

北京市育才学校九年级数学学科期中考试试卷

一. 选择题 (每小题 2 分, 共 16 分)

1. 一副扑克牌中有“黑桃”、“红桃”、“梅花”、“方块”四种花色, 其中外轮廓既是轴对称图形, 又是中心对称图形的是 ()



A



B



C



D

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 下列函数的图象经过点 $(0, 0)$ 的是 ()

A. $y=x+1$

B. $y=x^2$

C. $y=(x-1)^2$

D. $y=\frac{1}{x}$

3. 一元二次方程 $2x^2+x-3=0$ 的根的情况是 ()

A. 没有实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 有两个不相等的实数根

D. 不确定



4. 将抛物线 $y=x^2$ 向上平移 5 个单位长度得到的抛物线是 ()

A. $y=x^2+5$

B. $y=x^2-5$

C. $y=(x+5)^2$

D. $y=(x-5)^2$

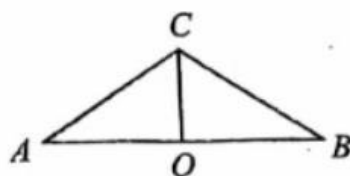
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $CA=CB$, CO 平分 $\angle ACB$, 交 AB 于点 O . 以点 C 为圆心, CO 长为半径作 $\odot C$, 则 $\odot C$ 与 AB 的位置关系是 ()


A. 相交

B. 相切

C. 相离

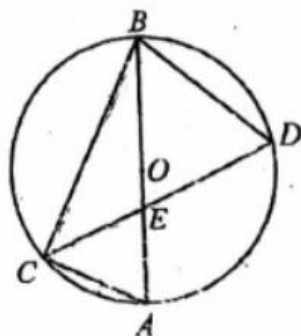
D. 不确定



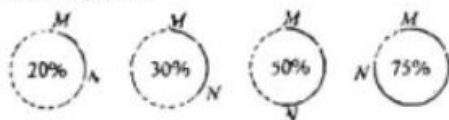
6. 学习了旋转后, 小航将图案  绕某点以相同角度 α 连续旋转若干次, 设计出一个外轮廓为正五边形的图案 (如图), 则 α 不可能为 ()

A. 36° B. 72° C. 144° D. 216° 

7. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 交 AB 于点 E , $CA=CE$, 若 $\angle ACE=50^\circ$, 则 $\angle CBD$ 的大小为 ()

A. 65° B. 70° C. 75° D. 82.5° 

8. 计算机处理任务时，经常会以圆形进度条的形式显示任务完成的百分比.下面是同一个任务进行到不同阶段时进度条的示意图：



当任务完成的百分比为 x 时，线段 MN 的长度记为 $d(x)$. 下列描述正确的是 ()

- A. 当 $x_1 < x_2$ 时， $d(x_1) < d(x_2)$ B. 当 $d(x_1) < d(x_2)$ 时， $x_1 < x_2$
 C. 当 $x_1 = 2x_2$ 时， $d(x_1) = 2d(x_2)$ D. 当 $x_1 + x_2 = 1$ 时， $d(x_1) = d(x_2)$



二、填空题 (每小题 2 分，共 16 分)

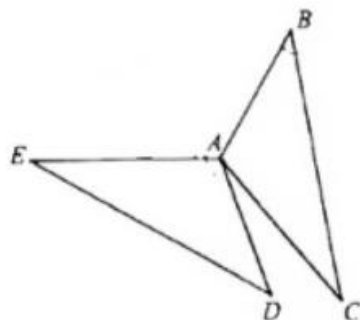
9. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(2, -3)$ 关于原点 O 对称的点的坐标是_____.

10. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有一个根为 1，则 m 的值为_____.

11. 已知 $\odot O$ 的半径为 5，若点 P 在 $\odot O$ 内，则 OP _____ 5 (填 “>”，“=” 或 “<”).

12. 写出一个开口向上，并且与 y 轴交于点 $(0, 1)$ 的抛物线的解析式_____.

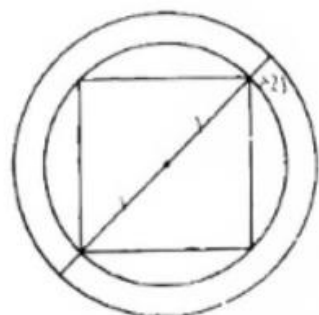
13. 2024 年 6 月 27 日，“探秘古蜀文明——三星堆与金沙”展览在北京大运河博物馆开幕. 据了解，开幕第一周的参观人数为 4 万人，第三周的参观人数增加到 5.76 万人. 设参观人数的周平均增长率为 x ，则可列方程为_____.



14. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle ADE$.

若 $\angle DAE = 110^\circ$ ， $\angle B = 40^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为_____.

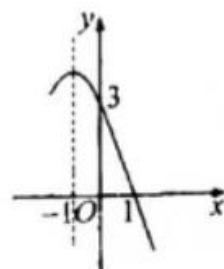
15. 斛是中国古代的一种量器. 据《汉书·律历志》记载：“斛底，方而圆 (huán) 其外，旁有甃 (tiāo) 焉”，意思是说：“斛的底面为正方形外接一个圆，此圆外是一个同心圆”. 如图所示. 问题：现有一斛，其底面的外圆直径为两尺五寸 (即 2.5 尺)，“甃旁”为两寸五分 (即两同心圆的外圆与内圆的半径之差为 0.25 尺)，则此斛底面的正方形的边长为_____尺.



16. 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示，以下四个结论：

- ① $c < 0$ ； ② $2a - b = 0$ ； ③ $4a - 2b + c > 0$ ；
 ④ 关于 x 的不等式 $ax^2 + (b - c)x > 0$ 的解集是 $-5 < x < 0$.

其中正确结论的序号的是_____.



三、解答题(共 68 分, 17—22 题, 每题 5 分, 23—26 题, 每题 6 分, 27—28 题, 每题 7 分)

17. 解方程: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

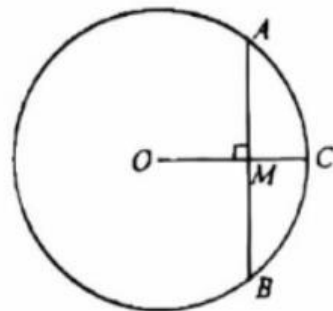
18. 已知 t 是方程 $2x^2 - 7x - 1 = 0$ 的一个根, 求代数式 $t(2t - 7) + 4$ 的值.



19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = a(x - 3)^2 - 1$ 经过点 $(2, 2)$.

- (1) 该抛物线的顶点坐标为_____;
- (2) 求该抛物线的表达式;
- (3) 将该抛物线向上平移_____个单位后, 所得抛物线与 x 轴只有一个公共点.

20. 如图, AB 为 $\odot O$ 的弦, $OC \perp AB$ 于点 M , 交 $\odot O$ 于点 C . 若 $\odot O$ 的半径为 10, $OM:MC = 3:2$, 求 AB 的长.



21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2-m)x + 1-m = 0$.

(1) 求证: 方程总有两个实数根;

(2) 若 $m < 0$, 且此方程的两个实数根的差为 3, 求 m 的值.



22. 下面是小毓设计的“作圆的内接等腰直角三角形”的尺规作图过程.

已知: $\odot O$.

求作: $\odot O$ 的内接等腰直角三角形 ABC .

作法: 如图,

①作直径 AB ;

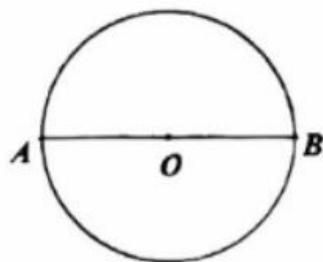
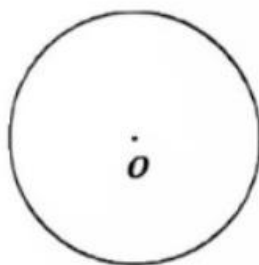
②分别以点 A, B 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧,

两弧交于点 M ;

③作直线 MO 交 $\odot O$ 于点 C, D ;

④连接 AC, BC .

所以 $\triangle ABC$ 就是所求作的等腰直角三角形.



根据小毓设计的尺规作图过程, 解决下面的问题:

(1) 使用直尺和圆规, 补全图形 (保留作图痕迹);

(2) 完成下面的证明.

