北京市海淀外国语实验学校初三3月份月考数学试题

2020.3.17

班级__________　　　　姓名___________

考生须知	1．本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。 2．在试卷和答题卡上准确填写班级和姓名。 3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4．在答题卡上，作图题用 2B 铅笔作答，其他题用黑色字迹签字笔作答。

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

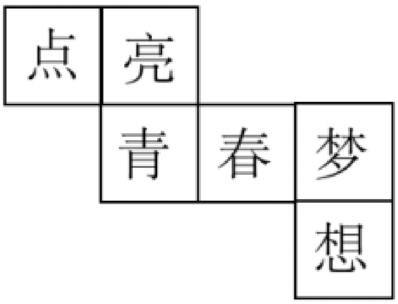
第 1−8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

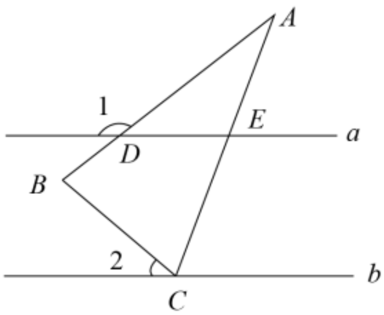
1．响应党中央号召，连日来，全国广大共产党员继续踊跃捐款，表达对新冠肺炎疫情防控工作的支持。据统计，截至 3 月 10 日，全国已有 7436 万多名党员自愿捐款，共捐款 76.8 亿元，则 76.8 亿元用科学记数法可表示为

A．7.68×10^{9} 元　B．7.68×10^{10} 元　C．76.8×10^{8} 元　D．0.768×10^{10} 元

2. 某正方体的每个面上都有一个汉字，如图是它的一种展开图，那么在原正方体中，与“点”字所在面相对的面上的汉字是

A.青　　　B.春　　　C.梦　　　D.想





3．如图，在△ABC 中，AB=AC，∠A=30°，直线 a∥b，顶点 C 在直线 b 上，直线 a 交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，若∠1=145°，则∠2 的度数是

A.30°　　　B.35°　　　C.40°　　　D.45°

4．下列运算正确的是

A．$\left(-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{9}{4}$　　B．$(3a^2)^3=9a^6$　　C．$5^{-3}\div5^{-5}=\frac{1}{25}$　　D．$\sqrt{8}-\sqrt{50}=-3\sqrt{2}$

5．如图 1，该大桥由五个高度不同，跨径也不同的抛物线型钢拱通过吊桥，拉锁与主梁相连，最高的钢拱如图 2 所示，此钢拱（近似看成二次函数的图象-抛物线）在同一竖直平面内，与拱脚所在的水平面相交于 A，B 两点，拱高为 78 米（即最高点 O 到 AB 的距离为 78 米），跨径为 90 米（即 AB=90 米），以最高点 O 为坐标原点，以平行于 AB 的直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则此抛物线钢拱的函数表达式为

A. $y=\frac{26}{675}x^2$　　B. $y=-\frac{26}{675}x^2$　　C. $y=\frac{13}{1350}x^2$　　D. $y=-\frac{13}{1350}x^2$

图 1

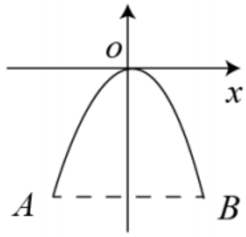
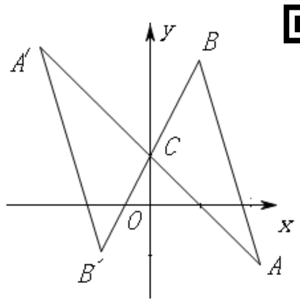


