2023 北京首都师大附中高二 12 月月考

数　　学（5-12 班）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.）

1. 若直线 l 的倾斜角 α 满足 $0<\alpha<\frac{2\pi}{3}$，且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，则其斜率 k 满足（　）

A. $-\sqrt{3}<k<0$

B. $k>-\sqrt{3}$

C. $k>0$ 或 $k<-\sqrt{3}$

D. $k>0$ 或 $k<-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 圆 $x^2+y^2+2x-4y+3=0$ 的圆心到直线 $x+y=0$ 的距离为（　）

A. 2　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

3. 已知两条直线 $l_1: ax+y-1=0$ 和 $l_2: x+ay+1=0(a\in\mathrm{R})$，下列不正确的是（　）

A. “$a=1$”是“$l_1 // l_2$”的充要条件

B. 当 $l_1 // l_2$ 时，两条直线间的距离为 $\sqrt{2}$

C. 当 l_2 斜率存在时，两条直线不可能垂直

D. 直线 l_2 横截距为 1

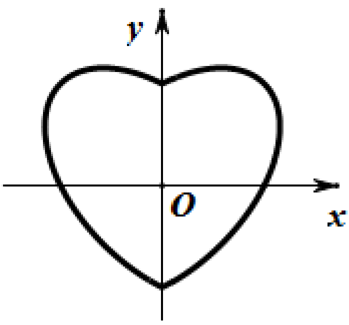
4. 若抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $P(2,y_0)$ 到其准线的距离为 4，则抛物线的标准方程为

A. $y^2=4x$　　B. $y^2=6x$　　C. $y^2=8x$　　D. $y^2=10x$

5. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的两焦点为 F_1，F_2，以 F_1F_2 为边作正三角形，若椭圆恰好平分正三角形的另两条边，则椭圆的离心率为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $4-2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}-1$

6. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 C：$x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一（如图）.给出下列三个结论：



①曲线 C 恰好经过 6 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$；

③曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3.

其中，所有正确结论的序号是

A. ①　　B. ②　　C. ①②　　D. ①②③

7. 已知圆 $x^2+y^2=4$ 与 x 轴的交点分别为 $A,B,$ 点 P 是直线 $l:x-y+4=0$ 上的任意一点，椭圆 C 以 A,B 为焦点且过点 P，则椭圆 C 的离心率 e 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\frac{\sqrt{10}}{5}\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{10}}{5},1\right)$

C. $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$

8. 法国数学家、化学家和物理学家加斯帕尔·蒙日被称为“画法几何之父”，他创立的画法几何学推动了空间解析几何的发展，被广泛应用于工程制图当中．过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外的一点作椭圆的两条切线，若两条切线互相垂直，则该点的轨迹是以椭圆的中心为圆心、以 $\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆，这个圆叫做椭圆的蒙日圆．若椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1(0<m<4)$ 的蒙日圆为 $E:x^2+y^2=7$，过圆 E 上的动点 M 作椭圆 C 的两条切线，分别与圆 E 交于 P，Q 两点，直线 PQ 与椭圆 C 交于 A，B 两点，则下列结论不正确的是（　）

A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$

B. M 到 C 的右焦点的距离的最大值为 $\sqrt{7}+1$

C. 若动点 N 在 C 上，记直线 AN，BN 的斜率分别为 k_1，k_2，则 $k_1k_2=-\frac{3}{4}$

D. $\triangle MPQ$ 面积的最大值为 $\frac{7}{2}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$，则双曲线 C 的渐近线方程为________.

10. 1970 年 4 月我国成功发射了第一颗人造地球卫星“东方红一号”，这颗卫星的运行轨道是以地心（地球的中心）为一个焦点的椭圆.已知卫星的近地点（离地面最近的点）距地面的高度约为 439km，远地点（离地面最远的点）距地面的高度约为 2384km，且地心、近地点、远地点三点在同一直线上，地球半径约为 6371km，则卫星运行轨道是上任意两点间的距离的最大值为__________ km .

11. 已知 F_1，F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点，AB 是过点 F_1 的一条弦（A，B 均在双曲线的左支上），若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 30，则 $|AB|=$__________.

