2024 北京景山学校高一（上）期中

数　　学

2024 年 10 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案打在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．若集合 $A=\{x|0\le x<16\}$，$B=\{x|x\ge2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|0\le x<2\}$　　B．$\{x|0<x<2\}$　　C．$\{x|2<x<16\}$　　D．$\{x|2\le x<16\}$

2．若实数 a，b 满足 $a>b$，则下列不等式成立的是（　　）

A．$|a|>|b|$　　B．$a+c>b+c$　　C．$a^2>b^2$　　D．$ac^2>bc^2$

3．已知命题 p：$\forall x>0$，$x+\frac{1}{x}>2$，则$\neg p$ 为（　　）

A．$\forall x>0$，$x+\frac{1}{x}\le2$　　B．$\forall x\le0$，$x+\frac{1}{x}\le2$

C．$\exists x\le0$，$x+\frac{1}{x}\le2$　　D．$\exists x>0$，$x+\frac{1}{x}\le2$

4．已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 上单调递减，则下列关系式中成立的是（　　）

A．$f(-\frac{5}{2})<f(-3)<f(2)$　　B．$f(-3)<f(-\frac{5}{2})<f(2)$

C．$f(2)<f(-3)<f(-\frac{5}{2})$　　D．$f(2)<f(-\frac{5}{2})<f(-3)$

5．已知集合$A=\{x,\frac{y}{x},1\}$，集合 $B=\{x^2,x+y,0\}$，若 $A=B$，则 $x^{2023}+y^{2024}=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

6. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2,x>0,\\x+1,x\le0.\end{cases}$ 若$f(a)+f(\sqrt{2})=0$,则实数 $a=$（　　）

A．-1　　B．-3　　C．1　　D．3

7．若 $a>0$，$b>0$，则“$a+b\le4$”是“$ab\le4$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．已知定义在（0，1）上的函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}，x是有理数\frac{m}{n}(m，n是互质的正整数)\\1，x是无理数\end{cases}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$的图象关于$x=\frac{1}{2}$对称　　B．$f(x)$的图象关于$(\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$对称

C．$f(x)$在（0，1）单调递增　　D．$f(x)$有最小值

9．已知函数$f(x)$的定义域为 **R**，满足$f(x-2)=2f(x)$，且当 $x\in(0，2]$时，$f(x)=x(2-x)$．若$f(t)\ge\frac{15}{4}$，

则 t 的最大值是（　　）

A．$-\frac{14}{5}$　　B．$-\frac{13}{4}$　　C．$-\frac{11}{4}$　　D．$-\frac{9}{4}$

10．已知$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3, & x\le 0,\\ |3-\frac{2}{x}|, & x>0,\end{cases}$ 若 $x_1<x_2<x_3<x_4$，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$，则$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$的取值范围是（　　）

A．$(-\infty, \frac{13}{3})$　　B．$(-\infty, 2)$　　C．$(-\infty, \frac{5}{3})$　　D．$(\frac{5}{3}, \frac{13}{3})$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．函数$f(x)=\sqrt{3-x}$的定义域是_______.

12．已知集合 $A=\{x|(a-1)x^2-2x+1=0\}$有且仅有 2 个子集，则实数 a 的值为 _______.

13．已知 $ab>0$，且 $a+4b=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为______.

14．已知奇函数 $f(x)$定义域为 R，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$，则 $f(-4)=$_________;

若 $f(4)>f(1-\frac{1}{m})$,则实数 m 的取值范围是_________ .

15．已知函数$f(x)=\begin{cases}-ax+3, & x\ge a,\\ (x-2)^2, & x<a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①当 $a=0$ 时，$f(f(-1))=3$；

②若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$；

③若 $f(x)$ 存在零点，则 a 的取值范围为$(-\infty, -\sqrt{3}]\cup(0, +\infty)$；

④若 $f(x)$ 是减函数，则 a 的取值范围为$(0, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 2]$.

其中所有正确结论的序号是 _______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．已知集合$A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x||x-\frac{5}{2}|\ge\frac{3}{2}\}$.

（I）求 $A\cup B$，$A\cap \complement_R B$；

（II）记关于 x 的不等式 $x^2-(2m+4)x+m^2+4m\le 0$ 的解集为 M，若 $M\subseteq\complement_R A$，求实数 m 的取值范围.