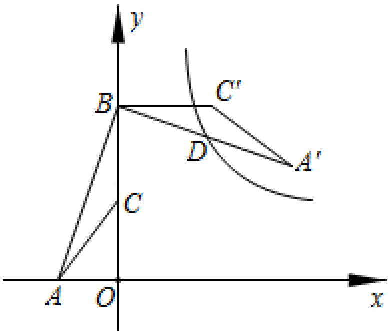
图 2



6．如右上图，将△*ABC* 绕点 *C*（0，1）旋转 180°得到△*A′B′C*，设点 *A* 的坐标为 (a,b)，则点 A' 的坐标为

A. $(-a,-b)$　　B. $(-a,-b+1)$　　C. $(-a,-b-1)$　　D. $(-a,-b+2)$

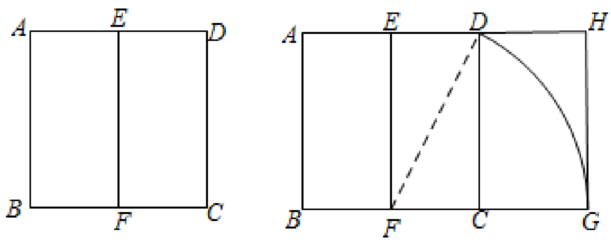
7．如图，点 *A* 的坐标是（－2，0），点 *B* 的坐标是（0，6），*C* 为 *OB* 的中点，将△*ABC* 绕点 *B* 逆时针旋转 90°后得到△*A′B′C′*．若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象恰好经过 *A′B* 的中点 *D*，则 *k* 的值是



A．9　　B．12　　C．15　　D．18

8．宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（约为 0．618）的矩形叫做黄金矩形．黄金矩形蕴藏着丰富的美学价值，给我们以协调和匀称的美感．我们可以用这样的方法画出黄金矩形：作正方形 *ABCD*，分别取 *AD*，*BC* 的中点 *E*，*F*，连接 *EF*；以点 *F* 为圆心，以 *FD* 为半径画弧，交 *BC* 的延长线与点 *G*；作 $GH \perp AD$，交 *AD* 的延长线于点 *H*．则图中下列矩形是黄金矩形的是

A．矩形 *DCGH*　　*B*．矩形 *EFCD*　　*C*．矩形 *EFGH*　　*D*．矩形 *ABFE*



二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

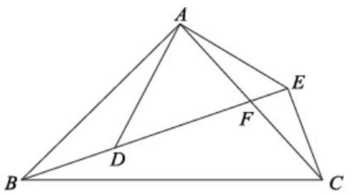
9．已知 *x*＝1 是方程 $x^2+bx-2=0$ 的一个根，则方程的另一个根是_______.

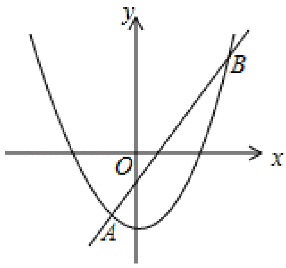
10．已知点 *P*（*x*，*y*）位于第四象限，并且 *x*≤*y*+4（*x*，*y* 为整数），写出一个符合上述条件的点 *P* 的坐标_______.

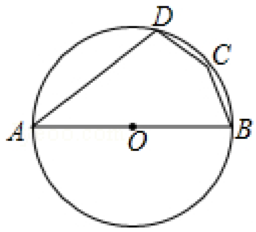
11．已知一次函数 $y=kx+b$ ($b\neq 0$)经过(2,-1),(-3,4)两点,则它的图象不经过第_____象限.

12．世界文化遗产“三孔”景区已经完成 5*G* 基站布设，“孔夫子家”自此有了 5*G* 网络．5*G* 网络峰值速率为 4*G* 网络峰值速率的 10 倍，在峰值速率下传输 500 兆数据，5*G* 网络比 4*G* 网络快 45 秒，求这两种网络的峰值速率．设 4*G* 网络的峰值速率为每秒传输 x 兆数据，依题意，可列方程是________________．

13．如下图左，在△ABC 中，∠BAC=90°，AB=AC=$4\sqrt{6}$ cm，点 D 为△ABC 内一点，∠BAD=15°，AD=6cm，连接 BD，将△ABD 绕点 A 逆时针方向旋转，使 AB 与 AC 重合，点 D 的对应点 E，连接 DE，DE 交 AC 于点 F，则 CF 的长为________cm.



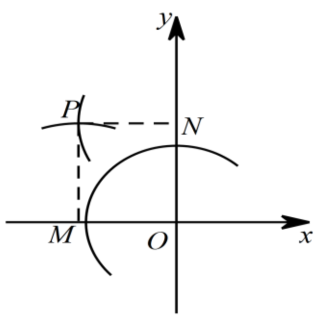




14．如上图中，抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 A（－1，p），B（3，q）两点，则不等式 $ax^2+mx+c>n$ 的解集是_______．

15. 如上图右，四边形 ABCD 内接于⊙O，AB 为⊙O 的直径，点 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点．若∠A=40°，则∠B=________度.

16．如图，在平面直角坐标系中，以 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 x 轴于点 M，交 y 轴于点 N，再分别以点 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在第二象限内交于点 $P(a,b)$，则 a 与 b 的数量关系是_______________.



