



2024 北京大兴高一（上）期中

数 学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A = \{a \mid a^2 = 1\}$ ，则不正确的是（ ）

- A. $-1 \in A$
- B. $\{1\} = A$
- C. $\emptyset \subseteq A$
- D. $\{-1, 1\} \subseteq A$

2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{Z}, |x| > 0$ ”的否定是（ ）

- A. $\forall x \notin \mathbf{Z}, |x| > 0$
- B. $\forall x \in \mathbf{Z}, |x| \leq 0$
- C. $\exists x \notin \mathbf{Z}, |x| > 0$
- D. $\exists x \in \mathbf{Z}, |x| \leq 0$

3. 下列函数中，是奇函数且值域为 $(-\infty, +\infty)$ 的是（ ）

- A. $y = \sqrt{x}$
- B. $y = x^2$
- C. $y = x^3$
- D. $y = x^{-1}$

4. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，且 $ab = 2$ ，则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为（ ）

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. 1
- D. 2

5. 设 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > b, c > d$ ”是“ $a + c > b + d$ ”的（ ）

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

6. 设函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $(0, 1]$
- B. $[1, +\infty)$
- C. $(0, 2]$
- D. $[2, +\infty)$

7. 下列条件中，能使 $a > b$ 成立的一个充分不必要条件是（ ）

- A. $a^2 > b^2$
- B. $a > b + 1$
- C. $a^3 > b^3$
- D. $a > b - 1$

8. 若不等式 $x^2 - (a + 2)x + 2a \leq 0$ 对任意的 $x \in [-1, 1]$ 恒成立，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $[-1, 1]$
- B. $[-1, +\infty)$
- C. $[-1, 2]$
- D. $(-\infty, -1]$

9. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足： $f(2) = 0$ ，且对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$)，都有

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ ，则不等式 $xf(x) > 0$ 的解集是（ ）

- A. $(-2, 0)$
- B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



C. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

D. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c, a > b > c, a + b + c = 0$, 集合 $A = \{m \mid f(m) < 0\}$, 则 ()

A. $\forall m \in A, f(m+3) > 0$

B. $\forall m \in A, f(m+3) < 0$

C. $\exists m \in A, f(m+3) = 0$

D. $\exists m \in A, f(m+3) < 0$

第二部分 (非选择题共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 函数 $f(x) = \sqrt{x-1}$ 的定义域为_____.

12. 设 $a \in \mathbf{R}, M = 2a(a-2), N = (a+1)(a-3)$, 则 M 与 N 的大小关系是 M _____ N .

13. 函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x - \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$ 则 $f(f(-1)) =$ _____; 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为_____.

14. 定义域相同, 值域相同, 但对应关系不同的两个函数可以是 $f(x) =$ _____, $g(x) =$ _____.

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in D$, 当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时, 总有 $x_1 = x_2$ 成立, 则称 $f(x)$ 为单函数. 给出下列四个结论:

(1) $f(x) = |x|$ 不是单函数;

(2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 是单函数;

(3) 若 $f(x)$ 为单函数, 则 $f(x)$ 在定义域上一定是单调函数;

(4) 若 $f(x)$ 为单函数, 则对任意的 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 总有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 成立. 其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

16. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

(I) 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值;

(III) 设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 求证: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

17. (本小题 13 分)

已知集合 $A = \{x \mid 0 < x < 2\}, B = \{x \mid 2x - 1 > a\}$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求 $A \cup B, (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$;

(II) 再从条件 (1)、条件 (2) 这两个条件中选择一个作为已知, 求 a 的取值范围.

条件 (1): $B \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} A)$;



条件 (2): “ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件.

注: 如果选择条件 (1) 和条件 (2) 分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - k, k \in \mathbf{R}$.

(I) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(II) 用单调性定义证明 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

(III) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 两点, 且 $x_1 < x_2 < \frac{1}{2}$, 求 k 的取值范围.

19. (本小题 13 分)

已知经过 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 年某汽车的总花费由购车费、维修费和其他费用组成, 其中购车费用是 22.5 万元, 使用 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 年的维修费为 $x(0.2+0.1x)$ 万元, 且每年的其他费用为 0.8 万元.

(I) 求经过 2 年该车的总花费为多少万元;

(II) 设经过 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 年该车的年平均花费为 y 万元, 写出 y 关于 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 的函数解析式, 并求 y 的最小值.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = x+1, g(x) = (x-1)^2$. 令函数 $M(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq g(x), \\ g(x), & f(x) > g(x). \end{cases}$

(I) 若 $M(x) = 2$, 求 x 的值;

(II) 若函数 $y = h(x)$ 的图象关于点 $P(0,1)$ 成中心对称图形, 当 $x \geq 0$ 时, $h(x) = M(x)$.

(1) 直接写出当 $x < 0$ 时, $h(x)$ 的解析式;

(2) 对任意的 $x \in [a, a+1], |h(x)| \leq 2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. (本小题 15 分)

若含有 4 个元素的数集 $A = \{a, b, c, d\}$ 能满足 $ab - cd = 1$, 则称数集 A 具有性质 J . 给定集合

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, C = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 1 \leq x \leq 4n, n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*\}$.

(I) 写出一个具有性质 J 的集合, 并说明理由;

(II) 若 $A = \{a, b, c, d\}, A \subseteq B$, 证明: 集合 A 和 $\complement_B A$ 不可能都具有性质 J ;

(III) 若集合 $A_i (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbf{N}^*)$ 有 4 个元素, $A_i \subseteq C$, 且 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = C, A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$, 证明: A_1, A_2, \dots, A_n 这 n 个集合不可能同时都具有性质 J .