17．已知函数 $f(x)=ax^2-2ax-3$.

（I）若 $a=1$，求不等式 $f(x)\ge 0$ 的解集；

（II）已知 $a>0$，且 $f(x)\ge 0$ 在$[3, +\infty)$上恒成立，求 a 的取值范围.

18．已知函数$f(x)=x-\frac{4}{x}$.

（I）判断 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性，并用定义进行证明；

（II）设 $g(x)=a-3x$，若$\forall x_1\in[1, 4]$，$\exists x_2\in[1, 4]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，求实数 a 的取值范围.

19．已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意实数 x，y，都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$；且当

$x\in[0,1)$时，有$f(x)>0$.

（I）求$f(0)$；

（II）判断并证明函数$f(x)$的奇偶性；

（III）若$f(1)=0$，直接写出$f(x)$的所有零点（不需要证明）.

20．已知关于x的函数$f(x)=x^2-2ax+2$.

（1）当$a\le 2$时，求$f(x)$在$[\frac{1}{3},3]$上的最小值$g(a)$；

（2）如果函数F（x）同时满足：

①函数在整个定义域上是单调增函数或单调减函数；

②在函数的定义域内存在区间$[p,q]$，使得函数在区间$[p,q]$上的值域为$[p^2,q^2]$.

则我们称函数F（x）是该定义域上的“闭函数”.

（i）若关于x的函数$y=\sqrt{x^2-1}+t$（$x\ge 1$）是“闭函数”，求实数t的取值范围；

（ii）判断（1）中$g(a)$是否为“闭函数”？若是，求出p，q的值或关系式；若不是，请说明理由.

21．设n为不小于3的正整数，集合$\Omega_n=\{(x_1,x_2,\dots x_n)|x_i\in\{0,1\},i=1,2,\dots,n\}$，对于集合$\Omega_n$中的任意元素$\alpha=(x_1,x_2,\dots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

记$\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\dots+(x_n+y_n-x_ny_n)$

（I）当$n=3$时，若$\alpha=(1,1,0)$，请写出满足$\alpha*\beta=3$的所有元素β；

（II）设α，$\beta\in\Omega_n$且$\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，求$\alpha*\beta$的最大值和最小值；

（III）设S是Ω_n的子集，且满足：对于S中的任意两个不同元素α，β，有$\alpha*\beta\ge n-1$成立，求集合S中元素个数的最大值.

参考答案

一．选择题（共 10 小题）

1．【点评】本题主要考查补集、交集的运算法则，属于基础题．

2．【分析】根据条件分别取 $a=1$，$b=-1$ 可排除 A，C，取 $c=0$ 可知 D 错误，由不等式的性质可知 B 正确．

【解答】解：由 $a>b$，取 $a=1$，$b=-1$，则可排除 A，C，

当 $c=0$ 时，$ac^2=bc^2$，故 D 错误，

由 $a>b$，可得 $a+c>b+c$，故 B 正确．

故选：B．

【点评】本题考查了不等式的基本性质，属基础题．

3．【分析】根据全称量词命题的否定是存在量词命题，求解即可．

【解答】解：根据全称量词命题的否定是存在量词命题知，

命题 p：$\forall x>0$，$x+\frac{1}{x}>2$，则 $\neg p$ 为：$\exists x>0$，$x+\frac{1}{x}\leq 2$．