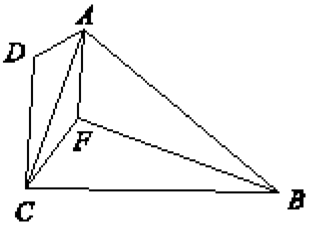
三、解答题（本题共 68 分，第 17−22 题，每小题 5 分；第 23−26 题，每小题 6 分；第 27−28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17．计算：$6\sin 60°-\sqrt{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^0+|\sqrt{3}-2020|$.

18．已知 $x+y=xy$，求代数式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-(1-x)(1-y)$ 的值.

19．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，BF 平分 $\angle ABC$，$AF // DC$，连接 AC，CF.

求证：（1）$AF=CF$；（2）CA 平分 $\angle DCF$.



20．去年某市为创评“全国文明城市”称号，周末团市委组织志愿者进行宣传活动．班主任梁老师决定从 4 名女班干部（小悦、小文、小雅和小宇）中通过抽签方式确定 2 名女生去参加．抽签规则：将 4 名女班干部姓名分别写在 4 张完全相同的卡片正面，把四张卡片背面朝上，洗匀后放在桌面上，梁老师先从中随机抽取一张卡片，记下姓名，再从剩余的 3 张卡片中随机抽取第二张，记下姓名．

（1）该班男生“小安被抽中”是______事件，“小悦被抽中”是______事件（填“不可能”或“必然”或“随机”）；第一次抽取卡片“小文被抽中”的概率为______；

（2）试用画树状图或列表的方法表示这次抽签所有可能的结果，并求出“小雅被抽中”的概率．

21．阅读以下材料，并按要求完成相应的任务：

莱昂哈德 欧拉（*Leonhard Euler*）是瑞士数学家，在数学上经常见到以他的名字命名的重要常数、公式和定理，下面是欧拉发现的一个定理：**在△ABC 中，R 和 r 分别为外接圆和内切圆的半径，O 和 I 分别为其外心和内心，则** $OI^2=R^2-2Rr$ **.**下面是该定理的证明过程（借助了第(2)问的结论）：

延长 AI 交⊙O 于点 D，过点 I 作⊙O 的直径 MN，连接 DM，AN.

∵∠D=∠N，∴∠DMI=∠NAI（同弧所对的圆周角相等），

∴△MDI∽△ANI.∴ $\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{ID}{IN}$，∴ $IA\cdot ID=IM\cdot IN$ ①

如图②，在图 1（隐去 MD，AN）的基础上作⊙O 的直径 DE，连接 BE，BD，BI，IF

∵DE 是⊙O 的直径，∴∠DBE=90°.

∵⊙I 与 AB 相切于点 F，∴∠AFI=90°，

∴∠DBE=∠IFA.

∵∠BAD=∠E（同弧所对圆周角相等），

∴△AIF∽△EDB.

∴ $\dfrac{IA}{DE}=\dfrac{IF}{BD}$，∴ $IA\cdot BD=DE\cdot IF$ ②

由（2）知：BD=ID

∴ $IA\cdot ID=DE\cdot IF$

又∵ $DE \cdot IF = IM \cdot IN$

$\therefore 2Rr=(R+d)(R-d)$，

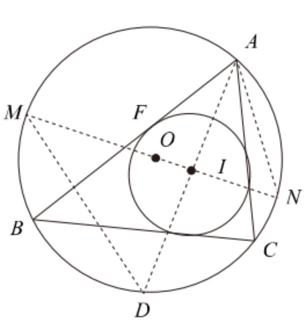
$\therefore R^2-d^2=2Rr$

$\therefore d^2=R^2-2Rr$

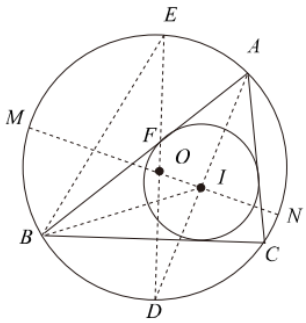
任务：（1）观察发现：$IM=R+d$，$IN=$_______（用含 R，d 的代数式表示）；

（2）请判断 BD 和 ID 的数量关系，并说明理由.（请利用图 1 证明）

（3）应用：若△ABC 的外接圆的半径为 6cm，内切圆的半径为 2cm，则△ABC 的外心与内心之间的距离为________cm.



