2019 北京清华附中初二（下）期末

数　学

（试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟）

（清华附中初 18 级）　2019.7

一、选择题：（每题 3 分，共 24 分）

1. 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根的是（　　）

A. $\sqrt{4}$　　B. $\sqrt{8}$　　C. $\sqrt{18}$　　D. $\sqrt{27}$

2. 下面计算正确的是（　　）

A. $3+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{27}\div\sqrt{3}=3$　　C. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{(-2)^2}=-2$

3. 一个矩形的两条对角线的夹角为 60°，且对角线的长度为 8cm，则较短边的长度为（　　）

A. 8cm　　B. 6cm　　C. 4cm　　D. 2cm

4. 下列图形中是中心对称图形，但不是轴对称图形的是（　　）

A.　　B.　　C.　　D.

5. 下列方程中是关于 x 的一元二次方程的是（　　）

A. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=0$　　B. $ax^2+bx+c=0$

C. $3x^2-2x-5=3x^2$　　D. $(x-1)(x+2)=1$

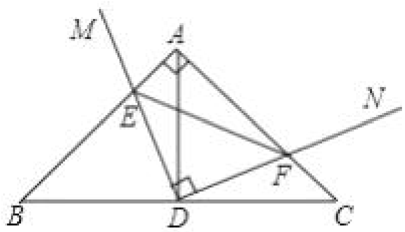
6. 顺次连接对角线互相垂直的四边形四边中点所得的四边形是（　　）

A．梯形　　B．矩形　　C．菱形　　D．正方形

7. 关于 x 的方程 $x^2-4x+a=0$ 有两实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a\le 4$　　B. $a<4$　　C. $a>4$　　D. $a\ge 4$

8．$Rt\Delta ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 为 BC 中点．$\angle MDN=90^\circ$，$\angle MDN$ 绕点 D 旋转，DM、DN 分别与边 AB、AC 交于 E、F 两点，下列结论：



①$(BE+CF)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BC$；②$S_{\Delta AEF}\le\dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC}$；③$S_{四边形AEDF}=AD\cdot EF$；④$AD\ge EF$；⑤$AD$ 与 EF 可能互相平分，其中正确结论的个数是

（　　）

A. 1 个　　　　B. 2 个　　　　C. 3 个　　　　D. 4 个

二、填空题：（每题 3 分，共 24 分）

9．$\sqrt{x-3}$ 中 x 的取值范围是________________．

10．化简：$\sqrt{50}=$ ____________．

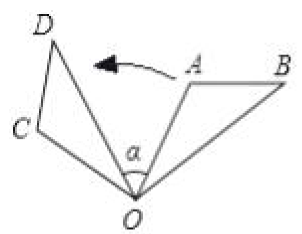
11．关于 x 的方程 $x^2-2mx+m=0$ 的一个根为 1，则 m 的值为 ____________．

12．若关于 x 的方程 $x^2+kx+9=0$ 有两个相等的实数根，则 $k=$__________．

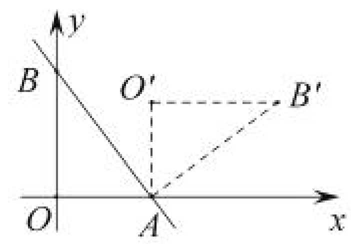
13．如图，ΔOAB 绕点 O 逆时针旋转 80° 得到 ΔOCD，若 $\angle A=110°$，$\angle D=40°$，则 $\angle\alpha$ 的度数是__________．

14．如图，直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，把 ΔAOB 绕点 A 顺时针旋转 90° 后得到 $\Delta AO'B'$，则点 B' 的坐标为__________．

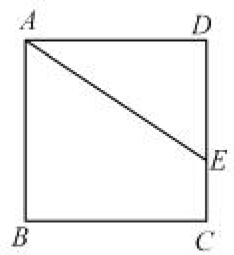
15．如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 DC 边上，$DE=2$，$EC=1$，把线段 AE 绕点 A 旋转，使点 E 落在直线 BC 上的 F 点，则 F、C 两点间的距离为__________．