12. 直线l过点$M\left(2,1\right)$且与椭圆$x^2+4y^2=16$相交于A，B两点，若点M为弦AB的中点，则直线l的斜率为______.

13. 如果点$M\left(x,y\right)$在运动过程中，总满足关系式$\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}=4$，记满足此条件的点$M$的轨迹为$C$，直线$x=m$与$C$交于$D$，$E$，已知$A\left(-1,0\right)$，则$\triangle ADE$周长的最大值为______.

14. 设定点$M\left(a,3\right)$，抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，点P为抛物线上的动点，若$\left|PM\right|+\left|PF\right|$的最小值为5，则实数$a$的值为__________

三、解答题（本大题共 4 小题，共 50 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15. 已知直线l的方程为$\left(a+1\right)x+y-5-2a=0\left(a\in \mathrm{R}\right)$.

（1）求直线l过的定点P的坐标；

（2）直线l与x轴正半轴和y轴正半轴分别交于点A，B，当$\triangle AOB$面积最小时，求直线l的方程；

16. 已知圆$C:x^2+y^2+ax+4y+3=0$和直线l相切于点$P\left(2,-1\right)$.

（1）求圆C的标准方程及直线l的一般式方程；

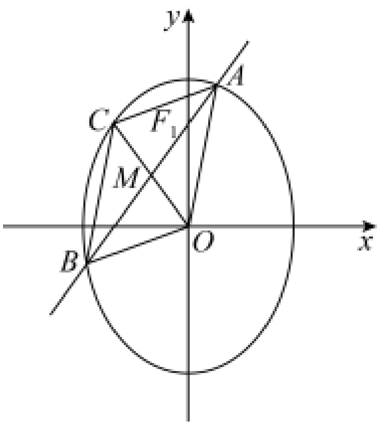
（2）已知直线m经过点P，并且被圆C截得的弦长为$2\sqrt{2}$，求直线m的方程.

17. 在平面直角坐标系xOy中，动点P到点$T\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$的距离比它到直线$l:y=-1$的距离大$\frac{1}{2}$.

（1）求动点P的轨迹C的方程；

（2）过点T的直线l与动点P的轨迹C交于A，B两点，求证：$\dfrac{1}{\left|AT\right|}+\dfrac{1}{\left|BT\right|}$为定值.

18. 如图，已知椭圆$E:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为$F_1(0,1)$，离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



（1）求椭圆E的方程；

（2）过点F_1作斜率为k的直线交椭圆E于两点A，B，AB的中点为M．设O为原点，射线OM交椭圆E于点C．当$\triangle ABC$与$\triangle ABO$的面积相等时，求k的值.

参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.）

1.【答案】C

【分析】根据倾斜角和斜率关系可求斜率的范围.

【详解】斜率 $k=\tan\alpha$，因为 $0<\alpha<\frac{2\pi}{3}$，且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，

故 $\tan\alpha>0$ 或 $\tan\alpha<-\sqrt{3}$，即 $k>0$ 或 $k<-\sqrt{3}$，

故选：C.

【点睛】本题考查倾斜角与斜率的关系，一般地，如果直线的倾斜角为 θ，则当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，直线的斜率不存在，当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，斜率 $k=\tan\theta$.

2.【答案】B

【分析】由圆的方程可得圆心坐标，再由点到直线的距离公式求解即得.

【详解】由圆 $x^2+y^2+2x-4y+3=0$ 可得圆心坐标为：(−1，2)，

所以圆心到直线 $x+y=0$ 的距离为 $d=\frac{|-1+2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B

3.【答案】D

【分析】由直线平行关系可以判断 A 正确；利用平行线间距离公式可以判断 B 正确；利用垂直关系可以判断 C 正确；令 $y=0$ 可以求出直线 l_2 得横截距.

【详解】当 $l_1 // l_2$ 时，$a\cdot a=1\times1$，则 $a=\pm1$，

当 $a=-1$ 时，直线 l_1 与 l_2 重合，故舍去，所以 A 正确；

当 $a=1$ 时，$l_1 // l_2$，$l_1: x+y-1=0$ 和 $l_2: x+y+1=0(a\in\mathrm{R})$ 间的距离为

$d=\frac{|-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，所以 B 正确；

若 $l_1\perp l_2$，则 $a\cdot1+1\cdot a=0$，则 $a=0$，

又当 l_2 斜率存在时，$a\neq0$，所以 C 正确；

$l_2: x+ay+1=0(a\in\mathrm{R})$，令 $y=0$ 得 $x=-1$，所以直线 l_2 横截距为-1，

所以 D 错误.