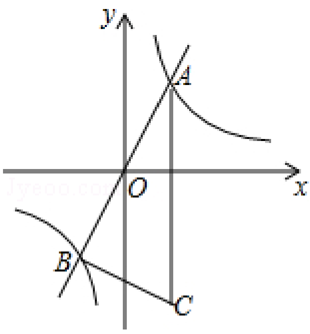
第21题图1

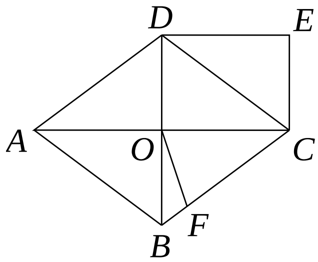


第21题图2

22．如图，反比例函数 y=$\dfrac{k}{x}$（k≠0）的图象与正比例函数 y=2x 的图象相交于 A（1，a），B 两点，点 C 在第四象限，CA∥y 轴，∠ABC=90°.

（1）求 k 的值及点 B 的坐标；　　（2）求 tanC 的值.





23．如上图右，菱形 *ABCD* 中，对角线 *AC*，*BD* 交于 *O* 点，*DE*∥*AC*，*CE*∥*BD*.

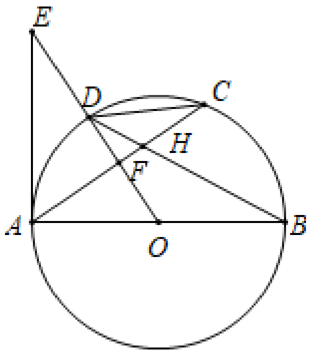
（1）求证：四边形 *OCED* 为矩形；

（2）在 *BC* 上截取 *CF*＝*CO*，连接 *OF*，若 *AC*＝16，*BD*＝12，求四边形 *OFCD* 的面积.

24．如图，AB 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上一点，D 是$\overset{\frown}{AC}$的中点，E 为 OD 延长线上一点，且$\angle CAE=2\angle C$，AC 与 BD 交于点 H，与 OE 交于点 F．

（1）求证：AE 是⊙O 的切线；

（2）若 $DH=6$，$\tan C=\frac{3}{4}$，求直径 AB 的长．



25．阅读下面的材料：

如果函数 $y=f(x)$ 满足：对于自变量 x 的取值范围内的任意 x_1，x_2，

（1）若 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是增函数；

（2）若 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是减函数．

例题：证明函数 $f(x)=\frac{6}{x}$（$x>0$）是减函数．

证明：设 $0<x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{6}{x_1}-\frac{6}{x_2}=\frac{6x_2-6x_1}{x_1x_2}=\frac{6(x_2-x_1)}{x_1x_2}$．

∵$0<x_1<x_2$，

∴$x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$．

∴$\frac{6(x_2-x_1)}{x_1x_2}>0$．即 $f(x_1)-f(x_2)>0$．

∴$f(x_1)>f(x_2)$．

∴函数 $f(x)=\frac{6}{x}$（$x>0$）是减函数．

根据以上材料，解答下面的问题：

已知函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}+2x(x<0)$，

$f(-1)=\dfrac{1}{(-1)^2}+(-2)=-1$，$f(-2)=\dfrac{1}{(-2)^2}+(-4)=-\dfrac{15}{4}$

（1）计算：$f(-3)=$_______，$f(-4)=$_______；

（2）猜想：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+2x(x<0)$ 是_______函数（填“增”或“减”）；

（3）请仿照例题证明你的猜想.

26．已知抛物线 $y=-2x^2+(m-2)x+(n-2020)$（m，n 为常数）.

（1）若抛物线的的对称轴为直线 x=1,且经过点（0，-1），求 m，n 的值；

（2）若抛物线上始终存在不重合的两点关于原点对称，求 n 的取值范围；

（3）在（1）的条件下，存在正实数 a，b($a<b$)，当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，恰好有 $\dfrac{1}{b}\leq y\leq\dfrac{1}{a}$，

请直接写出 a，b 的值.

27．小明研究了这样一道几何题：如图 1，在 ΔABC 中，把 AB 点 A 顺时针旋转 $\alpha\left(0^0<\alpha<180^0\right)$ 得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转 β 得到 AC'，连接 $B'C'$. 当 $\alpha+\beta=180^0$ 时， 请问 $\Delta AB'C'$ 边 $B'C'$ 上的中线 AD 与 BC 的数量关系是什么？

以下是他的研究过程：

特例验证：

（1）①如图 2，当 ΔABC 为等边三角形时，AD 与 BC 的数量关系为 $AD=$________ BC；

②如图 3，当 $\angle BAC=90^0, BC=8$ 时，则 AD 长为________________.