证明: 连接 MA, MB .

$$\because MA=MB, OA=OB,$$

$\therefore MO$ 是 AB 的垂直平分线.

$$\therefore AC = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$\because AB$ 是直径,

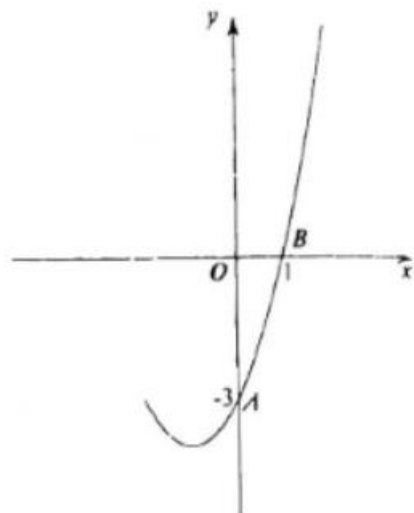
$$\therefore \angle ACB = \underline{\hspace{2cm}} \left(\underline{\hspace{4cm}} \right) \text{ (填写推理依据).}$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

23. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -ax^2 + 2x + c$ 的部分图象经过点 $A(0, -3)$ ， $B(1, 0)$ 。

(1) 求该抛物线的解析式；

(2) 结合函数图象，直接写出 $y < 0$ 时， x 的取值范围。



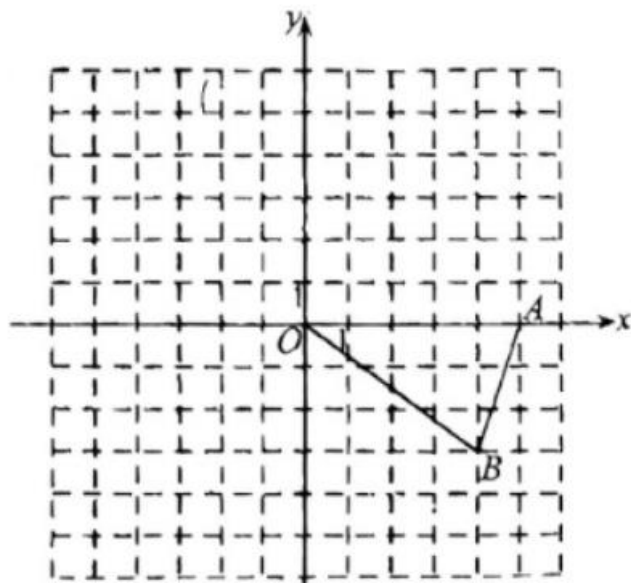
24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle OAB$ 的顶点坐标分别为 $O(0, 0)$ ， $A(5, 0)$ ，

$B(4, -3)$ ，将 $\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle OA'B'$ ，点 A 旋转后的对应点为 A' 。

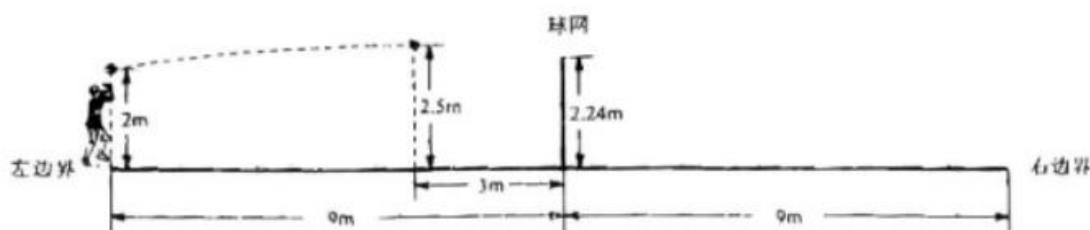
(1) 画出旋转后的图形 $\triangle OA'B'$ ；

(2) 直接写出点 B' 的坐标；

(3) 求点 B 经过的路径 $\widehat{BB'}$ 的长 (结果保留 π)。



25. 如图, 排球运动场的场地长 18m, 球网高度 2.24m, 球网在场地中央, 距离球场左、右边界均为 9m. 一名球员在场地左侧边界练习发球, 排球的飞行路线可以看作是对称轴垂直于水平面的抛物线的一部分. 某次发球, 排球从左侧边界的正上方发出, 击球点的高度为 2m, 当排球飞行到距离球网 3m 时达到最大高度 2.5m. 小毓建立了平面直角坐标系 xOy (1 个单位长度表示 1m), 求得该抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{72}x^2 + \frac{5}{2}$.



根据以上信息, 回答下列问题:

- (1) 画出小毓建立的平面直角坐标系;
- (2) 判断此次发球是否有效, 并说明理由. (注: 排球过球网且落在对方场地内为发球有效)



26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $(1, m)$ 和 $(2, n)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx$ 上.