第 13 题图

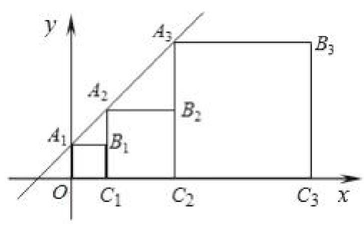


第 14 题图



第 15 题图

16．如图，在直角坐标系中，正方形 $A_1B_1C_1O$、$A_2B_2C_2C_1$、$A_3B_3C_3C_2$、…、$A_nB_nC_nC_{n-1}$ 的顶点 A_1、A_2、A_3、…、A_n 均在直线 $y=kx+b$ 上，顶点 C_1、C_2、C_3、…、C_n 在 x 轴上，若点 B_1 的坐标为（1，1），点 B_2 的坐标为（3，2），那么点 A_4 的坐标为________，点 A_n 的坐标为________．



三、解答题：（17～20，23 题每题 5 分，21，22 每题 6 分，24 题 7 分，25 题 8 分，共 52 分，如无特别说明，解答题中的填空均直接写答案）

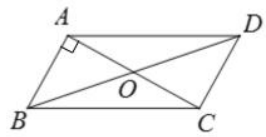
17．解方程：$x^2-4x-5=0$

18．计算：$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{8}-6\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\left(\sqrt{12}-1\right)^0$

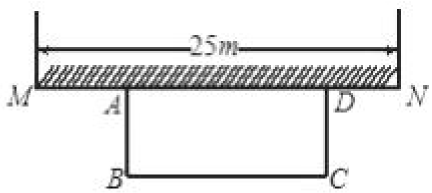
19．已知：$a=\sqrt{3}+1$，求$a^2-2a+2013$的值．

20．求证：a取任何实数时，关于x的方程$ax^2-\left(1-3a\right)x+2a-1=0$总有实数根．

21．如图，平行四边形$ABCD$的对角线AC、BD交于点O，$AC\perp AB$，$AB=2$，且$AC:BD=2:3$．(1)求AC的长；(2)求ΔAOD的面积．



22．如图，某中学准备在校园里利用围墙的一段，再砌三面墙，围成一个矩形花园$ABCD$（围墙MN最长可利用25m），现在已备足可以砌50m长的墙的材料，恰好用完，试求AB的长，使矩形花园的面积为300m^2．



23．5个同样大小的正方形纸片摆放成“十”字型，按图1所示的方法分割后可拼接成一个新的正方形．按照此种做法解决下列问题：

（1）5个同样大小的矩形纸片摆放成图2形式，请将其分割并拼接成一个平行四边形．要求：在图2中画出并指明拼接成的平行四边形（画出一个符合条件的平行四边形即可）；

（2）如图3，在面积为1的平行四边形$ABCD$中，点E、F、G、H分别是边AB、BC、CD、DA的中点，分别连结AF、BG、CH、DE得到一个新的平行四边形$MNPQ$．则平行四边形$MNPQ$的面积为__________（在图3中画图说明）．

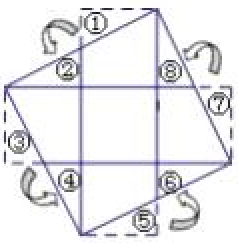


图1

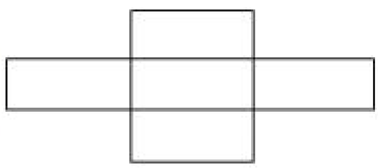


图2

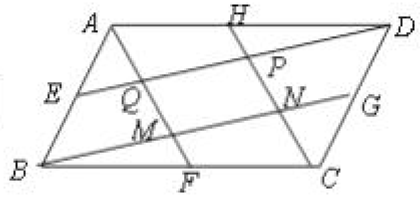


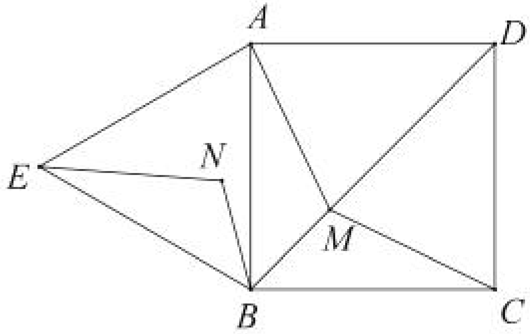
图 3

24．如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，ΔABE 是等边三角形，M 为对角线 BD（不含 B 点）上任意一点，将 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN，连接 EN、AM、CM．