故选：D．

【点评】本题考查了全称量词命题的否定应用问题，是基础题．

4．【分析】由函数的性质，结合函数单调性的应用求解即可．

【解答】解：因为 $-3<-\frac{5}{2}<-2$，

又函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1]$ 上单调递减，

则 $f(-3)>f(-\frac{5}{2})>f(-2)$，

又 $f(x)$ 为偶函数，

则 $f(2)=f(-2)$，

则 $f(2)<f(-\frac{5}{2})<f(-3)$，

故选：D．

【点评】本题考查了函数的性质，重点考查了函数单调性的应用，属基础题．

5．【分析】根据集合相等的概念以及集合中元素的互异性求解．

【解答】解：因为 $A=B$，且集合 A 中 $x\neq 0$，

所以集合 A 中的元素 $\frac{y}{x}=0$，

解得 $y=0$，

又因为 $1\in A$，所以 $1\in B$，

所以 $x^2=1$ 或 $x=1$，

若 $x^2=1$，

解得 $x=1$ 或 $x=-1$，

经检验，$x=1$ 时，与集合中元素的互异性矛盾，$x=-1$ 时，满足题意，

若 $x=1$，由上述过程可知，不满足题意；

综上 $x=-1$，

所以 $x^{2023}+y^{2024}=-1+0=-1$，

故选：A．

【点评】本题主要考查了集合相等的定义，属于基础题．

6.【答案】故选：B．

7.【分析】充分条件和必要条件的定义结合均值不等式、特值法可得结果

【解答】解：$\because a>0$，$b>0$，$\therefore 4\geqslant a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

$\therefore 2\geq\sqrt{ab}$，$\therefore ab\leqslant 4$，即 $a+b\leqslant 4\Rightarrow ab\leqslant 4$，

若 $a=4$，$b=\frac{1}{4}$，则 $ab=1\leqslant 4$，

但 $a+b=4+\frac{1}{4}>4$，

即 $ab\leqslant 4$ 推不出 $a+b\leqslant 4$，

$\therefore a+b\leqslant 4$ 是 $ab\leqslant 4$ 的充分不必要条件

故选：A．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，均值不等式，考查了推理能力与计算能力．

8.【分析】由所给函数的解析式结合定义域即可一一判断．

【解答】解：对于 A 项，当 x 是有理数时，设$x=\frac{m}{n}(m<n)$，则$f(x)=\frac{1}{n}$，$1-x=\frac{n-m}{n}$，由于 $n-m$ 和 n 互质，

所以$f(1-x)=\frac{1}{n}$，故 A 正确；

对于 B 项，$f(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=1$，$f(\frac{\sqrt{3}}{2})=1$，故 B 错误；

对于 C 项，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$f(\frac{3}{4})=\frac{1}{4}$，故 C 错误；

对于 D 项，设 $f(x)$ 有最小值$\frac{1}{p}$，$p\in\mathbf{Z}$，

取$f(\frac{1}{p+q})$即可，其中 q 使得 $p+q$ 是质数，

此时$f(\frac{1}{p+q})=\frac{1}{p+q}<\frac{1}{p}$与$\frac{1}{p}$是最小值矛盾，故 D 错误．

故选：A．

【点评】本题考查了分段函数的应用，属于中档题．

9.【分析】由 $f(x-2)=2f(x)$ 可知，自变量每减小 2 个单位，函数变为原来的二倍，可先求出 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上的最大值，然后当自变量减少 4 个单位时，首次出现 $f(x)\geq\frac{15}{4}$，先求出 $x\in(0,2]$时，$f(x)=x(2-x)=\frac{15}{16}$时的 x 的值，然后取较大的 x，然后减去 4 即为所求．

【解答】解：由已知得：自变量每减小 2 个单位，函数变为原来的 2 倍，

当 $x\in(0,2]$时，$f(x)=x(2-x)\in[0,1]$，则在此基础上，$f(x-4)\in[0,4]$，

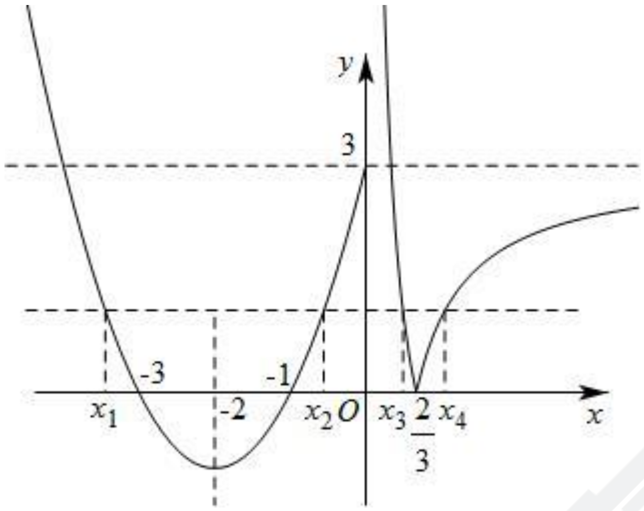
令$x(2-x)=\frac{1}{4}\times\frac{15}{4}$，解得 $x=\frac{3}{4}$或$\frac{5}{4}$，故 t 的最大值为$\frac{5}{4}-4=-\frac{11}{4}$.