- (1) 若 $m=0$, 直接写出该抛物线的对称轴: 直线_____;
- (2) 若 $mn < 0$, 设抛物线的对称轴为直线 $x = t$,
 - ① 直接写出 t 的取值范围_____;
 - ② 已知点 $(-1, y_1)$, $(\frac{3}{2}, y_2)$, $(3, y_3)$ 在该抛物线上. 比较 y_1, y_2, y_3 的大小, 并说明理由.

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=1$, 延长 CB , 并将射线 CB 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到射线 l , D 为射线 l 上一动点, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $BE=CD$. 连接 DE , 过点 A 作 $AM \perp DE$ 于 M .

(1) 依题意补全图1, 并用等式表示线段 DM 与 ME 之间的数量关系, 并证明;

(2) 取 BE 的中点 N , 连接 AN , CD 的长为_____ (请将条件补充完整),

求证: $AN = \frac{1}{2}DE$.

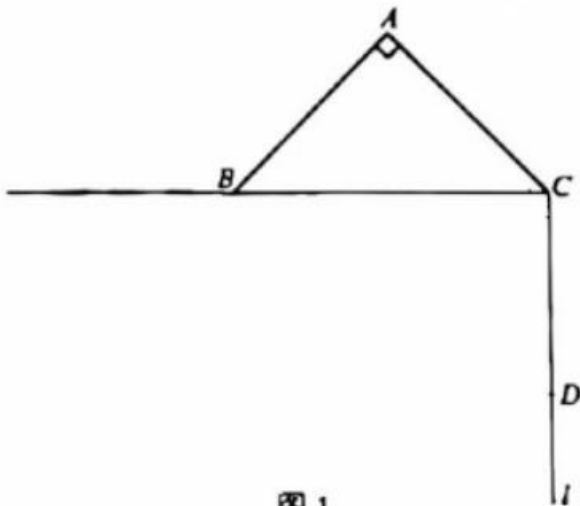
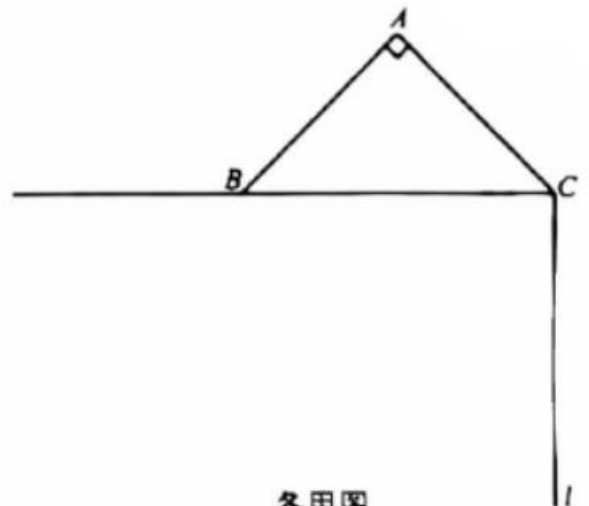


图 1



备用图



28. 对于平面直角坐标系 xOy 中第一象限内的点 $P(x, y)$ 和图形 W , 给出如下定义: 过点 P 作 x 轴和 y 轴的垂线, 垂足分别为 M, N , 若图形 W 中的任意一点 $Q(a, b)$ 满足 $a \leq x$ 且 $b \leq y$, 则称四边形 $PMON$ 是图形 W 的一个覆盖, 点 P 为这个覆盖的一个特征点.

例如: 已知 $A(1, 2), B(3, 1)$, 则点 $P(5, 4)$ 为线段 AB 的一个覆盖的特征点.

(1) 已知: $A(1, 2), B(3, 1), C(2, 3)$.

① 在 $P_1(1, 3), P_2(3, 3), P_3(4, 4)$ 中, _____ 是 $\triangle ABC$ 的覆盖的特征点;

② 若在直线 $y = mx + 6 (m \neq 0)$ 上存在 $\triangle ABC$ 的覆盖的特征点, 求 m 的取值范围.

(2) 以点 $D(3, 4)$ 为圆心, 1 为半径作圆, 在抛物线 $y = ax^2 - 5ax + 4 (a \neq 0)$ 上存在 $\odot D$ 的覆盖的特征点, 直接写出 a 的取值范围.