猜想论证：

（2）在图 1 中，当 ΔABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并给予证明.

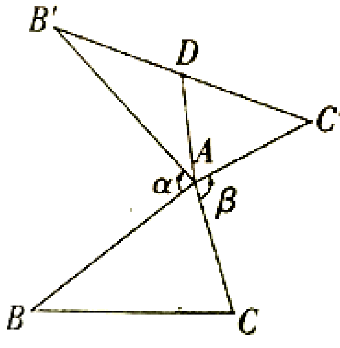


图 1

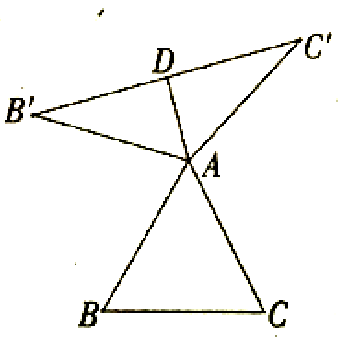


图 2

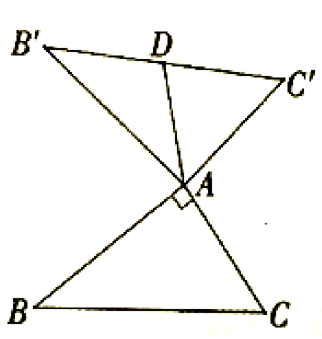


图 3

拓展应用

（3）如图 4，在四边形 $ABCD$，

$\angle C=90°, \angle A+\angle B=120°, BC=12\sqrt{3}, CD=6, DA=6\sqrt{3}$. 在四边形内部是否存在点 P，使 ΔPDC 与 ΔPAB 之间满足小明探究的问题中的边角关系？若存在，请画出点 P 的位置（保留作图痕迹，不需要说明）并直接写出 ΔPDC 的边 DC 上的中线 PQ 的长度；若不存在，说明理由.

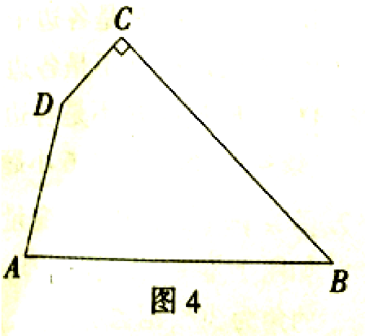


图 4

28. 定义：点 P 是 $\triangle ABC$ 内部或边上的点（顶点除外），在 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$ 中，若至少有一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似，则称点 P 是 $\triangle ABC$ 的自相似点.

例如：如图 1，点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部，$\angle PBC=\angle A$，$\angle BCP=\angle ABC$，则 $\triangle BCP \backsim \triangle ABC$，故点 P 是 $\triangle ABC$ 的自相似点.

请你运用所学知识，结合上述材料，解决下列问题：

在平面直角坐标系中，点 M 是曲线 $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{x}\ (x>0)$ 上的任意一点，点 N 是 x 轴正半轴上的任意一点.

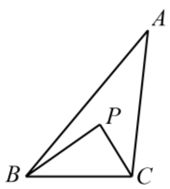


图 1

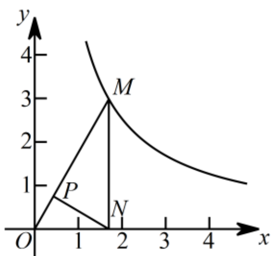


图2

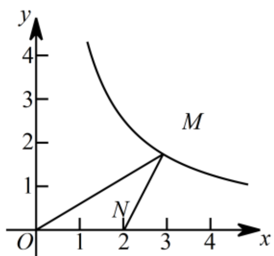


图3

（1）如图 2，点 P 是 OM 上一点，$\angle ONP=\angle M$，请判断点 P 是 $\triangle MON$ 的自相似点吗？__________（填是或不是）；当点 M 的坐标是 $(\sqrt{3},3)$，点 N 的坐标是 $(\sqrt{3},0)$ 时，请直接写出点 P 的坐标____________；

（2）如图 3，当点 M 的坐标是 $(3,\sqrt{3})$，点 N 的坐标是 $(2,0)$ 时，求 $\triangle MON$ 的自相似点的坐标；

（3）是否存在点 M 和点 N，使 $\triangle MON$ 无自相似点?若存在，请直接写出这两点的坐标；若不存在，请说明理由.

