

初三数学期中考试试卷

命题人： 曲莹 审核人： 杨丽敏、袁博

考查目标

1. 知识：人教版九年级上册《一元二次方程》、《二次函数》、《旋转》、《圆》的全部内容。
2. 能力：数学运算能力，逻辑推理能力，阅读理解能力，实际应用能力，数形结合能力，分类讨论能力。

学业成绩



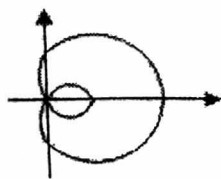
考生须知

1. 本试卷分为第 I 卷、第 II 卷和答题卡，共 18 页；其中第 I 卷 2 页，第 II 卷 8 页，答题卡 8 页。全卷共三大题，28 道小题。
2. 本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟。
3. 在第 I 卷、第 II 卷指定位置和答题卡的密封线内准确填写班级、姓名、考号、座位号。
4. 考试结束，将答题卡交回。

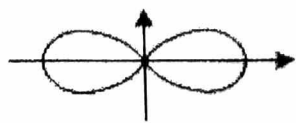
第 I 卷（选择题 共 16 分）

一、选择题（以下每题只有一个正确的选项，每小题 2 分，共 16 分）

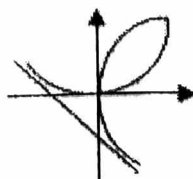
1. 数学世界奇妙无穷，其中曲线是微分几何的研究对象之一，下列平面直角坐标系中的数学曲线既是轴对称图形，又是中心对称图形的是



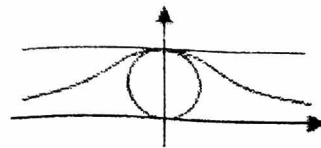
A.



B.



C.



D.

2. 抛物线 $y = -2(x-2)^2 - 5$ 的顶点坐标是
 A. (2, -5) B. (2, 5) C. (-2, -5) D. (-2, 5)
3. 若关于 x 的方程 $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 的一个根是 -1 , 则 a 的值是
 A. 1 B. -1 C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

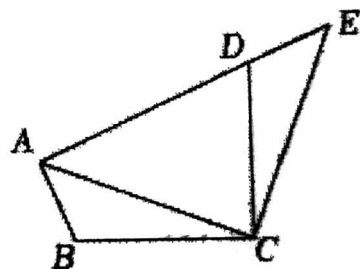
4. 下表是用计算器探索函数 $y = x^2 + 5x - 3$ 时所得的数值:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	-3	-1.69	-0.25	1.31	3

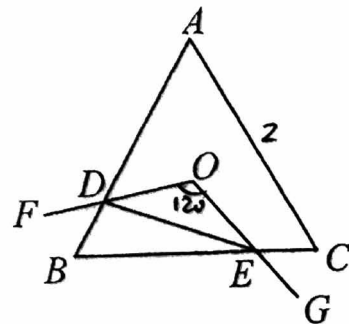


则方程 $x^2 + 5x - 3 = 0$ 的一个解 x 的取值范围为

- A. $0 < x < 0.25$ B. $0.25 < x < 0.5$ C. $0.5 < x < 0.75$ D. $0.75 < x < 1$
5. 已知圆锥的底面半径为 3 cm, 母线长为 6 cm, 则圆锥的侧面积是
 A. $18\pi \text{ cm}^2$ B. $27\pi \text{ cm}^2$ C. 18 cm^2 D. 27 cm^2
6. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle EDC$. 若点 A, D, E 在同一条直线上, $\angle ACB = 30^\circ$, 则 $\angle ADC$ 的度数是



- A. 60° B. 65°
 C. 70° D. 75°
7. 在一次聚会上, 每两个人之间都互相赠送了一份礼物, 若一共送出了 90 份礼物, 则参加聚会的人有
 A. 9 人 B. 10 人 C. 11 人 D. 12 人
8. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的中心, $\angle FOG = 120^\circ$, 绕点 O 旋转 $\angle FOG$, 分别交线段 AB , BC 于 D, E 两点, 连接 DE , 给出下列四个结论:



- ① $OD = OE$;
 ② $\triangle DOE$ 的面积等于 $\triangle BDE$ 的面积;
 ③ 四边形 $DBEO$ 的面积始终保持不变;
 ④ $\triangle BDE$ 的周长的最小值为 3.

