

数 学 试

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

考生
须知

1. 本试卷有三道大题，共 6 页。考试时长 120 分钟，满分 150 分。
2. 考生务必将答案填写在答题卡上，在试卷上作答无效。
3. 考试结束后，考生应将答题卡交回。

一、选择题 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

- (1) 已知集合 $M = \{x | x + 2 \geq 0\}$ ， $N = \{x | x - 1 < 0\}$ ，则 $M \cap N = ()$
 - (A) $\{x | -2 \leq x < 1\}$
 - (B) $\{x | -2 < x \leq 1\}$
 - (C) $\{x | x \geq -2\}$
 - (D) $\{x | x < 1\}$
- (2) 设 $a = \ln 2$ ， $b = \cos 2$ ， $c = 2^{0.2}$ ，则 $()$
 - (A) $b < c < a$
 - (B) $c < b < a$
 - (C) $b < a < c$
 - (D) $a < b < c$
- (3) 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $\sin x = 1$ ”是“ $\cos x = 0$ ”的 $()$
 - (A) 充分不必要条件
 - (B) 必要不充分条件
 - (C) 充要条件
 - (D) 既不充分也不必要条件
- (4) 将函数 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，则所得图象的函数解析式为 $()$
 - (A) $y = \sin 2x$
 - (B) $y = \cos 2x$
 - (C) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$
 - (D) $y = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$
- (5) 已知函数 $f(x) = 2^x - 1$ ，则不等式 $f(x) \leq x$ 的解集为 $()$
 - (A) $(-\infty, 2]$
 - (B) $[0, 1]$
 - (C) $[1, +\infty)$
 - (D) $[1, 2]$



(6) 设函数 $f(x) = e^x - \ln x$ 的极值点为 x_0 ，且 $x_0 \in M$ ，则 M 可以是 ()

- (A) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 4)$

(7) 在 $\triangle ABC$ 中， $C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，点 P 是 AB 的中点，则 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} =$ ()

- (A) $\frac{9}{4}$ (B) 4 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 6

(8) 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，满足 $a_2 = 6, S_3 = 26$ ，若 $S_n + a_n > 2024$ ，则 n 的最小值是 ()

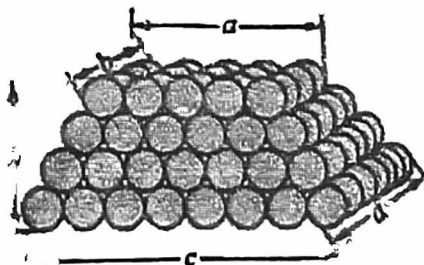
- (A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10

(9) 设 $c \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x - c, & x \geq 0, \\ 2^x - 2c, & x < 0. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 恰有一个零点，则 c 的取值范围是

- ()
 (A) $(0, 1)$ (B) $\{0\} \cup [1, +\infty)$
 (C) $(0, \frac{1}{2})$ (D) $\{0\} \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

(10) 北宋科学家沈括在《梦溪笔谈》中记载了“隙积术”，提出长方台形垛积的一般求和公式. 如图，由大小相同的小球堆成的一个长方台形垛积的第一层有 ab 个小球，第二层有 $(a+1)(b+1)$ 个小球，第三层有 $(a+2)(b+2)$ 个小球……依此类推，最底层有 cd 个小球，共有 n 层，由“隙积术”可得这些小球的总个数为 $\frac{n[(2b+d)a + (2d+b)c + (c-a)]}{6}$.

若由小球堆成的某个长方台形垛积共 8 层，小球总个数为 240，则该垛积的第一层的小球个数为 ()



- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

二、填空题 共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 若复数 $z = \frac{4i}{1-i}$ ，则复数 z 的模 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(12) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和。若 $a_1 = 6$ ， $a_2 + a_6 = 0$ ，则 $S_8 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(13) 在 $\triangle ABC$ 中， $a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{2}ac$ 。则 $\angle B$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ； $y = \sqrt{2}\cos A + \cos C$ 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(14) 设函数 $f(x) = \begin{cases} (x-a+1)(x+1), & x < 1, \\ \lg x - a & x \geq 1. \end{cases}$