故选：D.

4.【答案】C

【详解】试题分析：∵抛物线 $y^2=2px$，∴准线为 $x=-\frac{P}{2}$，∵点 $P(2,y_0)$ 到其准线的距离为 4，∴

$$\left|-\frac{P}{2}-2\right|=4,$$

∴ $p=4$，∴抛物线的标准方程为 $y^2=8x$.

考点：1.抛物线的标准方程；2.抛物线的准线方程；3.点到直线的距离.

5.【答案】D

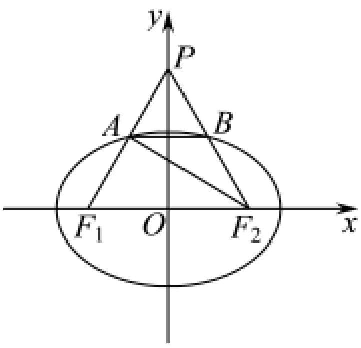
【分析】设椭圆与正三角形另两条边的交点分别是 A，B，易得 $AF_1=AB=BF_2=c$，$\angle F_1AF_2=90^\circ$，由此建立 a，c 的齐次式，进而可得结果.

【详解】设椭圆与正三角形另两条边的交点分别是 A，B，

易得 $|AF_1|=|AB|=|BF_2|=c$，$\angle F_1AF_2=90^\circ$，

∴ $|AF_2|=\sqrt{3}c$，∴ $|AF_1|+|AF_2|=\left(\sqrt{3}+1\right)c=2a$，

∴ $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}c}=\sqrt{3}-1$，



故选：D.

6.【答案】C

【分析】将所给方程进行等价变形确定 x 的范围可得整点坐标和个数，结合均值不等式可得曲线上的点到坐标原点距离的最值和范围，利用图形的对称性和整点的坐标可确定图形面积的范围.

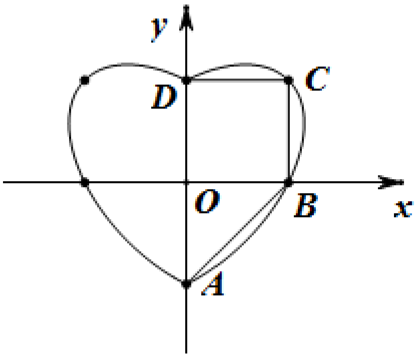
【详解】由 $x^2+y^2=1+|x|y$ 得，$y^2-|x|y=1-x^2$，$\left(y-\frac{|x|}{2}\right)^2=1-\frac{3x^2}{4}, 1-\frac{3x^2}{4}\geqslant 0, x^2\leqslant\frac{4}{3}$，

所以 x 可为的整数有 0, −1, 1, 从而曲线 $C: x^2+y^2=1+|x|y$ 恰好经过 (0, 1)，(0, −1)，(1, 0)，(1, 1)，(−1, 0)，(−1, 1) 六个整点，结论①正确.

由 $x^2+y^2=1+|x|y$ 得，$x^2+y^2\leqslant 1+\frac{x^2+y^2}{2}$，解得 $x^2+y^2\le 2$，所以曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$. 结论②正确.

如图所示，易知 $A(0,-1), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$，

四边形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times1\times1+1\times1=\frac{3}{2}$，很明显“心形”区域的面积大于 $2S_{ABCD}$，即“心形”区域的面积大于 3, 说法③错误.



故选 C.

【点睛】本题考查曲线与方程、曲线的几何性质，基本不等式及其应用, 属于难题, 注重基础知识、基本运算能力及分析问题解决问题的能力考查, 渗透“美育思想”.

7.【答案】A

【分析】由题意易得椭圆的半焦距 $c=2$，然后求得点 $B(2,0)$ 关于直线 $l:y=x+4$ 的对称点为 $B'(x',y')$，由 $2a=|A'B|$，此时椭圆 C 的离心率取得最大值求解.