（1）证明：$\Delta ABM \cong \Delta EBN$

（2）当 M 点在何处时，$AM+BM+CM$ 的值最小，并说明理由；

（3）当 $AM+BM+CM$ 的最小值为 $\sqrt{3}+1$ 时，则正方形的边长为__________．



25．已知，矩形 $ABCD$ 中，$\mathrm{AB}=4\mathrm{cm}$，$\mathrm{BC}=8\mathrm{cm}$，AC 的垂直平分 EF 线分别交 AD、BC 于点 E、F，垂足为 O．

（1）如图 1，连接 AF、CE，求证：四边形 $AFCE$ 为菱形；

（2）如图 2，动点 P、Q 分别从 A、C 两点同时出发，沿 ΔAFB 和 ΔCDE 各边匀速运动一周，即点 P 自 $A \to F \to B \to A$ 停止，点 Q 自 $C \to D \to E \to C$ 停止．在运动过程中，

①已知点 P 的速度为每秒 $5\mathrm{cm}$，点 Q 的速度为每秒 $4\mathrm{cm}$，运动时间为 t 秒，当 A、C、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，则 $t=$__________．

②若点 P、Q 的运动路程分别为 a、b（单位：cm，$ab\neq 0$），已知 A、C、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形，则 a 与 b 满足的数量关系式为__________．

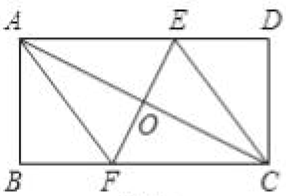


图 1

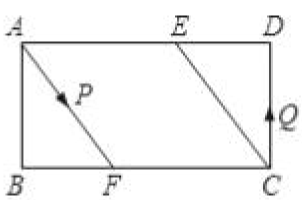
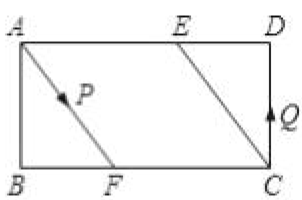


图 2

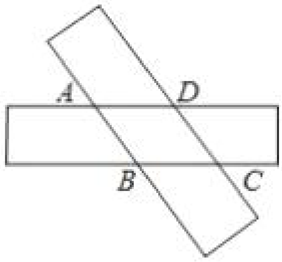


备用图

附加题(每题 4 分，共 20 分)

26．若 2，m，4 为三角形三边，化简：$\sqrt{(m-2)^2}+\sqrt{(m-6)^2}=$__________．

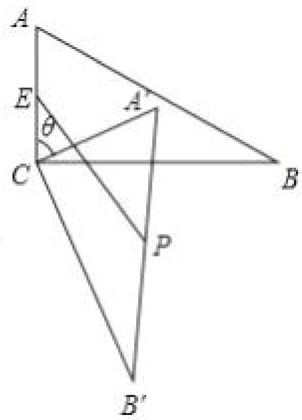
27．如图，将两张长为 8，宽为 2 的矩形纸条交叉，使重叠部分是一个菱形，容易知道当两张纸条垂直时，菱形的周长有最小值 8，那么菱形周长的最大值是__________．



28．设 $m>n>0$，若 $\frac{(m-n)^2}{mn}=2$，则 $\frac{m^2-n^2}{mn}=$__________.

29．关于 x 的方程 $x^2-(k+8)x+8k-1=0$ 有两个整数根，则整数 $k=$__________.

30．如图, 在 ΔABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，将 ΔABC 绕顶点 C 顺时针旋转，旋转角为 θ（$0°<\theta<180°$），得到 $\Delta A'B'C$．设 AC 中点为 E，$A'B'$ 中点为 P，$AC=2$，连接 EP，当 $\theta=$______$°$ 时，EP 长度最大，最大值为_________.



