北京二中 2024—2025 学年度高三年级期中测试试卷

数 学

命题人：傅靖、邱松　　　审核人：邱松、傅靖

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 是虚数单位，复数$\dfrac{1-2i}{1-i}$的虚部为(　　)

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}i$　　D. $\dfrac{3}{2}i$

2. 命题：“$\forall x\in(-\infty,0)$，$3^x\geqslant 4^x$”的否定为(　　)

A. $\exists x\in[0,+\infty),3^x<4^x$　　B. $\exists x\in[0,+\infty),3^x\leqslant 4^x$

C. $\exists x\in(-\infty,0)$，$3^x\leqslant 4^x$　　D. $\exists x\in(-\infty,0)$，$3^x<4^x$

3. 在平面直角坐标系中，角θ的顶点为坐标原点，始边为x轴的非负半轴，终边过点$P(2,4)$，则$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=$(　　)

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. -3　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 3

4. 已知圆锥的侧面展开图是半径为$2\sqrt{3}$的半圆，则该圆锥的体积为(　　)

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. 3π　　D. 9π

5. 已知向量$\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(-1,2)$，若$m\vec{a}+n\vec{b}$与$\vec{a}-2\vec{b}$共线，则$\dfrac{m}{n}$等于(　　)

A. 2　　B. -2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

6. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1, x\leqslant 0,\\ -x^2+2x+1, x>0,\end{cases}$则不等式$f(x)-2^x>0$的解集是(　)

A. $(0,1)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(-1,0)\cup(0,1)$　　D. $(-1,+\infty)$

7. 设$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则“$\vec{a},\vec{b}$夹角为钝角”是“$|\vec{a}+\vec{b}|<\sqrt{2}|\vec{a}|$”的(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知函数$f(x)=-\sin^2\omega x(\omega>0)$的最小正周期为$\pi$，若将其图象沿$x$轴向右平移$a(a>0)$个单位长度，所得图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称，则实数$a$的最小值为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{3\pi}{4}$　　D. π

9．已知函数 $f(n)=n^2\cos n\pi$，且 $a_n=f(n)+f(n+1)$，则 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}=$（　　）

A. 0　　　　B. 100　　　　C. -100　　　　D. 10200

10．已知数列 $\{a_n\}$ 是各项为正数的等比数列，公比为 q，在 a_1,a_2 之间插入 1 个数，使这 3 个数成等差数列，记公差为 d_1，在 a_2,a_3 之间插入 2 个数，使这 4 个数成等差数列，公差为 $d_2,\cdots$，在 a_n,a_{n+1} 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数成等差数列，公差为 d_n，则（　　）

A．当 $0<q<1$ 时，数列 $\{d_n\}$ 单调递减　　　　B．当 $q>1$ 时，数列 $\{d_n\}$ 单调递增

C．当 $d_1>d_2$ 时，数列 $\{d_n\}$ 单调递减　　　　D．当 $d_1<d_2$ 时，数列 $\{d_n\}$ 单调递增

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

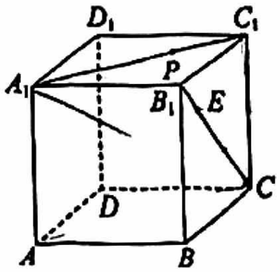
11．$\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式中的常数项为________．（用数字作答）

12．已知点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 上，则抛物线 C 的焦点坐标为________；点 A 到抛物线 C 的准线的距离为________．

13．设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_n=2a_n-1$，则 $\dfrac{a_6+a_9}{a_2+a_5}=$________．

14．已知过原点 O 的直线 l 与双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 交于 A，B 两点（点 A 在第一象限），F_1，F_2 分别为双曲线 E 的左，右焦点，延长 AF_2 交 E 于点 C，若 $|BF_2|=|AC|$，$\angle F_1BF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则双曲线 E 的离心率为________．

15．如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，P 分别是线段 B_1C 和 A_1C_1 上的动点．．对于下列四个结论：