【详解】$\because$ 圆 $x^2+y^2=4$ 与 x 轴的交点分别为 $(-2,0)$，$(2,0)$，不妨令点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，

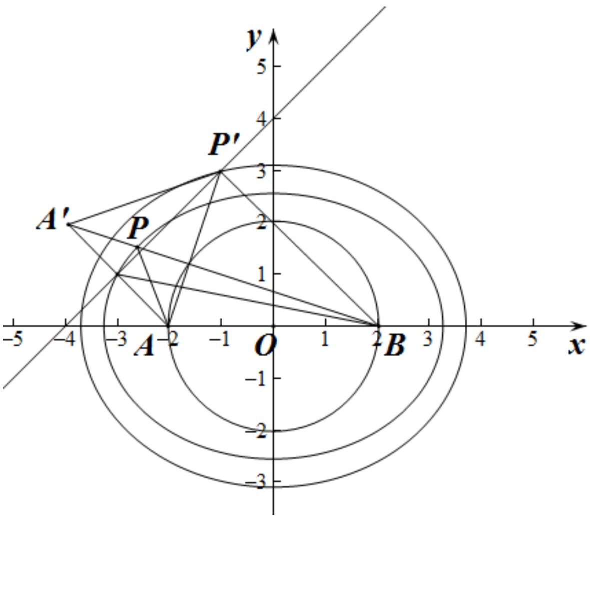
$\therefore$ 椭圆的半焦距 $c=2$.

设点 $A(-2,0)$ 关于直线 $l:y=x+4$ 的对称点为 $A'(x',y')$，

$\therefore\begin{cases}\frac{y'}{2}=\frac{x'-2}{2}+4\\ \frac{y'}{x'+2}=-1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x'=-4\\ y'=2\end{cases}$，

$\therefore A'(-4,2)$.

如图所示：



连接 $A'B$ 交直线 l 于点 P，此时 $2a$ 有最小值，此时的最小值为 $|A'B|=\sqrt{(-4-2)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{10}$，

当长轴长最小时，椭圆 C 的离心率取得最大值，

即 $e_{\max}=\frac{2c}{2a}=\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

又 $\because e\in(0,1)$，

$\therefore$ 椭圆 C 的离心率 e 的取值范围为 $\left(0,\frac{\sqrt{10}}{10}\right]$，

故选：A

8.【答案】D

【分析】A.根据蒙日圆的定义，可求椭圆方程，即可判断；

B.根据椭圆方程和圆的方程，结合几何意义，即可判断；

C.根据 PQ 为圆的直径，则点 A,B 关于原点对称，利用点在椭圆上，证明 $k_1k_2=-\frac{3}{4}$；

D.利用圆的几何性质，确定 $\triangle MPQ$ 面积的最大值.

【详解】A.因为椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1\left(0<m<4\right)$ 的蒙日圆为 $E:x^2+y^2=7$，根据蒙日圆的定义，

$4+m=7$，得 $m=3$，所以椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$a^2=4$，$b^2=3$，则 $c^2=1$，所以椭圆的离心率

$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，故 A 正确；

B.点 M 是圆 $E:x^2+y^2=7$ 上的动点，椭圆的右焦点 $F\left(1,0\right)$，则 $|MF|$ 的最大值是 $\sqrt{7}+1$，故 B 正确；

C.根据蒙日圆的定义可知 $MP\perp MQ$，则 PQ 为圆 E 的直径, PQ 与椭圆交于两点 A,B，点 A,B 关于原点对称，设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(-x_1,-y_1\right)$，$N\left(x_0,y_0\right)$，

$$k_{AN}\cdot k_{BN}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=\frac{-\frac{3}{4}\left(x_0^2-x_1^2\right)}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{3}{4}$$，故 C 正确；

D.因为 PQ 为圆的直径，$|PQ|=2\sqrt{7}$，当点 M 到直线 PQ 的距离为 $r=\sqrt{7}$ 时，$\triangle PQM$ 的面积最大，此时最大值是 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\sqrt{7}=7$，故 D 错误.