故选：C.

【点评】本题考查抽象函数的性质，类比周期函数的性质解决本题是解题的关键，属于中档题.

10．【分析】画出函数图象，结合对称性，数形结合得到 $x_1+x_2=-4$，$x_1\in(-4,\ -3)$，$x_2\in(-1,0)$，$\frac{2}{x_3}-3=3-\frac{2}{x_4}$，求出$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{4}{(x_2+2)^2-4}\in(-\infty,-\frac{4}{3})$，得到答案.

【解答】解：画出$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3, & x\le 0\\ |3-\frac{2}{x}|, & x>0\end{cases}$的图象，如图所示：



设 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=a$，则 $a\in(0,3)$，

令 $x^2+4x+3=3$，解得 $x=-4$ 或 0，

因为 $y=x^2+4x+3$ 的对称轴为 $x=-2$，由对称性可得 $x_1+x_2=-4$，

且 $x_1\in(-4,\ -3)$，$x_2\in(-1,0)$，

其中$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-4}{x_1x_2}=\frac{-4}{(-4-x_2)x_2}=\frac{4}{(x_2+2)^2-4}$，

因为 $x_2\in(-1,0)$，所以 $(x_2+2)^2-4\in(-3,0)$，

故$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{4}{(x_2+2)^2-4}\in(-\infty,-\frac{4}{3})$，

又$\frac{2}{x_3}-3=3-\frac{2}{x_4}$，故$\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=3$，

所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\in(-\infty,\frac{5}{3})$.

故选：C.

【点评】本题考查了二次函数的性质、对数函数的性质及数形结合思想，作出图象是关键，属于中档题.

二．填空题（共 4 小题）

11．【答案】$(-\infty,3]$.

12．【答案】<u> 1 或 2 </u>.

【分析】由题意可知，方程（a - 1）x^2 - $2x$+1＝0 只有一个根，分 a - 1＝0 和 a - 1≠0 两种情况讨论，即可求出实数 a 的值．

【解答】解：由题意可知，方程（a - 1）x^2 - $2x$+1＝0 只有一个根，

①当 a - 1＝0 时，a＝1，

此时方程化为 - $2x$+1＝0，

解得 $x=\frac{1}{2}$，符合题意，

②当 a - 1≠0，即 a≠1 时，

△＝4 - 4（a - 1）＝0，

解得 a＝2，

综上所述，实数 a 的值为 1 或 2．

故答案为：1 或 2．

【点评】本题主要考查了集合的子集个数，考查了分类讨论的数学思想，是基础题．

13．【答案】__9__．

【分析】把“1”换成 $4a+b$，整理后积为定值，然后用基本不等式求最小值

【解答】解：∵ab＞0，且 $a+4b$＝1，

∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+4b)=1+4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geq 5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=9$，当且仅当 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{6}$时取等号，

∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为 9，

故答案为：9．

【点评】本题考查了基本不等式在求最值中的应用，解决本题的关键是“1”的代换．

14．【答案】-24______；

$(-\infty,\ -\frac{1}{3})\cup(0,\ +\infty)$ ______．

15．【答案】__①②④__．

【分析】根据所给分段函数直接计算求解可判断①，根据分段函数的最小值的求法判断②，分段求函数的零点可判断③，根据分段函数的单调性结合二次函数、一次函数的单调性可求解判断④．

【解答】解：①当 a＝0 时，$f(x)=\begin{cases}3，x\geq 0\\(x-2)^2，x<0\end{cases}$，$f(f(-1))=f[(-1-2)^2]=f(9)=3$，故①正确；

②当 a≥2 时，$f(x)=(x-2)^2$，$x<a$ 有最小值 0，此时 $f(x)=-ax+3$，$x\geq a$ 为减函数，且 $f(x)\to-\infty$，无最小值，故$f(x)=\begin{cases}-ax+3，x\geq a\\(x-2)^2，x<a\end{cases}$无最小值，

当 0＜a＜2 时，$f(x)=(x-2)^2$，$x<a$ 无最小值，$f(x)=-ax+3$，$x\geq a$ 无最小值，

故$f(x)=\begin{cases}-ax+3，x\geq a\\(x-2)^2，x<a\end{cases}$无最小值，

当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)=-ax+3$，$x\geqslant a$ 为增函数，最小值为 $-a^2+3$，$f(x)=(x-2)^2$，$x<a$ 单调递减，

