



# 2024 北京大兴高一（上）期中

## 数 学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

### 第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合  $A = \{a \mid a^2 = 1\}$ ，则不正确的是（ ）

- A.  $-1 \in A$                       B.  $\{1\} = A$                       C.  $\emptyset \subseteq A$                       D.  $\{-1, 1\} \subseteq A$

2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{Z}, |x| > 0$ ”的否定是（ ）

- A.  $\forall x \notin \mathbf{Z}, |x| > 0$               B.  $\forall x \in \mathbf{Z}, |x| \leq 0$               C.  $\exists x \notin \mathbf{Z}, |x| > 0$               D.  $\exists x \in \mathbf{Z}, |x| \leq 0$

3. 下列函数中，是奇函数且值域为  $(-\infty, +\infty)$  的是（ ）

- A.  $y = \sqrt{x}$                       B.  $y = x^2$                       C.  $y = x^3$                       D.  $y = x^{-1}$

4. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ ，且  $ab = 2$ ，则  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$  的最小值为（ ）

- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C. 1                      D. 2

5. 设  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > b, c > d$ ”是“ $a + c > b + d$ ”的（ ）

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件                      D. 既不充分也不必要条件

6. 设函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  在区间  $(a, +\infty)$  上单调递增，则  $a$  的取值范围是（ ）

- A.  $(0, 1]$                       B.  $[1, +\infty)$                       C.  $(0, 2]$                       D.  $[2, +\infty)$

7. 下列条件中，能使  $a > b$  成立的一个充分不必要条件是（ ）

- A.  $a^2 > b^2$                       B.  $a > b + 1$                       C.  $a^3 > b^3$                       D.  $a > b - 1$

8. 若不等式  $x^2 - (a + 2)x + 2a \leq 0$  对任意的  $x \in [-1, 1]$  恒成立，则  $a$  的取值范围是（ ）

- A.  $[-1, 1]$                       B.  $[-1, +\infty)$                       C.  $[-1, 2]$                       D.  $(-\infty, -1]$

9. 定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足： $f(2) = 0$ ，且对任意的  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$  ( $x_1 \neq x_2$ )，都有

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ ，则不等式  $xf(x) > 0$  的解集是（ ）

- A.  $(-2, 0)$                       B.  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



C.  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

D.  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10. 已知函数  $f(x) = ax^2 + bx + c, a > b > c, a + b + c = 0$ , 集合  $A = \{m \mid f(m) < 0\}$ , 则 ( )

A.  $\forall m \in A, f(m+3) > 0$

B.  $\forall m \in A, f(m+3) < 0$

C.  $\exists m \in A, f(m+3) = 0$

D.  $\exists m \in A, f(m+3) < 0$

**第二部分 (非选择题共 110 分)**

**二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。**

11. 函数  $f(x) = \sqrt{x-1}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

12. 设  $a \in \mathbf{R}, M = 2a(a-2), N = (a+1)(a-3)$ , 则  $M$  与  $N$  的大小关系是  $M$  \_\_\_\_\_  $N$ .

13. 函数  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x - \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$  则  $f(f(-1)) =$  \_\_\_\_\_; 不等式  $f(x) > 0$  的解集为\_\_\_\_\_.

14. 定义域相同, 值域相同, 但对应关系不同的两个函数可以是  $f(x) =$  \_\_\_\_\_,  $g(x) =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 若  $f(x)$  满足: 对任意的  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $f(x_1) = f(x_2)$  时, 总有  $x_1 = x_2$  成立, 则称  $f(x)$  为单函数. 给出下列四个结论:

(1)  $f(x) = |x|$  不是单函数;

(2)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  是单函数;

(3) 若  $f(x)$  为单函数, 则  $f(x)$  在定义域上一定是单调函数;

(4) 若  $f(x)$  为单函数, 则对任意的  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 总有  $f(x_1) \neq f(x_2)$  成立. 其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

**三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。**

16. (本小题 14 分)

已知函数  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ .

(I) 求不等式  $f(x) \geq 0$  的解集;

(II) 求  $f(x)$  在区间  $[-2, 2]$  上的最大值与最小值;

(III) 设  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 求证:  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ .

17. (本小题 13 分)

已知集合  $A = \{x \mid 0 < x < 2\}, B = \{x \mid 2x - 1 > a\}$ .

(I) 当  $a = 1$  时, 求  $A \cup B, (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$ ;

(II) 再从条件 (1)、条件 (2) 这两个条件中选择一个作为已知, 求  $a$  的取值范围.

条件 (1):  $B \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} A)$ ;



条件 (2): “ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件.

注: 如果选择条件 (1) 和条件 (2) 分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - k, k \in \mathbf{R}$ .

(I) 判断  $f(x)$  的奇偶性, 并说明理由;

(II) 用单调性定义证明  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减;

(III) 若  $f(x)$  的图象与  $x$  轴交于  $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$  两点, 且  $x_1 < x_2 < \frac{1}{2}$ , 求  $k$  的取值范围.

19. (本小题 13 分)

已知经过  $x(x \in \mathbf{N}^*)$  年某汽车的总花费由购车费、维修费和其他费用组成, 其中购车费用是 22.5 万元, 使用  $x(x \in \mathbf{N}^*)$  年的维修费为  $x(0.2+0.1x)$  万元, 且每年的其他费用为 0.8 万元.

(I) 求经过 2 年该车的总花费为多少万元;

(II) 设经过  $x(x \in \mathbf{N}^*)$  年该车的年平均花费为  $y$  万元, 写出  $y$  关于  $x(x \in \mathbf{N}^*)$  的函数解析式, 并求  $y$  的最小值.

20. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = x+1, g(x) = (x-1)^2$ . 令函数  $M(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq g(x), \\ g(x), & f(x) > g(x). \end{cases}$

(I) 若  $M(x) = 2$ , 求  $x$  的值;

(II) 若函数  $y = h(x)$  的图象关于点  $P(0,1)$  成中心对称图形, 当  $x \geq 0$  时,  $h(x) = M(x)$ .

(1) 直接写出当  $x < 0$  时,  $h(x)$  的解析式;

(2) 对任意的  $x \in [a, a+1], |h(x)| \leq 2$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

21. (本小题 15 分)

若含有 4 个元素的数集  $A = \{a, b, c, d\}$  能满足  $ab - cd = 1$ , 则称数集  $A$  具有性质  $J$ . 给定集合

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, C = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 1 \leq x \leq 4n, n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*\}$ .

(I) 写出一个具有性质  $J$  的集合, 并说明理由;

(II) 若  $A = \{a, b, c, d\}, A \subseteq B$ , 证明: 集合  $A$  和  $\complement_B A$  不可能都具有性质  $J$ ;

(III) 若集合  $A_i (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbf{N}^*)$  有 4 个元素,  $A_i \subseteq C$ , 且  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = C, A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$ , 证明:  $A_1, A_2, \dots, A_n$  这  $n$  个集合不可能同时都具有性质  $J$ .