① 当 $a = 0$ 时， $f(f(10)) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

② 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则 a 的取值范围是

(15) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2t$, $g(x) = e^x - t$ 。给出下列四个结论：

- ① 当 $t = 0$ 时，函数 $y = f(x)g(x)$ 有最小值；
- ② $\exists t \in \mathbf{R}$ ，使得函数 $y = f(x)g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增；
- ③ $\exists t \in \mathbf{R}$ ，使得函数 $y = f(x) + g(x)$ 没有最小值；
- ④ $\exists t \in \mathbf{R}$ ，使得方程 $f(x) + g(x) = 0$ 有两个根且两根之和小于 2。

其中所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题 共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

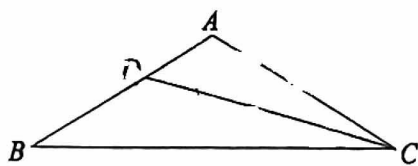
(16) (本小题 13 分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \frac{2\pi}{3}$ ， $AC = \sqrt{2}$ ， CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D ， $CD = \sqrt{3}$ 。

(I) 求 $\angle ADC$ 的值；

(II) 求 BC 的长度；

(III) 求 $\triangle BCD$ 的面积。



(17) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π

(I) 若 $A = 2, f(0) = 1$, 求 φ 的值;

(II) 从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知, 确定 $f(x)$ 的解析式, 并求函数 $h(x) = f(x) - 2\cos 2x$ 的单调递增区间.

条件①: $f(x)$ 的最大值为 2;

条件②: $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 中心对称;

条件③: $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{12}, \sqrt{3})$.

注: 如果选择多组条件分别解答, 按第一个解答计分.

(18) (本小题 14 分)

为研究中国工业机器人产量和销量的变化规律, 收集得到了 2015–2023 年工业机器人的产量和销量数据, 如下表所示.

年份	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
产量 (万台)	3.3	4.8	13.1	4.8	18.1	23.7	36.6	44.3	45.0
销量 (万台)	6.9	8.7	13.8	15.4	14.0	15.6	27.1	25.7	31.6

记 2015–2023 年工业机器人产量的中位数为 a , 销量的中位数为 b . 定义产销率为

$$\text{“产销率} = \frac{\text{销量}}{\text{产量}} \times 100\% \text{”}$$

(I) 从 2015–2023 年中随机取 1 年, 求工业机器人的产销率大于 100% 的概率;

(II) 从 2018–2023 年这 6 年中随机取 2 年, 这 2 年中有 X 年工业机器人的产量不小于 a , 有 Y 年工业机器人的销量不小于 b . 记 $Z = X + Y$, 求 Z 的分布列和数学期望 EZ ;

(III) 从哪年开始的连续 5 年中随机取 1 年, 工业机器人的产销率超过 70% 的概率最小.

(结论不要求证明)



(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $P(-2, 1)$ 和 $Q(2\sqrt{2}, 0)$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 过点 $G(0, 2)$ 作的直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 A, B , 直线 PA 交 y 轴于点 M , 直线 PB 交 y 轴于点 N , 若 $|GM| \cdot |GN| = 2$, 求直线 l 的方程.

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln(x-a)}{x}$.

(I) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的零点;

(II) 若 $a = -1$, 证明: 函数 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数;

(III) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - y = 0$ 平行, 求 a 的值.



(21) (本小题共 15 分)

已知 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 4)$ 为有穷数列. 若对任意的 $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, 都有 $|a_{i+1} - a_i| \leq 1$ (规定 $a_0 = a_n$), 则称 A_n 具有性质 P .

设 $T_n = \{(i, j) \mid |a_i - a_j| \leq 1, 2 \leq j - i \leq n - 2 (i, j = 1, 2, \dots, n)\}$.

(I) 判断数列 $A_4: 1, 0.1, -1.2, -0.5$, $A_5: 1, 2, 2.5, 1.5, 2$ 是否具有性质 P ? 若具有性质 P , 写出对应的集合 T_n ;

(II) 若 A_4 具有性质 P , 证明: $T_4 \neq \emptyset$;

(III) 给定正整数 n , 对所有具有性质 P 的数列 A_n , 求 T_n 中元素个数的最小值.