所以只需满足 $-a^2+3\leqslant(a-2)^2$，解得$a\leq1-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$a\geq1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a\leqslant0$，故②正确；

③令 $f(x)=(x-2)^2=0$，$x<a$ 若有解，则 $a>2$，令 $f(x)=-ax+3=0$，$x\geqslant a$ 若有解，则$\frac{3}{a}\geq a$，

解得$a\leq-\sqrt{3}$或$0<a\leq\sqrt{3}$，综上若 $f(x)$ 存在零点，则 a 的取值范围为$(-\infty，-\sqrt{3}]\cup(0，\sqrt{3}]\cup(2，+\infty)$，故③错误；

④若 $f(x)$ 是减函数，则需满足 $-a<0$ 且 $a\leqslant2$ 且 $(a-2)^2\geqslant-a^2+3$，解得$0<a\leq1-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq2$，故④正确.

故答案为：①②④.

【点评】本题考查了分段函数的应用，属于中档题.

三．解答题（共 6 小题）

16.【分析】（Ⅰ）先求解出一元二次不等式，绝对值不等式的解集为集合 A，B，然后根据并集概念求解出 $A\cup B$，再根据交集和补集概念求解出 $A\cap\complement_{R}B$；

（Ⅱ）根据不等式先求解出 M，然后根据 $B\cup M=R$，列出关于 m 的不等式组，由此能求出实数 m 的取值范围.

【解答】解：（Ⅰ）$\because x^2-x-2<0$，解得 $-1<x<2$，

$\therefore A=\{x|-1<x<2\}$，

$\because|x-\frac{5}{2}|\geq\frac{3}{2}$，解得 $x\geqslant4$ 或 $x\leqslant1$，$\therefore B=\{x|x\leqslant1$ 或 $x\geqslant4\}$，

$\therefore A\cup B=\{x|x<2$ 或 $x\geqslant4\}$，

$\because\complement_{R}B=\{x|1<x<4\}$，

$\therefore A\cap\complement_{R}B=\{x|1<x<2\}$.

（Ⅱ）$\because$关于 x 的不等式 $x^2-(2m+4)x+m^2+4m\leqslant0$ 的解集为 M，

由 $x^2-(2m+4)x+m^2+4m\leqslant0$，得 $m\leqslant x\leqslant m+4$，

$\therefore M=\{x|m\leqslant x\leqslant m+4\}$，

$\because M\subseteq\complement_{R}A$，$\therefore\begin{cases}m+4\leq-1\\m\geq2\end{cases}$，解得 $m\leqslant-5$ 或$m\geq2$，

$\therefore$实数 m 的取值范围是$\{m|\ m\leqslant-5$ 或$m\geq2\}$.

【点评】本题考查一元二次不等式，绝对值不等式的解法、集合的运算等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

17.【分析】（Ⅰ）运用二次不等式的解法可得所求解集；

（Ⅱ）考虑二次函数的图象和对称轴，以及单调性，只要 $f(3)\geqslant0$，可得所求范围；

【解答】解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，由 $f(x)=x^2-2x-3\geqslant0$ 解得$\{x|x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-1\}$；

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，二次函数 $f(x)=ax^2-2ax-3$ 开口向上，对称轴为 $x=1$，

所以 $f(x)$ 在$[3，+\infty)$上单调递增，

要使 $f(x)\geqslant0$ 在$[3，+\infty)$上恒成立，只需 $f(3)=9a-6a-3\geqslant0$，

所以 a 的取值范围是 $a\geqslant 1$；

【点评】本题考查二次函数和二次不等式、二次方程的关系，考查不等式的解法和函数方程思想，以及恒成立问题解法，考查运算能力，属于中档题．

18．【分析】（Ⅰ）$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调递增．分析如下：$\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，只要证明 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 即可．

（Ⅱ）$\forall x\in[1,4]$，由（I）可得 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上单调递增，可得 $f(x)\in[f(1),f(4)]$．$x\in[1,4]$，则函数 $g(x)=a-3x$ 在此区间上单调递减，可得 $g(x)\in[g(4),g(1)]$．若 $\forall x_1\in[1,4]$，$\exists x_2\in[1,4]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，可得 $[f(1),f(4)]\subseteq[g(4),g(1)]$．进而得出实数 a 的取值范围．

