2023 北京五十五中高三 12 月月考

数　学

本试卷共 8 页，共 150 分，考试时长 120 分钟

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项，把答案填在答题纸上）

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|y=\ln\left(1-x^2\right)\right\}$，$B=\left\{y\middle|y=\sqrt{x}\right\}$，则 $A\cap B$ 是（　）

A．$[0,1)$　　B．$(0,1]$　　C．$[-1,0)$　　D．$(-1,0]$

2．设 $a=\lg 2$，$b=\cos 2$，$c=2^{0.2}$，则（　）

A．$b<c<a$　　B．$c<b<a$　　C．$b<a<c$　　D．$a<b<c$

3．在 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中，若第 3 项的系数为 10，则 $n=$（　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

4．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=3$，$AC=5$，$A=120°$，则 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=$（　）

A．$\dfrac{5}{7}$　　B．$\dfrac{7}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{5}{3}$

5．在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，则“角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的（　）

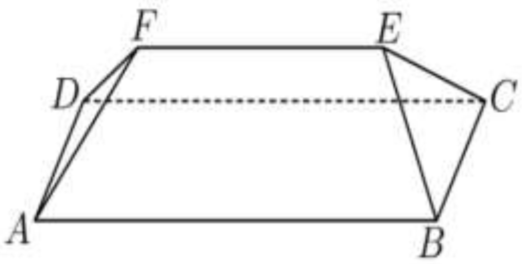
A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．设斜率为 2 的直线 l 过抛物线 $y^2=ax\left(a\neq 0\right)$ 的焦点 F，且与 y 轴交于点 A，若 $\triangle OAF$（O 为坐标原点）的面积为 4，则抛物线方程为（　）

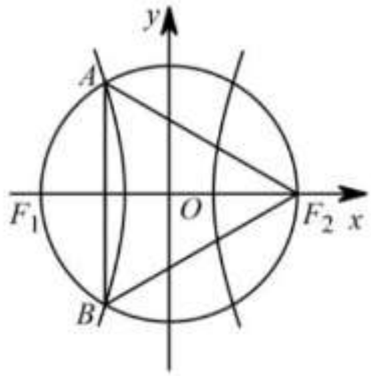
A．$y^2=\pm 4x$　　B．$y^2=4x$　　C．$y^2=\pm 8x$　　D．$y^2=8x$

7．坡屋顶是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素，安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之美．如图，某坡屋顶可视为一个五面体，其中两个面是全等的等腰梯形，两个面是全等的等腰三角形．若 $AB=25\text{m}$，$BC=AD=10\text{m}$，且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\dfrac{\sqrt{14}}{5}$，则该五面体的所有棱长之和为（　）



A．102m　　B．112m　　C．117m　　D．125m

8．如图，F_1, F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0, b>0\right)$ 的两个焦点，以坐标原点 O 为圆心，$\left|OF_1\right|$ 为半径的圆与该双曲线左支交于 A, B 两点，若 $\triangle F_2AB$ 是等边三角形，则双曲线的离心率为（　）



A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}-1$　　D．$1+\sqrt{3}$

9．血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数，人体的血氧饱和度正常范围是 $95\%\sim100\%$，当血氧饱和度低于 90% 时，需要吸氧治疗，在环境模拟实验室的某段时间内，可以用指数模型：$S\left(t\right)=S_0e^{Kt}$ 描述血氧饱和度 $S\left(t\right)$ 随给氧时间 t（单位：时）的变化规律，其中 S_0 为初始血氧饱和度，K 为参数．已知 $S_0=60\%$，给氧 1 小时后，血氧饱和度为 80%．若使得血氧饱和度达到 90%，则至少还需要给氧时间（单位：时）为（　）（精确到 0.1，参考数据：$\text{In}2\approx0.69$，$\text{In}3\approx1.10$）

A．0.3　　B．0.5　　C．0.7　　D．0.9

10．在数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，若对任意的 $n\in N_+$，都有 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=t$（$t$ 为常数），则称数列 $\left\{a_n\right\}$ 为比等差数列，t 称为比公差．现给出以下命题：

①等比数列一定是比等差数列，等差数列不一定是比等差数列：

②若数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_n=\dfrac{2^{n-1}}{n^2}$，则数列 $\left\{a_n\right\}$ 是比等差数列，且比公差 $t=\dfrac{1}{2}$

③若数列 $\left\{c_n\right\}$ 满足 $c_1=1$，$c_2=1$，$c_n=c_{n-1}+c_{n-2}\left(n\geq3\right)$