上述结论中, 所有正确结论的序号是

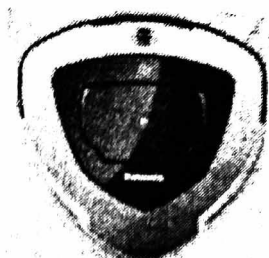
- A. ①③ B. ①②④ C. ②③④ D. ①③④

第II卷（非选择题 共84分）

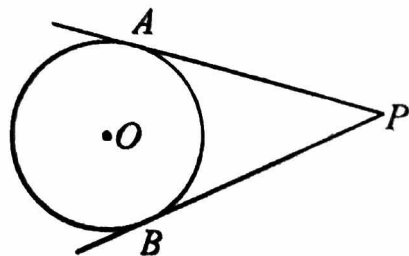
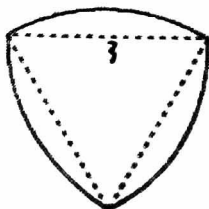


二、填空题（共16分，每题2分）

9. 点 $(-1, 2)$ 关于原点对称的点坐标是_____.
10. 写出一个开口向上, 并且与 y 轴交于点 $(0, 1)$ 的抛物线的解析式_____.
11. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - a = 0$ 有两个相等的实数根, 则 a 的值是_____.
12. 把抛物线 $y = x^2 - 1$ 向左平移1个单位, 然后向上平移3个单位, 则平移后抛物线的解析式为_____.
13. 如图, 某品牌扫地机器人的形状是“莱洛三角形”, 它的三“边”分别是以等边三角形的三个顶点为圆心, 边长为半径的三段圆弧. 若该等边三角形的边长为3, 则这个“莱洛三角形”的周长是_____.



第13题图



第15题图

14. 已知二次函数 $y = x^2 - x - 1$, 当 $x < m$ 时, y 随 x 的增大而减小, 则 m 的取值范围是_____.
15. 如图, PA, PB 分别切 $\odot O$ 于 A, B 两点, $\angle P = 40^\circ$, 点 C 是 $\odot O$ 上一点, 则 $\angle ACB$ 的度数为_____.
16. 2024年4月1日, 北京二中喜迎300年华诞. 小元和小聪两名同学合作制作四个主题为“春”“夏”“秋”“冬”的书签, 为校庆献礼. 每个书签都先由小元进行绘画, 然后再由小聪题字. 两位同学完成每个书签各自的工序需要的时间(单位: 分钟)如下表所示:

	春	夏	秋	冬
小元	9	5	6	8
小聪	7	7	9	3

- (1) 如果按照春→夏→秋→冬的顺序制作, 两位同学合作完成这四个书签的总时长最少为_____分钟;
- (2) 若想用最短的时间完成这四个书签的制作, 制作的顺序应该是_____.

三、解答题 (共 68 分, 其中第 17-22 题每题 5 分, 第 23-26 题每题 6 分, 第 27-28 题每题 7 分)

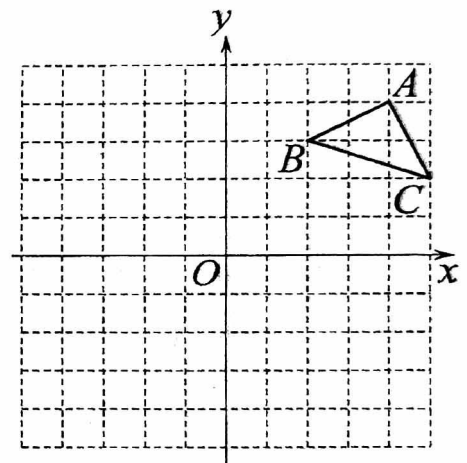
17. 解方程: $x^2 - 2x - 8 = 0$

18. 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(4, 4)$, $B(2, 3)$, $C(5, 2)$.

- (1) ①以点 B 为旋转中心, 画出将 $\triangle ABC$ 按顺时针方向旋转 90° 后的 $\triangle A_1BC_1$;
 ②以原点 O 为旋转中心, 画出将 $\triangle ABC$ 按逆时针方向旋转 180° 后的 $\triangle A_2B_2C_2$;

(2) 在 (1) 的条件下, $\triangle A_2B_2C_2$ 可以由 $\triangle A_1BC_1$ 绕某点按顺时针方向旋转得到, 则该点坐标为 _____, 旋转角的度数为 _____;

(3) $\triangle ABC$ 的外接圆半径长 _____.



