试卷编号：11182

北京一零一中2024-2025学年度第一学期期中考试

高 二 数 学

(本试卷满分120分，考试时间100分钟)

命题：高二数学备课组　审稿：贺丽珍

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

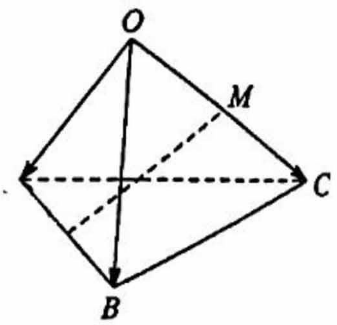
1. 点 $P(0,1)$ 到直线 $x-y-1=0$ 的距离等于（　　）

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

2. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率为（　　）

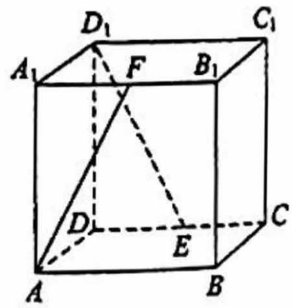
(A) 2　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 点 M，N 分别为棱 OC，AB 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$（　　）



(A) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　(B) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　(C) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　(D) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

4. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 CD，A_1B_1 的中点，则直线 AF 与 D_1E 所成角的余弦值为（　　）



(A) 0　(B) $\frac{3}{5}$　(C) $\frac{4}{5}$　(D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. 若直线 l_1：$(a-1)x+2y+1=0$ 与直线 l_2：$3x+ay-1=0$ 平行，则 $a=$（　　）

(A) 3　(B) -2　(C) 3 或 -2　(D) 3 或 1

6. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3$, $BC=2$, $AA_1=1$, 则二面角 D_1-BC-D 的余弦值为(　　)

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　(B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　(C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　(D) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

7. 对于直线 l: $mx+y-2m=0$, 下列说法不正确的是(　　)

(A) l 恒过定点 $(2,0)$　　(B) 当 $m=-2$ 时, l 不经过第二象限

(C) l 的斜率一定存在　　(D) 当 $m=\sqrt{3}$ 时, l 的倾斜角为 $60°$

8. 若直线 $ax+by=1$ 过点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$, 则(　　)

(A) $a^2+b^2\geqslant 1$　　(B) $a^2+b^2\leqslant 1$　　(C) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$　　(D) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant 1$

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 动点 $P(x,y)$ 到两个定点 $F_1(0,-2)$, $F_2(0,2)$ 的距离之积等于 12, 化简得曲线 C: $x^2+y^2+4=4\sqrt{y^2+9}$. 下列结论不正确的是(　　)

(A) 曲线 C 关于 x 轴对称　　(B) x 的最大值为 3

(C) $|PF_1|+|PF_2|$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$　　(D) $|OP|$ 的最大值为 4

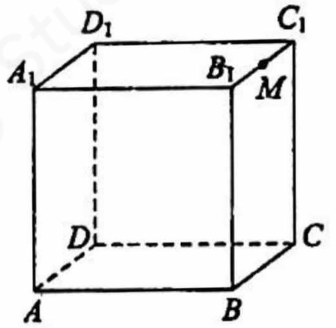
10. 如图, 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 为 B_1C_1 的中点. 动点 N 满足 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}$, $\lambda,\mu\in(0,1)$. 给出下列四个结论:

①平面 $C_1AN\perp$ 平面 BDA_1;

②设直线 MN 与平面 DD_1A_1A 所成角为 θ, 则 $\cos\theta$ 的取值范围是 $(0,\frac{\sqrt{5}}{3})$;

③设 $D_1A\cap$ 平面 $CMA_1=P$, 则三棱锥 $M-B_1DP$ 的体积为 $\frac{2}{9}$;

④以 $\triangle DD_1A_1$ 的边 DA_1 所在直线为旋转轴, 将 $\triangle DD_1A_1$ 旋转, 则在旋转过程中, MD_1 的取值范围是 $[1,\sqrt{13}]$.



其中正确结论的个数是(　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

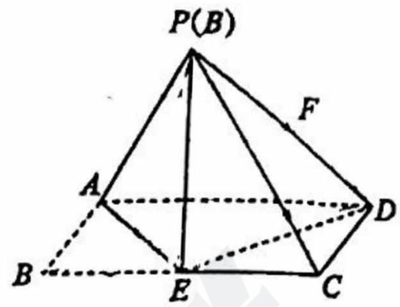
11. 如果直线 $x+ay-5=0$ 与直线 $3x-y+7=0$ 互相垂直, 则实数 a 的值是______.