则该数列不是比等差数列：

④若 $\left\{a_n\right\}$ 是等差数列，$\left\{b_n\right\}$ 是等比数列，则数列 $\left\{a_nb_n\right\}$ 是比等差数列．

其中所有真命题的序号是（　）

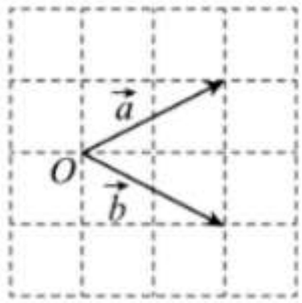
A．①②　　　　　　B．②③　　　　　　C．③④　　　　　　D．①③

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在答题纸上）

11．若复数 $z=a^2+a-2+\left(a^2-1\right)\mathrm{i}$ 为纯虚数，则实数 a 的值为______

12．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示，则 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角的余弦为______



13．已知直线 $Ax+By+C=0$（其中 $A^2+B^2=C^2$，$C\neq 0$）与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 M、N，O 是坐标原点，则 $\angle MON$ 为______

14．小明用数列 $\{a_n\}$ 记录某地区 2019 年 12 月份 31 天中每天是否下过雨，方法为：当第 k 天下过雨时，记 $a_k=1$，当第 k 天没下过雨时，记 $a_k=-1(1\le k\le 31)$：他用数列 $\{b_n\}$ 记录该地区该月每天气象台预报是否有雨，方法为：当预报第 k 天有雨时，记 $b_k=1$，当预报第 k 天没有雨时，记 $b_k=-1(1\le k\le 31)$；记录完毕后，

（1）小明计算出 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{31}b_{31}=25$，那么该月气象台预报准确的总天数为______

（2）若 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k=m$，则气象台预报准确的天数为______（用 m，k 表示）．

15．已知集合 $P=\left\{(x,y)\middle|(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=4,0\le\theta\le\pi\right\}$ 由集合 P 中所有的点组成的图形如图中阴影部分所示，中间白色部分形如美丽的“水滴”．给出下列结论;

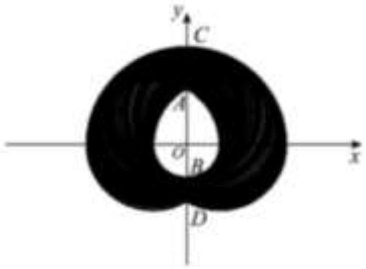
①“水滴”图形与 y 轴相交，最高点记为 A，则点 A 的坐标为 $(0,1)$；

②在集合 P 中任取一点 M，则 M 到原点的距离的最大值为 3;

③阴影部分与 y 轴相交，最高点和最低点分别记为 C，D，则 $|CD|=3+\sqrt{3}$；

③白色“水滴”图形的面积是 $\dfrac{11}{6}\pi-\sqrt{3}$．

其中正确的有______



三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．）

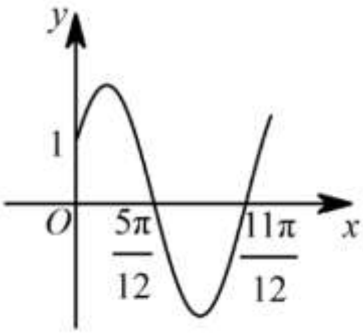
16．（本小题共 15 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（II）求函数 $g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)-f\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的单调递增区间

（III）求函数 $h(x)=f\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{12}\right)+f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最大值与最小值．



17．（本小题共 13 分）

如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=2AD=2EF=4$，$AE=DE=\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求证：$AB/\!/EF$；

（II）从下面四个条件中选择一个作为已知，使五面体 $ABCDEF$ 存在．

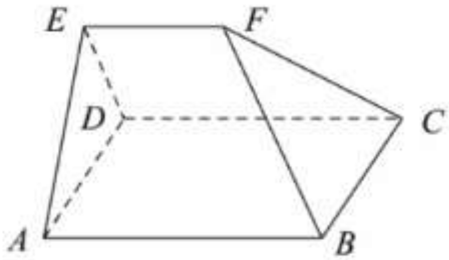
求直线 AE 与平面 BCF 所成角的正弦值．

条件①：平面$CDEF\perp$平面$ABCD$

条件②：平面$ADE\perp$平面$ABCD$

条件③：$CD\perp AE$

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．



18.（本小题 13 分）不粘锅是家庭常用的厨房用具，近期，某市消费者权益保护委员会从市场上购买了 12 款不粘锅商品，并委托第三方检测机构进行检测，本次选取了食物接触材料安全项目中与消费者使用密切相关的 6 项性能项目进行比较试验，性能检测项目包含不粘性、耐磨性、耐碱性、手柄温度、温度均匀性和使用体验等 6 个指标．其中消费者关注最多的两个指标“不沾性、耐磨性”检测结果的数据如下：