【解答】解：（Ⅰ）$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调递增．

证明如下：$\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1-\frac{4}{x_1}-(x_2-\frac{4}{x_2})=(x_1-x_2)(1+\frac{4}{x_1x_2})<0$，

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

（Ⅱ）$\forall x\in[1,4]$，由（I）可得 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上单调递增，

$f(1)=-3$，$f(4)=3$，

可得 $f(x)\in[-3,3]$．

$x\in[1,4]$，则函数 $g(x)=a-3x$ 在此区间上单调递减，$\therefore g(x)\in[a-12,a-3]$．

若 $\forall x_1\in[1,4]$，$\exists x_2\in[1,4]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，

则 $[-3,3]\subseteq[a-12,a-3]$，

$\therefore\begin{cases}a-12\le -3\\3\le a-3\end{cases}$，

解得 $6\leqslant a\leqslant 9$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[6,9]$．

【点评】本题考查了函数的单调性定义及其应用、恒成立与存在性问题的转化、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

19．【分析】（Ⅰ）令 $x=0$，$y=0$，即可求解 $f(0)$；

（Ⅱ）$f(x)$ 是偶函数，令 $x=0$，y 为任意实数，可得 $f(-y)=f(y)$，即可得证；

（Ⅲ）若 $f(1)=0$，根据已知条件可得 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，由偶函数的性质可得 $f(-1)=0$，从而可得 $f(x)$ 的所有零点．

【解答】解：（Ⅰ）令 $x=0$，$y=0$，则 $f(0)+f(0)=2f(0)f(0)$，

可得 $f(0)[f(0)-1]=0$，因为对任意 $x\in[0,1)$，$f(x)>0$，

所以 $f(0)=1$．

（Ⅱ）$f(x)$ 是偶函数，证明如下：

令 $x=0$，y 为任意实数，则 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$，

即 $f(-y)=f(y)$，所以 $f(x)$ 是偶函数．

（Ⅲ）若 $f(1)=0$，令 $y=0$，则 $f(x+1)+f(x-1)=2f(x)f(1)=0$，

即 $f(x+1)=-f(x-1)$，

则 $f(x+2)=-f(x)$，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

又 $f(-1)=f(1)=0$，

所以 $f(x)$ 的所有零点为 $2n+1$，$n\in\mathbf{Z}$.

【点评】本题考查抽象函数及其应用，考查奇偶性与周期性的判断，考查赋值法的应用，属于中档题.

20.【分析】(1) 对于函数 $f(x)=x^2-2ax+2=(x-a)^2+2-a^2$，根据对称轴，分类讨论即可，

(2)(*i*) 据闭函数的定义，列出方程组，可得 p^2，q^2 为方程 $\sqrt{x^2-1}+t=x$ 的二实根，再由二次方程实根的分布，即可得到所求 t 的范围

(*ii*) 由新定义，假设 $g(a)$ 为"闭函数"，讨论 p，q 的范围，通过方程的解即可判断

【解答】解：(1) 函数 $f(x)=x^2-2ax+2=(x-a)^2+2-a^2$，其对称轴方程为 $x=a$，

当 $a\le\frac{1}{3}$ 时，$f(x)$ 在 $[\frac{1}{3}，3]$ 上单调递增，其最小值为 $g(a)=f(\frac{1}{3})=\frac{19}{9}-\frac{2a}{3}$；

当 $\frac{1}{3}\le a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $[\frac{1}{3}，3]$ 上的最小值为 $g(a)=f(a)=2-a^2$；

函数 $f(x)=x^2-2ax+2$ 在 $[\frac{1}{3}，3]$ 上的最小值 $g(a)=\begin{cases}\frac{19}{9}-\frac{2a}{3}，a\le\frac{1}{3}\\ 2-a^2，\frac{1}{3}<a\le 2\end{cases}$

(2)(*i*) $\because y=\sqrt{x^2-1}+t$ 在 $[1，+\infty)$ 递增，

由闭函数的定义知，该函数在定义域 $[1，+\infty)$ 内，

存在区间 $[p，q]$ $(p<q)$，使得该函数在区间 $[p，q]$ 上的值域为 $[p^2，q^2]$，所以 $p\geqslant 1$，$\begin{cases}\sqrt{p^2-1}+t=p^2\\ \sqrt{q^2-1}+t=q^2\end{cases}$，

