



一、选择题 (每题 3 分, 共 24 分)

1. 下列函数, 是同一函数的是 ()

A. $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$ B. $y = \sqrt{-x^3}$ 与 $y = x\sqrt{-x}$

C. $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ D. $y = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$

2. 下列函数, 是奇函数的是 ()

A. $y = \frac{2}{x}$ ($x \neq 1$) B. $y = \begin{cases} x + \sqrt{x} & (x > 0) \\ -x - \sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$ C. $y = \log_2 \frac{x+1}{1-x}$ D. $y = 2^x$

3. 已知 $a = \log_2 3$, $3^b = 5$, 则 $\log_{12} 15 =$ ()

A. $\frac{a+ab}{a+2}$ B. $\frac{a+b}{a+1}$ C. $\frac{a+ab}{a+1}$ D. $\frac{a+b}{ab+1}$

4. 若函数 $y = \log_{0.2}(x^2 - 2ax + 6)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围为 ()

A. $\left[2, \frac{5}{2}\right)$ B. $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ C. $\left[2, \frac{7}{2}\right)$ D. $\left[2, \frac{7}{2}\right]$

5. 函数 $f(x) = 2x^2 - 1 - 3^x$ 的零点个数是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 已知函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称, 当 $x_2 > x_1 > 1$ 时, $[f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) < 0$ 恒成立. 设 $a = f(-\frac{1}{2})$, $b = f(0)$, $c = f(3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

7. 下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $(1, 4)$, 则 $f(2-x)$ 的定义域是 $(-2, 1)$;B. 函数 $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+1} - 1$ 的值域是 $[\sqrt{3}-1, \sqrt{6}-1]$;C. “ $f(x)$ 有反函数” 是 “ $f(x)$ 在定义域内单调” 的充分不必要条件;D. “ $f(0)=0$ ” 是 “ $f(x)$ 是奇函数” 的必要不充分条件.8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若函数 $f(x)$ 满足条件: 存在 $[a, b] \subseteq D$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域是 $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$, 则称 $f(x)$ 为“倍缩函数”, 若函数 $f(x) = \log_2(2^x + 2m)$ 为“倍缩函数”, 则实数 m 的取值范围

是 ()

A. $(0, \frac{1}{4})$ B. $(0, \frac{1}{8})$ C. $(0, \frac{1}{4}]$ D. $(-2, \frac{1}{8}]$



二、填空题 (每题 4 分, 共 40 分)

9. 函数 $y = a^{x-2} + 2$ 经过的定点是_____.

10. 计算: $2(\lg \sqrt{2})^2 + \lg \sqrt{2} \cdot \lg 5 + \sqrt{(\lg \sqrt{2})^2 - \lg 2 + 1} =$ _____.

11. 函数 $y = \sqrt{\log_{0.5}(x^2 - 2)}$ 的单调增区间是_____.

12. 比较大小: $\log_5 6$ _____ $\log_6 7$.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (4-a)x - 2a & (x < 1) \\ \log_a x & (x \geq 1) \end{cases}$ 是 \mathbb{R} 上的单调递增函数,

则实数 a 的取值范围是_____.

14. 函数 $f(x) = \log_a(x+b+1)$ 经过一、三、四象限, 则 a 、 b 的取值范围是_____.

15. 函数 $y = 3 - a^x - a^{2x}$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值是 -3, 则 a 的值是_____.

16. 若函数 $y = \lg(ax^2 - ax + 1)$ 的值域为 \mathbb{R} , 则实数 a 的取值范围是_____.

17. 已知 $\alpha \in \{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 3\}$, 若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且其图像不过坐标原点, 则 $\alpha =$ _____.

18. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 满足对任意 $x, y \in (0, +\infty)$,

都有 $f(xy) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2$, 且 $x > 1$ 时, $f(x) > 2$.

则下列说法正确的是_____.

① $f(1) = 2$; ② $f(1) = 1$; ③ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 2$; ④ $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数;

⑤ 存在实数 k 使得函数 $y = |f(x) + k|$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数.

三、解答题 (共 36 分)

19. 已知函数 $f(x) = \log_a \left(\frac{x+3}{x-3} \right)$ 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$,

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间; (2) 判断并证明 $f(x)$ 的奇偶性;

(3) 求函数 $f(x)$ 的反函数; (4) 求使 $f(x) > 0$ 的 x 取值范围.



20. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的实数 x, y 均有 $f(xy) = f(x)f(y)$, 且 $f(-1) = -1$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) \in (0, 1)$.

- (1) 判断并证明 $f(x)$ 的奇偶性;
- (2) 判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并证明;
- (3) 若对任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, $a \in [-1, 5]$, 总有 $2|f(x_1) - f(x_2)| \leq m^2 - am - 2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = 2^x$.

- (1) 若函数 $F(x) = f(x) + af(-x)$ ($a \in R$) 在 $x \in R$ 上具有奇偶性, 求 a 的值;
- (2) 当 $a > 0$ 且 $x \in [0, 8]$ 时, 不等式 $f(x+1) \geq f[(x+a)^2]$ 恒成立, 求 a 的取值范围;
- (3) 试求函数 $G(x) = f(x+1) + af(2x)$ ($a \in R$) 在 $x \in (-\infty, 0]$ 的最大值 $H(a)$.

22. 设 D 是函数 $y = f(x)$ 定义域的一个子集, 若存在 $x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) = -x_0$ 成立, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个“准不动点”, 也称 $f(x)$ 在区间 D 上存在准不动点. 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(4^x + a \cdot 2^x - 2)$, $x \in [0, 1]$.

- (1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的准不动点;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上存在准不动点, 求实数 a 的取值范围.