12. 已知圆 $x^2+y^2-4y-m=0$ 的面积为 π, 则 $m=$______.

13. 过点 $M(-1,2)$ 的直线 l 与圆 C: $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ 交于 A,B 两点, C 为圆心, 当 $\angle ACB$ 最小时, 直线 l 的方程是______

14. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<2)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过 F_1 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 若 $|BF_2|+|AF_2|$ 的最大值为 6, 则 b 的值为 ________.

15. 如图, 长方形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=4$, E 为 BC 的中点, 现将 $\triangle BAE$ 沿 AE 向上翻折到 $\triangle PAE$ 的位置, 连接 PC, PD, 在翻折的过程中 (从初始位置开始, 直到点 B 再次落到平面 ACD 内), 点 P 到平面 ACD 距离的最大值为 ________, PD 的中点 F 的轨迹长度为 ________.



16. 已知直线 l: $kx-y-k+\sqrt{3}=0$ 与 $\odot O$: $x^2+y^2=9$ 相交于 A, B 两点, Q 为弦 AB 的中点. 给出下列三个结论:

①弦 AB 长度的最小值为 $2\sqrt{5}$;

②点 Q 的轨迹是一个圆;

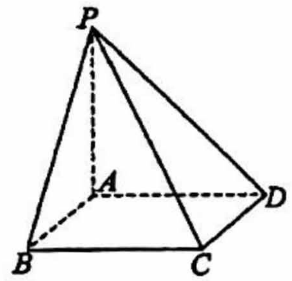
③若点 $C(-\frac{3}{2},0)$, 点 $D(-\frac{3}{2},\sqrt{3})$, 则不存在点 Q 使得 $\angle CQD=\frac{\pi}{2}$;

其中所有正确结论的序号是 ________.

三、解答题共 4 小题，共 50 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. (本小题 13 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AB=2$.



(1) 求证: 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC;

(2) 求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值;

(3) 求点 B 到平面 PCD 的距离.

18. (本小题 13 分)

已知圆 C 过点 $E(1,4)$ 和点 $F(3,2)$, 且圆心在直线 $4x-3y=0$ 上, 直线 l_1 过点 $A(1,0)$.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 若 l_1 与圆 C 相切, 求 l_1 的方程;

(3) 若 l_1 与圆 C 相交于 P, Q 两点, 线段 PQ 的中点为 M, l_1 与 l_2: $x+2y+2=0$ 的交点为 N, 求证: $|AM|\cdot|AN|$ 为定值.

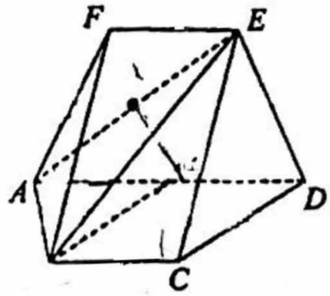
19. (本小题 12 分)

羡除是《九章算术》中记载的一种五面体. 如图, 五面体 $ABCDEF$ 是一个羡除, 其中四边

形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形，且 $EF \parallel AD \parallel BC$, $AD=4$, $EF=BC=AB=2$, $ED=\sqrt{10}$, M 为 AD 中点，平面 $BCEF$ 与平面 $ADEF$ 交于 EF.

(1) 求证：$BM \parallel$ 平面 CDE;

(2) 已知点 Q 是线段 AE 上的动点，从条件①、条件②中选择一个作为已知，求直线 MQ 与平面 ABE 所成角的正弦值的最大值.



条件①：平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$;

条件②：$EC=2\sqrt{3}$.

). (本小题 12 分)

已知集合 $T_n=\{a\in \mathbf{N}^* \mid a\leqslant 2n\}\ (n\in \mathbf{N}, n\geqslant 4)$，若 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 满足 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\cup\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}=T_n$，且 $x_k-y_k=k\ (k=1,2,\cdots,n)$，则称集合 T_n 可分，称 $\{\alpha,\beta\}$ 为 T_n 的一个分法.

(1) 已知 $\{(x,6,y,z),(1,u,v,w)\}$ 是 T_4 的一个分法，试写出 x,y,z,u,v,w 的值;

(2) 若集合 T_n 可分，证明：集合 T_n 的分法一定有偶数个;

(3) 判断 T_5, T_6 是否可分. 若可分，写出共有几种分法，并推出所有的分法；若不可分，说明理由.