2019 北京清华附中初二（下）期末数学参考答案

一、选择题：（每题 3 分，共 24 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	D	D	B	A	C

二、填空题：（每题 3 分，共 24 分）

题号	9	10	11	12
答案	$x\geq 3$	$5\sqrt{2}$	1	± 6
题号	13	14	15	16
答案	$50°$	（7, 3）	1 或 5	（7，8） $\left(2^{n-1}-1,2^{n-1}\right)$

三、解答题：（17～20，23 题每题 5 分，21，22 每题 6 分，24 题 7 分，25 题 8 分，共 52 分，如无特别说明，解答题中的填空均直接写答案）

17. 解：$(x-5)(x+1)=0$ ……3 分

$x_1=5 \quad x_2=-1$ ……5 分

18. 解：原式$=\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$ ……4 分

$=\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-1=0$ ……5 分

19. $\because a=\sqrt{3}+1$，$\therefore a-1=\sqrt{3}$，$(a-1)^2=3$， ……2 分

$\therefore a^2-2a+1=3 \qquad \therefore a^2-2a=2$， ……4 分

$\therefore a^2-2a+2013=2+2013=2015$ ……5 分

20. 当$a=0$时，原方程为$-x-1=0$，$x=-1$，此时方程有实根； ……1 分

当$a\neq 0$时，原方程为一元二次方程，

$\Delta=[-(1-3a)]^2-4a(2a-1)=9a^2-6a+1-8a^2+4a$

$=a^2-2a+1=(a-1)^2\geq 0$，原方程有实根， ……4 分

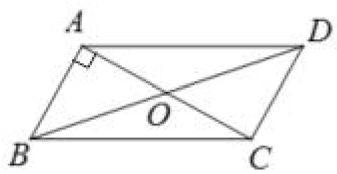
综上所述，a取任何实数时，原方程总有实数根. ……5 分

21. 解：（1）如图

$\because$平行四边形$ABCD$的对角线AC、BD交于点O，

$\therefore OA=\dfrac{1}{2}AC$，

$OB=\dfrac{1}{2}BD$ …………… 1 分



$\because AC:BD=2:3$，$\therefore OA:OB=2:3$

设 $OA=2x(x>0)$，则 $OB=3x$，

$\because AC\perp AB$， $\therefore \angle BAC=90°$.

在 $Rt\Delta OAB$ 中， $OA^2+AB^2=OB^2$ …… 2 分

$\because AB=2$， $\therefore (2x)^2+2^2=(3x)^2$

解得 $x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$（舍负）

$\therefore AC=2OA=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ……………………4 分

（2）$\because$平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O，

$\therefore OB=OD$

$\therefore S_{\Delta AOD}=S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot AB=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}\times 2=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ………………6 分

21．解：设 AB $=x$ m，则 $BC=(50-2x)$ m. ………………1 分

根据题意可得， $x(50-2x)=300$， ………………3 分

解得： $x_1=10$， $x_2=15$， ………………4 分

当 $x=10$， $BC=50-10-10=30>25$，

故 $x_1=10$（不合题意舍去）， ………… 5 分

答： AB 的长为 15 米. ………… 6 分

23.（1）如图 2 所示：拼接成的四边形是平行四边形；

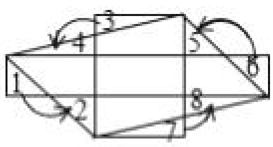


图2

…………………… 2 分

（2）正确画出图形（如图 3）

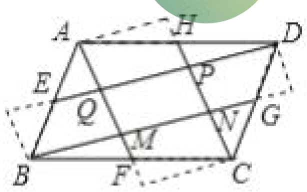


图3

…………………… 4 分

故平行四边形 $MNPQ$ 的面积为：$\frac{1}{5}$ …………5 分

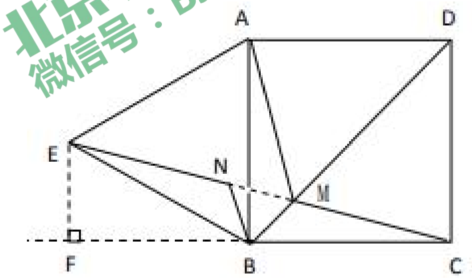
24. 解：（1）$\because \Delta ABE$ 是等边三角形，$\therefore BA=BE$，$\angle ABE=60°$.

$\because \angle MBN=60°$，$\therefore \angle MBN-\angle ABN=\angle ABE-\angle ABN$，即 $\angle BMA=\angle NBE$.

又$\because MB=NB$，$\therefore \Delta AMB\cong\Delta ENB(SAS)$. ………………3 分

（2）如图，连接 CE，当 M 点位于 BD 与 CE 的交点处时，

$AM+BM+CM$ 的值最小. ………………4 分



理由如下：连接 MN，由（1）知，

$\Delta AMB\cong\Delta ENB$，$\therefore AM=EN$.