故选：D

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9.【答案】$x\pm2y=0$

【分析】先根据题意求 a，进而可得渐近线方程.

【详解】由题意可得：$b=1, c=\sqrt{5}$，且双曲线的焦点在 x 轴上，则 $a=\sqrt{c^2-b^2}=2$，

故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$，即 $x\pm 2y=0$.

故答案为：$x\pm 2y=0$.

10.【答案】15565

【分析】根据题意由 a-c=439+6371，a+c=2384+6371，求得 $2a$ 即可.

【详解】设椭圆的长半轴长为 a，半焦距为 c，

由题意得：a-c=439+6371，a+c=2384+6371，

两式相加得：$2a$=15565，

因为椭圆上任意两点间的距离的最大值为长轴长 $2a$，

所以卫星运行轨道是上任意两点间的距离的最大值为15565，

故答案为：15565

11.【答案】9

【分析】求得双曲线的 a，结合双曲线的定义和三角形的周长，解方程可得所求值.

【详解】解：双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，得 a=3，

因为 A，B 均在双曲线的左支上，所以 $|AF_2|-|AF_1|=2a, |BF_2|-|BF_1|=2a$，

则△ABF_2 的周长为 $|AF_2|+|BF_2|+|AB|=(|AF_1|+2a)+(|BF_1|+2a)+|AB|=2|AB|+4a$，

所以 $2|AB|+4\times 3=30$，

所以 $|AB|=9$.

故答案为：9.

12.【答案】$-\frac{1}{2}$

【分析】设出A，B 两点的坐标，代入椭圆方程作差后化简得出 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{4}$，再通过中点坐标与两端点坐标关系结合已知得出 $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ y_1+y_2=2 \end{cases}$，代入即可解出答案.

【详解】设A，B 两点的坐标分别为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

$\because$ 直线 l 与椭圆 $x^2+4y^2=16$ 相交于A，B 两点，

$\therefore \begin{cases} x_1^2+4y_1^2=16 \\ x_2^2+4y_2^2=16 \end{cases}$，作差得：$x_1^2-x_2^2+4y_1^2-4y_2^2=0$，

即 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{4}$，

$\because$ 点 $M(2,1)$ 在椭圆内，且为弦 AB 的中点，

$\therefore \begin{cases}x_1+x_2=4\\y_1+y_2=2\end{cases}$，代入 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{4}$ 解得：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，

故直线 l 的斜率 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

13.【答案】8

【分析】根据椭圆定义判断出轨迹，分析条件结合椭圆定义可知当直线 $x=m$ 过右焦点时，三角形 ADE 周长最大.

【详解】$\because \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4$，

$\therefore M(x,y)$ 到定点 $(1,0)$，$(-1,0)$ 的距离和等于常数 $4>2$，

$\therefore M$ 点的轨迹 C 为椭圆，且 $a=2, c=1$

故其方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

则 $A(-1,0)$ 为左焦点，

因为直线 $x=m$ 与 C 交于 D，E，则 $-2<m<2$，不妨设 D 在 x 轴上方，E 在 x 轴下方，

设椭圆右焦点为 A'，连接 DA'，EA'，

因为 $DA'+EA'\geqslant DE$，

所以 $DA+EA+DA'+EA'\geqslant DA+EA+DE$，即 $4a\geqslant DA+EA+DE$，

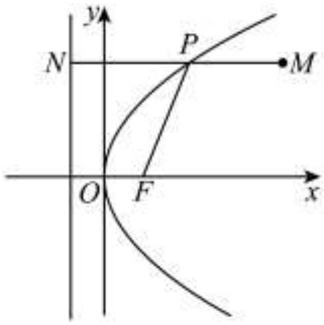
所以△ADE 的周长 $\leq 4a=8$，当 $m=1$ 时取得最大值 8，

故答案为：8

14.【答案】-3 或 4

【分析】分点 M 在抛物线内部、外部讨论，利用抛物线的定义，将 $|PF|$ 转化为 P 到准线的距离即可求解.