		检测结果					检测结果	
序号	品牌名称	不粘性	耐磨性		序号	品牌名称	不粘性	耐磨性
1	品牌 1	Ⅰ级	Ⅰ级		7	品牌 7	Ⅰ级	Ⅰ级
2	品牌 2	Ⅱ级	Ⅰ级		8	品牌 8	Ⅰ级	Ⅰ级
3	品牌 3	Ⅰ级	Ⅰ级		9	品牌 9	Ⅱ级	Ⅱ级
4	品牌 4	Ⅱ级	Ⅱ级		10	品牌 10	Ⅱ级	Ⅱ级
5	品牌 5	Ⅰ级	Ⅰ级		11	品牌 11	Ⅱ级	Ⅱ级
6	品牌 6	Ⅱ级	Ⅰ级		12	品牌 12	Ⅱ级	Ⅱ级

（Ⅰ级代表性能优秀，Ⅱ级代表性能较好）

（Ⅰ）从这 12 个品牌的样本数据中随机选取两个品牌的数据，求这两个品牌的“不粘性”性能都是Ⅰ级的概率：

（II）从前六个品牌、后六个品牌中各随机选取两个品牌的数据，求两个指标“不沾性、耐磨性”都是Ⅰ级的品牌个数恰为 2 个的概率；

（III）顾客甲从品牌 k，$k+1$，$k+2\left(k=1,4,7,10\right)$ 中随机选取 1 个品牌，用“$\xi_k=1$”表示选取的品牌两个指标“不沾性、耐磨性”都是Ⅰ级，“$\xi_k=0$”表示选取的品牌两个指标“不沾性、耐磨性”不都是Ⅰ级（k=1，4，7，10）．写出方差 $D\xi_1, D\xi_4, D\xi_7, D\xi_{10}$ 的大小关系（结论不要求证明）．

19.（本小题 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=e^{2x}\sin 2x-4x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（II）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上的最大值：

（III）设实数 a 使得 $f\left(x\right)+2x>ae^{2x}$ 对 $x\in R$ 恒成立，写出 a 的最大整数值，并说明理由．

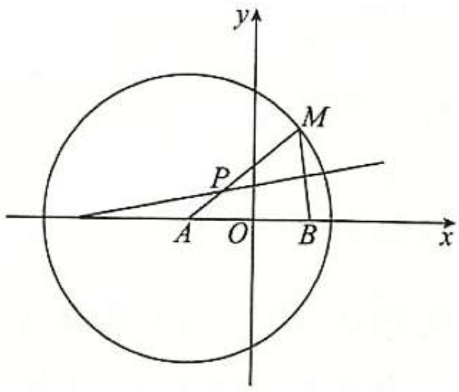
20.（本小题 14 分）

如图，点 M 是圆 $A:\left(x+\sqrt{3}\right)^2+y^2=16$ 上的动点，点 $B\left(\sqrt{3},0\right)$，线段 MB 的垂直平分线交半径 AM 于点

P.

（Ⅰ）求点 P 的轨迹 E 的方程；

（II）点 N 为曲线 E 与 y 轴负半轴的交点，不过点 N 且不垂直于坐标轴的直线 l：$y=kx+m$ 交曲线 E 于 S，T 两点，直线 SN，TN 分别与 x 轴交于 C，D 两点．若 C，D 两点的横坐标之积为 2，问：直线 l 是否过定点？如果是，求出定点坐标：如果不是，请说明理由．



21．（本小题 15 分）

设集合 $\Omega_n=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\middle|x_i\in\{0,1\},\ i=1,2,3,\cdots,n\right\}$，其中 n 为不小于 3 的正整数，对于集合 Ω_n 中的任意元素 $\alpha=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，$\beta=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)$

记 $a*\beta=\left(x_1+y_1-x_1y_1\right)+\left(x_2+y_2-x_2y_2\right)+\cdots+\left(x_n+y_n-x_ny_n\right)$.

（1）当 $n=3$ 时，若 $\alpha=(1,1,0)$，请写出满足 $a*\beta=3$ 的所有元素 β：

（II）当 $\alpha,\beta\in\Omega_n$，且 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，求 $a*\beta$ 的最大值和最小值；

（III）设 S 是 Ω_n 的子集，且满足：对于 S 中的任意两个不同元素 α，β，有 $\alpha*\beta\geq n-1$ 成立，求集合 S 中元素个数的最大值．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）