$\because \angle MBN=60°$，$MB=NB$，

$\therefore \Delta BMN$ 是等边三角形，$\therefore BM=MN$.

$\therefore AM+BM+CM=EN+MN+CM$

根据“两点之间线段最短”，得 $EN+MN+CM=EC$ 最短

$\therefore$当 M 点位于 BD 与 CE 的交点处时，$AM+BM+CM$ 的值最小，

即等于 EC 的长 ………………………6 分

（3）正方形的边长为 $\sqrt{2}$ ………………………7 分

过 E 点作 $EF\perp CB$ 交 CB 的延长线于 F，$\therefore \angle EBF=90°-60°=30°$.

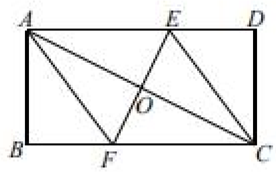
设正方形的边长为 x，则 $BF=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$EF=\frac{x}{2}$.

在 $Rt\Delta EFC$ 中，$\because EF^2+FC^2=EC^2$，$\therefore \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+x\right)^2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

解得，$x=\sqrt{2}$（舍去负值）. $\therefore$正方形的边长为 $\sqrt{2}$

25. （1）证明：$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形

$\therefore AD/\!/BC$ $\quad\therefore \angle CAD=\angle ACB$，$\angle AEF=\angle CFE$



$\because EF$ 垂直平分 AC，垂足为 O $\quad\therefore \Delta AOE\cong\Delta COF$

$\therefore OA=OC$ $\qquad\therefore OE=OF$

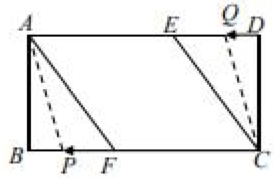
$\therefore$四边形 $AFCE$ 为平行四边形

又$\because$ $EF\perp AC$ $\quad\therefore$四边形 $AFCE$ 为菱形 ………4 分

（2）①$t=\frac{4}{3}$秒 ……………6 分

显然当 P 点在 AF 上时，Q 点在 CD 上，

此时 A、C、P、Q 四点不可能构成平行四边形；



同理 P 点在 AB 上时，Q 点在 DE 或 CE 上，也不能构成平行四边形.

因此只有当 P 点在 BF 上、Q 点在 ED 上时，才能构成平行四边形

∴以 A、C、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，$PC=QA$

∵点 P 的速度为每秒 $5cm$，点 Q 的速度为每秒 $4cm$，运动时间为 t 秒

∴ $PC=5t$，$QA=12-4t$ ∴ $5t=12-4t$，解得 $t=\frac{4}{3}$

∴以 A、C、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，$t=\frac{4}{3}$秒.

②a 与 b 满足的数量关系式是 $a+b=12$ ……………8 分

由题意得，以 A、C、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，

点 P、Q 在互相平行的对应边上，分三种情况：

i)如图 1，当 P 点在 AF 上、Q 点在 CE 上时，$AP=CQ$，即 $a=12-b$，得 $a+b=12$

ii)如图 2，当 P 点在 BF 上、Q 点在 DE 上时，$AQ=CP$，即 $12-b=a$，得 $a+b=12$

iii)如图 3，当 P 点在 AB 上、Q 点在 CD 上时，$AP=CQ$，即 $12-a=b$，得 $a+b=12$

综上所述，a 与 b 满足的数量关系式是 $a+b=12\ (ab\neq 0)$

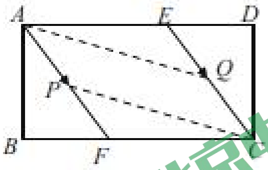


图 1

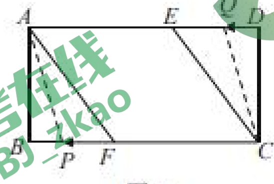


图 2

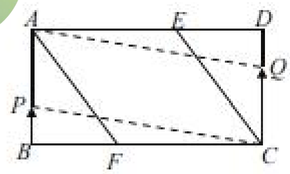


图 3

附加题(每题 4 分，共 20 分)

题号	26	27	28	29	30	
答案	4	17	$2\sqrt{3}$	8	120	3