【详解】①若 M 在抛物线内部，如下图，



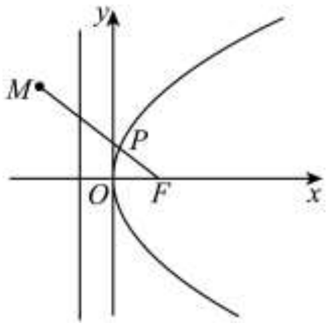
过 P 作 PN 垂直准线，由抛物线的定义有，$|PF|=|PN|$，

所以当 M，P，N 三点共线时，$|PM|+|PF|$ 最小，

因为准线方程为 $x=-1$，

所以 $a-(-1)=5$，解得 $a=4$；

② 若 M 在抛物线的外部，则当 M，P，F 共线，且 P 在 M，F 之间时，$|PM|+|PF|$ 最小，$F(1,0)$，



则 $|PM|+|PF|$ 的最小值为 $|FM|=\sqrt{(a-1)^2+(3-0)^2}=5$，

解得 $a=-3$ 或 $a=5$，

由于 $a=5$ 时，M 在抛物线的内部，所以舍去，

综上，$a=-3$ 或 4.

故答案为：-3 或 4.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 50 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15. 【答案】（1）$(2,3)$；

（2）$3x+2y-12=0$

【分析】（1）将直线 l 的方程变形，列出方程组即可求解；

（2）利用直线的截距式方程设出直线 l 的方程，根据（1）的结论及基本不等式，结合三角形的面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

由题意，直线 l 的方程可化为 $(x-2)a+x+y-5=0$，

联立方程组 $\begin{cases}x-2=0\\x+y-5=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，

所以直线l过的定点$P(2,3)$.

【小问 2 详解】

设直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，则$A\ \ a,0\ \ ,B\ \ 0,b$，

由（1）知，直线l过的定点$P(2,3)$，可得$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$，

因为$a>0,b>0$，

所以$1=\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{6}{ab}}$，解得$ab\geq 24$，

当且仅当$\frac{2}{a}=\frac{3}{b}$且$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$即$a=4,b=6$时，等号成立，

所以$\triangle AOB$面积为$S=\frac{1}{2}|a||b|=\frac{1}{2}ab\geq\frac{1}{2}\times 24=12$，

此时对应的直线方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$，即$3x+2y-12=0$.

16.【答案】（1）圆C的标准方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=2$，直线l的一般方程为$x+y-1=0$；

（2）$x-y-3=0$

【分析】（1）将点P的坐标代入圆C的方程，求出实数a的值，可得出圆C的标准方程，求出直线PC的斜率，由圆的几何性质可得$PC\perp l$，可求得直线l的斜率，利用点斜式可得出直线l的方程，化为一般式即可；

（2）分析可知直线m过圆心，求出直线m的斜率，利用点斜式可得出直线m的方程.

【小问 1 详解】

解：把点$P(2,-1)$代入圆C的方程，可得$4+1+2a-4+3=0$，解得$a=-2$，

$\therefore$得C的方程为$x^2+y^2-2x+4y+3=0$，即$(x-1)^2+(y+2)^2=2$，

$\because$圆心为$C(1,-2)$，所以，直线PC的斜率为$k_{PC}=\frac{-1+2}{2-1}=1$，

由圆的几何性质可知$PC\perp l$，则直线l的斜率为-1，

$\therefore$直线l的方程为$y+1=-(x-2)$，即$x+y-1=0$.

【小问 2 详解】

解：由（1）可知，圆C的直径为$2\sqrt{2}$，故直线m经过圆心$C(1,-2)$，

且直线PC的斜率为$k_{PC}=1$，$\therefore$直线m的方程为$y+1=x-2$，即$x-y-3=0$.

17.【答案】（1）$x^2=6y$

（2）证明见解析

【分析】(1）方法一：设动点$P(x,y)$，由题意得到$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}=|y+1|+\frac{1}{2}$求解；方法二：由题意得到动点$P$到点$T\left(0,\frac{3}{2}\right)$的距离与它到直线$l:y=-\frac{3}{2}$的距离相等．利用抛物线的定义求解.

(2）设直线l的方程为$y=kx+\frac{3}{2}$，与抛物线方程联立，结合韦达定理证明.

【小问1详解】

解：(方法一）设动点$P(x,y)$，由题意，有$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}=|y+1|+\frac{1}{2}(*)$.

