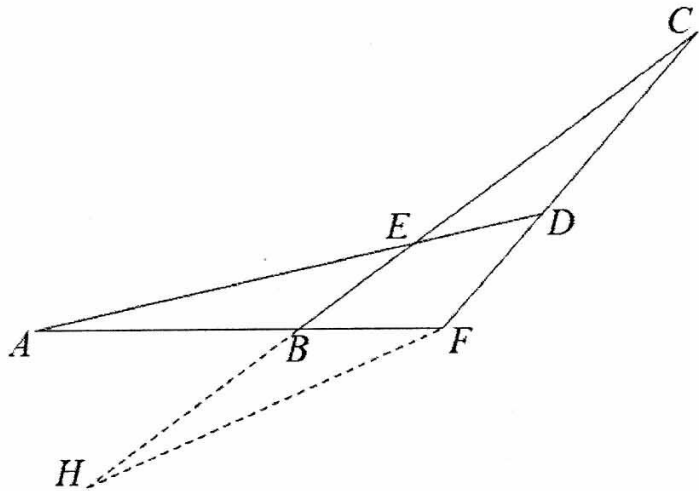
$\therefore \angle GBF = \angle BGF$.

$\therefore BF = GF$ 7分

$\therefore BE = BF$.

方法三:

证明: 作辅助线, 在 CB 的延长线上取一点 H , 使得 $FH = CF$ 5分



$\therefore FH = CF$,

$\therefore \angle C = \angle H = \angle A$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle HBF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle HBF, \\ \angle A = \angle H, \\ AE = FH, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle HBF$ (AAS). 7分

$\therefore BE = BF$.

注: 所有题选取其他思路酌情给分.