$\therefore p^2$，q^2 为方程 $\sqrt{x^2-1}+t=x$ 的二实根，

即方程 $x^2-(2t+1)x+t^2+1=0$ 在 $[1，+\infty)$ 上存在两个不等的实根且 $x\geqslant t$ 恒成立，

令 $u(x)=x^2-(2t+1)x+t^2+1$，

$\therefore\begin{cases}\Delta>0\\ \frac{2t+1}{2}>1\\ u(1)\ge 0\\ t\le 1\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}t>\frac{3}{4}\\ t>\frac{1}{2}\\ (t-1)^2\ge 0\\ t\le 1\end{cases}$，

解得 $\frac{3}{4}<t\leqslant 1$

$\therefore$ 实数 t 的取值范围 $(\frac{3}{4}，1]$.

(*ii*) 对于 (1)，易知 $g(a)$ 在 $(-\infty，2]$ 上为减函数，

①若 $p<q\le\frac{1}{3}$，$g(a)$ 递减，若 $g(a)$ 为"闭函数"，

则$\begin{cases}\dfrac{19}{9}-\dfrac{2p}{3}=q^2\\ \dfrac{19}{9}-\dfrac{2q}{3}=p^2\end{cases}$，

两式相减得 $p+q=\frac{2}{3}$，这与 $p<q\leq\frac{1}{3}$矛盾．

②$\frac{1}{3}<p<q\leqslant 2$ 时，若 g（a）为"闭函数"，则$\begin{cases}2-p^2=q^2\\ 2-q^2=p^2\end{cases}$

此时 $p^2+q^2=2$ 满足条件的 p，q 存在，

∴$\frac{1}{3}<p<q\leqslant 2$ 时，使得 g（a）为"闭函数"p，q 存在，

③$p\leq\frac{1}{3}<q\leqslant 2$ 时，若 g（a）为"闭函数"，则$\begin{cases}\dfrac{19}{9}-\dfrac{2p}{3}=q^2\\ 2-q^2=p^2\end{cases}$，

消去 q 得 $9p^2-6p+1=0$，即（$3p-1$）$^2=0$

解得 $p=\frac{1}{3}$此时，$q=\frac{\sqrt{17}}{3}<2$，且 $p^2+q^2=2$

∴$p=\frac{1}{3}<q\leqslant 2$ 时，使得 g（a）为"闭函数"p，q 存在，

综上所述，当 p，q 满足$\begin{cases}\frac{1}{3}\leq p<q\leq 2\\ p^2+q^2=2\end{cases}$时，$g$（$a$）为"闭函数"

【点评】本题考查新定义题，关键是理解题中的新定义，此题型是近几年高考常考题型．求分段函数的函数值关键是判断出自变量所属的范围．

21．【分析】(1) 由 $\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n)$ 中 $n=3$，$\alpha=(1,1,0)$，求得 β 满足的元素

(2) 因为 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n=n$，所以 x_1，x_2，…，x_n，y_1，y_2，…，y_n 中有 n 个量的值为 1，n 个量的值为 0．

再由不等式 $0\leqslant\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n)\leqslant x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_n+y_n=n$，对 n 分类讨论可得其最值；

(3) 设集合 S 是满足条件的集合中元素个数最多的一个．$S=S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2=\emptyset$．集合 S_1 中元素个数不超过 $n+1$ 个，集合 S_2 中元素个数不超过C_n^2个．

集合 S 中的元素个数为至多为$n+1+C_n^2=n^2+n+1$．再根据已知 $\alpha*\beta\geqslant n-1$ 成立，确定其最大值．

【解答】解：(Ⅰ) ∵$n=3$，$\alpha=(1,1,0)$，且 $\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n)$．

∴$\alpha*\beta=3$ 的 β 元素为 $(0,0,1)$，$(1,0,1)$，$(0,1,1)$，$(1,1,1)$．

(Ⅱ) 记 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，

注意到 $x_i\in\{0,1\}$，所以 $x_i(x_i-1)=0$，

所以 $\alpha*\alpha=(x_1+x_1-x_1y_1)+(x_2+x_2-x_2x_2)+\cdots+(x_n+x_n-x_nx_n)=x_1+x_2+\cdots+x_n$，$\beta*\beta=y_1+y_2+\cdots+y_n$