若$y\ge -1$，则$(*)$式为$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}=y+\frac{3}{2}$，两边平方，并化简可得$x^2=6y$；

若$y<-1$，则$(*)$式为$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}=-y-\frac{1}{2}$，两边平方，并化简可得$x^2=4y-2$，显然不成立.

所以动点P的轨迹C的方程为$x^2=6y$.

(方法二）由动点P到点$T\left(0,\frac{3}{2}\right)$的距离比它到直线$l:y=-1$的距离大$\frac{1}{2}$，

知动点P到点$T\left(0,\frac{3}{2}\right)$的距离与它到直线$l:y=-\frac{3}{2}$的距离相等.

由抛物线的定义知，动点P的轨迹C的方程为$x^2=6y$.

【小问2详解】

设直线l的方程为$y=kx+\frac{3}{2}$，

由$\begin{cases}y=kx+\frac{3}{2},\\x^2=6y,\end{cases}$消$y$整理得$x^2-6kx-9=0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=6k$，$x_1x_2=-9$，

所以$y_1+y_2=6k^2+3$，$y_1y_2=\frac{9}{4}$.

所以$\frac{1}{|AT|}+\frac{1}{|BT|}=\frac{1}{y_1+\frac{3}{2}}+\frac{1}{y_2+\frac{3}{2}}=\frac{y_1+y_2+3}{\left(y_1+\frac{3}{2}\right)\left(y_2+\frac{3}{2}\right)}=\frac{y_1+y_2+3}{y_1y_2+\frac{3}{2}(y_1+y_2)+\frac{9}{4}}$，

$=\frac{6k^2+6}{\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\times(6k^2+3)+\frac{9}{4}}=\frac{6k^2+6}{9k^2+9}=\frac{2}{3}$，

所以$\frac{1}{|AT|}+\frac{1}{|BT|}$为定值，得证.

18.【答案】(1) $\frac{y^2}{2}+x^2=1$；

(2) $k=\pm\sqrt{2}$.

【分析】(1) 由题意得到$\begin{cases}c=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解出即可.

(2) AB的方程为$y=kx+1$，联立椭圆方程得$\left(k^2+2\right)x^2+2kx-1=0$，设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$,得到两根之和式，设$C\left(x_0,y_0\right)$,根据$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，从而$x_0=x_1+x_2=\frac{-2k}{k^2+2},y_0=y_1+y_2=\frac{4}{k^2+2}$，结合其在椭圆上得到$\frac{8k^2}{\left(k^2+2\right)^2}+\frac{16}{\left(k^2+2\right)^2}=2$，解出即可.

【小问1详解】

由题设,$\begin{cases}c=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，

解得$a=\sqrt{2},b=1$.

所以椭圆E的方程为$\frac{y^2}{2}+x^2=1$.

【小问2详解】

直线AB的方程为$y=kx+1$.

由$\begin{cases}y=kx+1,\\ 2x^2+y^2=2\end{cases}$得$\left(k^2+2\right)x^2+2kx-1=0$

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$,

则$x_1+x_2=\frac{-2k}{k^2+2},y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2=\frac{4}{k^2+2}$.

因为$\triangle ABC$与$\triangle ABO$的面积相等,所以点C和点O到直线AB的距离相等.

所以M为线段OC的中点,即四边形$OACB$为平行四边形.设$C\left(x_0,y_0\right)$,

则$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

所以$x_0=x_1+x_2=\frac{-2k}{k^2+2},y_0=y_1+y_2=\frac{4}{k^2+2}$.

将上述两式代入 $2x_0^2+y_0^2=2$，

得 $\dfrac{8k^2}{\left(k^2+2\right)^2}+\dfrac{16}{\left(k^2+2\right)^2}=2$.

解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

【点睛】关键点睛：本题第二问得到两根之和式 $x_1+x_2=\dfrac{-2k}{k^2+2},y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2=\dfrac{4}{k^2+2}$，通过面积相等则得到 M 为线段 OC 的中点，则 M 为线段 OC 的中点，利用向量加法得到 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，从而用 k 表示出 C 点坐标，最后结合其在椭圆上，代入椭圆方程即可.