北京市海淀外国语实验学校初三 3 月份月考数学答题纸

班级____________ 姓名_______________

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

1	2	3	4	5	6	7	8

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

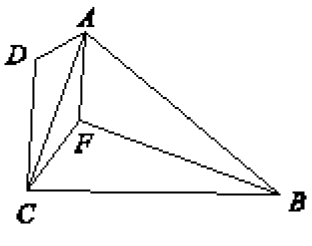
9	10	11	12
13	14	15	16

三、解答题（本题共 68 分，第 17−22 题，每小题 5 分；第 23−26 题，每小题 6 分；第 27−28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17．计算：$6\sin60^\circ-\sqrt{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^0+|\sqrt{3}-2020|$.

18．已知 $x+y=xy$，求代数式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-(1-x)(1-y)$ 的值.

19． 证明：

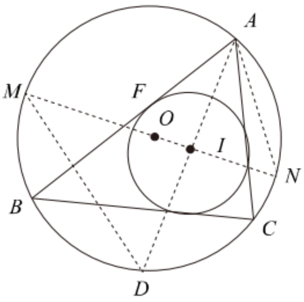


20．（1）__________、___________、___________；

（2）

21．（1）$IN =$________；

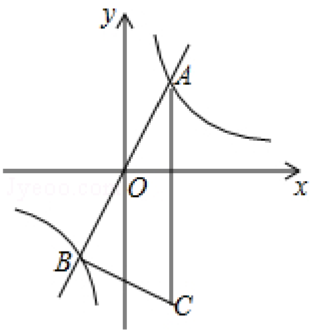
（2）证明：



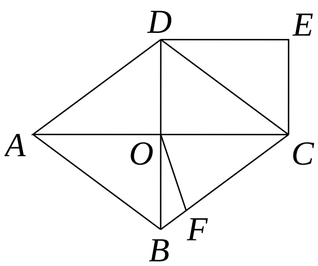
第21题图1

（3）________cm.

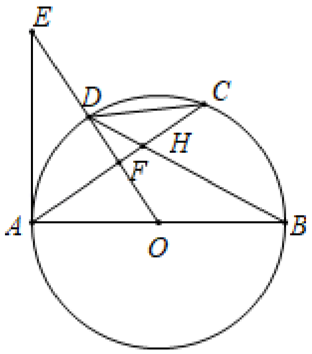
22．



23．



24．



25．（1）计算：$f(-3)=$_______，$f(-4)=$_______；

（2）_______；

（3）

26．

27.（1）① $AD=$________ BC；

② $AD=$_________.

（2）

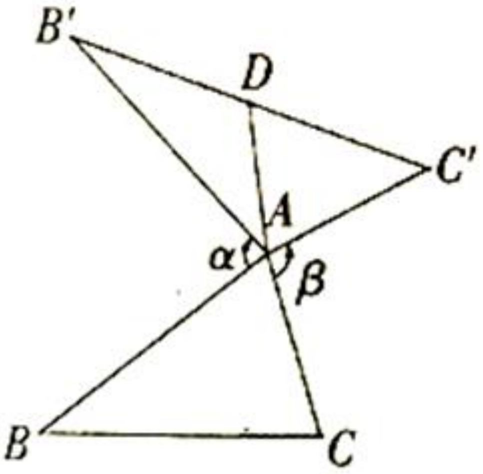


图 1

（3）

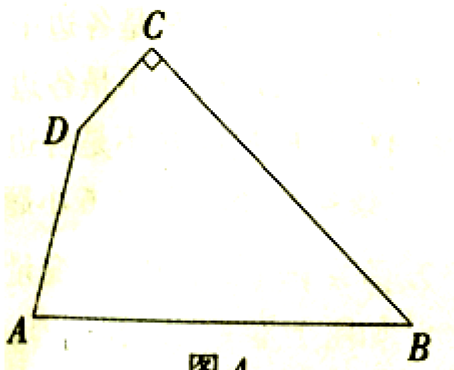


图 4

28.

（1）____________、____________

（2）

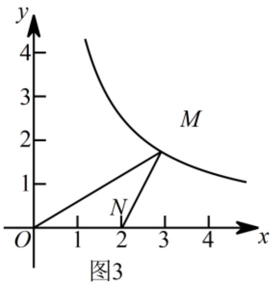


图3

（3）