因为 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n=n$．

所以 x_1，x_2，…，x_n，y_1，y_2，…，y_n 中有 n 个量的值为 1，n 个量的值为 0．

显然 $0\leqslant\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n)\leqslant x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_n+y_n=n$，

当 $\alpha=(1,1,\cdots,1)$，$\beta=(0,0,\cdots,0)$ 时，α，β 满足 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，$\alpha*\beta=n$．所以 $\alpha*\beta$ 的最大值为 n．

又 $\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n)=n-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)$．

注意到只有 $x_i=y_i=1$ 时，$x_iy_i=1$，否则 $x_iy_i=0$．

而 x_1，x_2，…，x_n，y_1，y_2，…，y_n 中 n 个量的值为 1，n 个量的值为 0．

所以满足 $x_iy_i=1$ 这样的元素 i 至多有$\frac{n}{2}$个，

当 n 为偶数时，$\alpha*\beta\geq n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$.

当$\alpha=\beta=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\frac{n}{2}个},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{\frac{n}{2}个})$时，满足 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，且$\alpha*\beta=\frac{n}{2}$.

所以 $\alpha*\beta$ 的最小值为$\frac{n}{2}$.

当 n 为奇数时，且 $x_iy_i=1$，这样的元素 i 至多有$\frac{n-1}{2}$个，

所以 $\alpha*\beta\geq n-\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$.

当$\alpha=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\frac{n+1}{2}个},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{\frac{n-1}{2}个})$，$\beta=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\frac{n-1}{2}个},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{\frac{n+1}{2}个})$时，满足 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，$\alpha*\beta=\frac{n-1}{2}$.

所以 $\alpha*\beta$ 的最小值为$\frac{n-1}{2}$.

综上：$\alpha*\beta$ 的最大值为 n，当 n 为偶数时，$\alpha*\beta$ 的最小值为$\frac{n}{2}$，当 n 为奇数时，$\alpha*\beta=\frac{n-1}{2}$.

（Ⅲ）设集合 S 是满足条件的集合中元素个数最多的一个．

记 $S_1=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n-1,\ \alpha\in S\}$，$S_2=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant n-2,\ \alpha\in S\}$．

显然 $S=S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2=\varnothing$．

集合 S_1 中元素个数不超过 $n+1$ 个，下面我们证明集合 S_2 中元素个数不超过C_n^2个$\forall\alpha\in S_2$，$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant n-2$．

则 x_1，x_2，…，x_n 中至少存在两个元素 $x_i=x_j=0$$\forall\beta\in S_2$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$\beta\neq\alpha$．

因为 $\alpha*\beta\geqslant n-1$，所以 y_i，y_j 不能同时为 0．

所以对 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 中的一组数 i，j 而言，

在集合 S_2 中至多有一个元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足 x_i，x_j 同时为 0．

所以集合 S_2 中元素个数不超过C_n^2个．

所以集合 S 中的元素个数为至多为$n+1+C_n^2=n^2+n+1$．

记 $T_1=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n-1,\ \alpha\in\Omega_n\}$，则 T_1 中共 $n+1$ 个元素，

对于任意的 $\alpha\in T_1$，$\beta\in\Omega_n$，$\alpha*\beta\geqslant n-1$．

对 $1\leqslant i<j\leqslant n$，记 $\beta_{i,j}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_i=x_j=0$，$x_t=1$，$t\neq i$，$t\neq j$．

记 $T_2=\{\beta_{i,j}|1\leqslant i<j\leqslant n\}$，

显然$\forall\alpha$，$\beta\in S_2$，$\alpha\neq\beta$，均有 $\alpha*\beta\geqslant n-1$．

记 $S=T_1\cup T_2$，S 中的元素个数为 n^2+n+1，且满足$\forall\alpha$，$\beta\in S$，$\alpha\neq\beta$，均有 $\alpha*\beta\geqslant n-1$．

综上所述，S 中的元素个数最大值为 n^2+n+1．

【点评】本题主要考查集合给出新定义的创新题型，解决此类试题的关键是透切理解题意新定义，抓住新定义的本质，在新的情境中使用已知的运算法则及已有的数学知识分析解决问题