①线段 EP 长度的取值范围是 $[2,2\sqrt{3}]$；

②存在无数条直线 EP // 平面 AA_1B_1B；

③三棱锥 $P-ACE$ 的体积最大值为 $\dfrac{4}{3}$；

④设 E，P 分别为线段 B_1C 和 A_1C_1 的中点，则线段 EP 的垂直平分线与底面的交点构成的集合是圆．

其中正确的结论有________．（填序号）

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分。

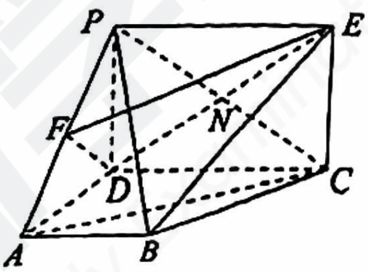
16.（本小题 13 分）在$\triangle ABC$中，$a\sin C+c\cos A=0$.

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求$\triangle ABC$的面积.

条件①：$a=\sqrt{10}$；条件②：$\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$；条件③：$b=\sqrt{2}c$.

17．（本小题 14 分）如图所示的几何体中，PD 垂直于梯形 $ABCD$ 所在的平面，$\angle ADC=\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$F$ 为 PA 的中点，$PD=\sqrt{2},AB=AD=\dfrac{1}{2}CD=1$，四边形 $PDCE$ 为矩形，线段 PC 交 DE 于点 N.



（Ⅰ）求证：$AC//$平面 DEF；

（Ⅱ）求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 EF 上是否存在一点 Q，使得 BQ 与平面 BCP 所成角的大小为$\dfrac{\pi}{6}$？若存在，求出 FQ 的长；若不存在，请说明理由.

18．（本小题 13 分）开展中小学生课后服务，是促进学生健康成长、帮助家长解决接送学生困难的重要举措，是进一步增强教育服务能力、使人民群众具有更多获得感和幸福感的民生工程．某校为确保学生课后服务工作顺利开展，制定了两套工作方案，为了解学生对这两个方案的支持情况，对学生进行简单随机抽样，获得数据如表：

	男	女
支持方案一	24	16
支持方案二	25	35

假设用频率估计概率，且所有学生对活动方案是否支持相互独立.

（Ⅰ）从样本中抽取 1 人，求已知抽到的学生支持方案二的条件下，该学生是女生的概率；

（Ⅱ）从该校支持方案一和支持方案二的学生中各随机抽取 1 人，设 X 为抽出两人中女生的个数，求 X 的分布列与数学期望；

（Ⅲ）在（Ⅱ）中，Y 表示抽出两人中男生的个数　试判断方差 $D(X)$ 与 $D(Y)$ 的大小.（直接写结果）

19．（本小题 15 分）已知函数 $f(x)=(x-2)e^x-\frac{1}{2}ax^2+ax(a\in R)$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 有三个零点，求 a 的取值范围.

20．（本小题 15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，P 为 C 上一点，O 为坐标原点，$PF_2\perp x$ 轴，且 $|PF_2|=2$.

（Ⅰ）求 C 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 $y=kx+t(t\neq 0)$ 与 C 交于 A,B 两点，过点 B 作直线 $y=3\sqrt{2}$ 的垂线，垂足为 D，当直线 AD 与 y 轴的交点为定点时，求 t 的值.

21．（本小题 15 分）若集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集 X 满足：对任意给定的 a，$b\in X$，若 $\frac{a+b}{2}\in Z$，有 $\frac{a+b}{2}\in X$，则称子集 X 是 S_n 的“好子集”.记 $f(n)$ 为 S_n 的好子集的个数.例如：$\{1,2,3\}$ 的 7 个非空子集中只有 $\{1,3\}$ 不是好子集，即 $f(3)=6$. 记 $|X|$ 表示集合 X 的元素个数.

（Ⅰ）求 $f(4)$ 的值；

（Ⅱ）若 X 是 S_n 的好子集，且 $|X|\geqslant 3$. 证明：X 中元素可以排成一个等差数列；

（Ⅲ）求 $f(2024)-2f(2023)+f(2022)$ 的值.