19. 如图 1 所示, 圆形拱门屏风是中国古代家庭中常见的装饰隔断, 既美观又实用, 彰显出中国元素的韵味. 图 2 是一款拱门的示意图, 其中拱门最下端 $AB=18$ 分米, C 为 AB 中点, D 为拱门最高点, 圆心 O 在线段 CD 上, $CD=27$ 分米, 求拱门所在圆半径的长.

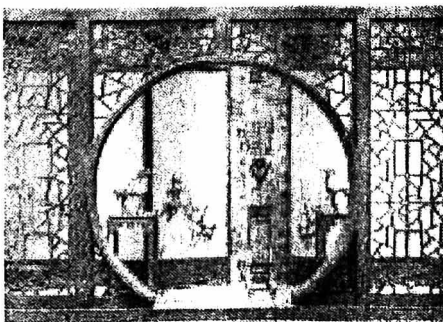


图 1

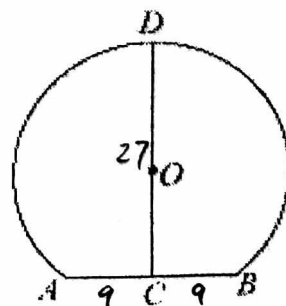


图 2

20. 下面是小宁设计的“作三角形的高”的尺规作图过程.

已知: $\triangle ABC$.

求作: $AD \perp BC$, 垂足为 D .

作法: 如图所示,

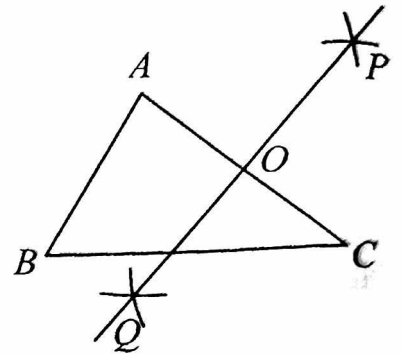
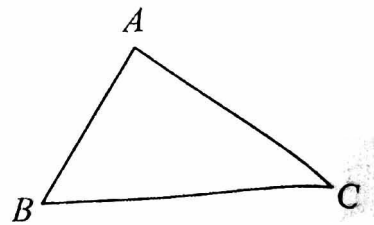
① 分别以点 A 和点 C 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径

作弧, 两弧相交于 P, Q 两点;

② 作直线 PQ , 交 AC 于点 O ;

③ 以点 O 为圆心, OA 长为半径作圆, 交线段 BC 于点 D (点 D 不与点 C 重合), 连接 AD .

所以线段 AD 就是所求作的高.



根据小宁设计的尺规作图过程, 解决问题:

(1) 使用直尺和圆规, 补全图形; (保留作图痕迹)

(2) 完成下面的证明.

证明: $\because AP=CP, AQ=$ _____ ① _____,

\therefore 点 P, Q 都在线段 AC 的垂直平分线上,

\therefore 直线 PQ 为线段 AC 的垂直平分线,

$\therefore O$ 为 AC 中点.

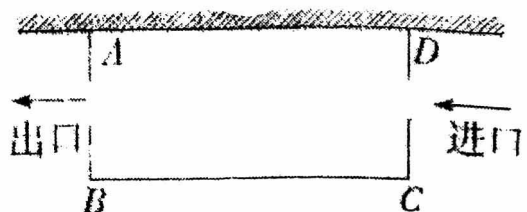
$\because AC$ 为直径, $\odot O$ 与线段 BC 交于点 D ,

$\therefore \angle ADC =$ _____ ② _____ $^\circ$. (_____ ③ _____) (填推理的依据)

$\therefore AD \perp BC$.



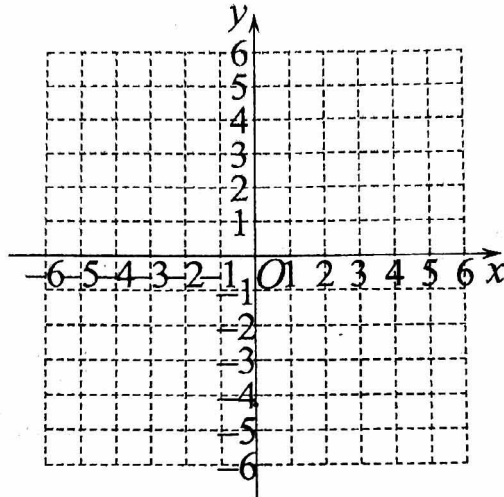
21. 第十七届北京国际茶业及茶艺博览会于 2024 年 9 月 6 日至 9 日在北京全国农业展览馆举办, 展览馆工作人员利用一边靠墙 (墙长 26 米) 的空旷场地为提前到场的观众设立面积为 300 平方米的封闭型长方形等候区. 如图, 为了方便观众进出, 在两边空出两个宽各为 1 米的出入口, 共用去围栏绳 48 米. 请问, 工作人员围成的这个长方形的相邻两边长分别是多少米?



22. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的 y 与 x 的部分对应值如表:

x	...	-3	-1	1	3	...
y	...	-3	0	1	0	...

- (1) 求这个二次函数表达式;
- (2) 在平面直角坐标系中画出这个函数图象;
- (3) 当 x 的取值范围为_____时, $y > -3$.

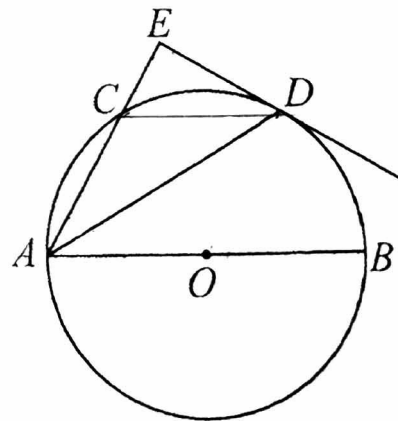


23. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (4-m)x + 3-m = 0$.

- (1) 求证: 该方程总有两个实数根;
- (2) 若该方程只有一个实数根为负数, 求 m 的取值范围.

24. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, D 是弧 BC 的中点, 过点 D 作 AC 的垂线, 交 AC 的延长线于点 E , 连接 AD .

- (1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 连接 CD , 若 $\angle CDA = 30^\circ$, $AC = 2$, 求 CE 的长.



25. 2024年巴黎奥运会8月6日单人10米决赛中，全红婵以425.60分的总分夺得金牌，陈芋汐获得银牌。在精彩的比赛过程中，全红婵选择了一个极具难度的207C（向后翻腾三周半抱膝）。如图2所示，建立平面直角坐标系 xOy 。如果她从点A起跳后的运动路线可以看作抛物线的一部分，从起跳到入水的过程中，她的竖直高度 y （单位：米）与水平距离 x （单位：米）近似满足二次函数关系。

- (1) 在平时训练完成一次跳水动作时，全红婵的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如下表：

水平距离 x/m	3	h	4	4.5
竖直高度 y/m	10	11.25	10	6.25

根据表中数据，直接写出 h 的值为_____，满足的二次函数关系式为：_____；

- (2) 在(1)的条件下，记全红婵训练时入水点的水平距离为 d_1 ；比赛当天的某一次跳水中，全红婵的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足二次函数关系： $y = -5x^2 + 40x - 68$ ，记比赛当天入水点的水平距离为 d_2 ，判断 d_1 与 d_2 的大小关系，并说明理由。



图1

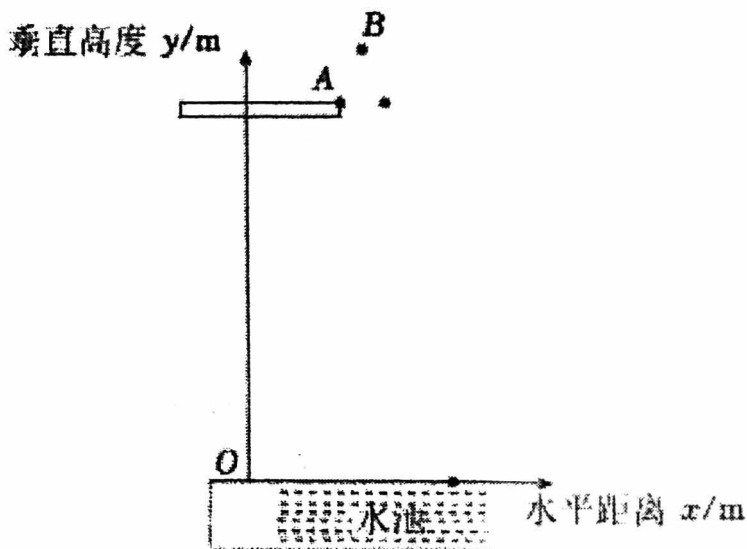


图2

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 2(a+1)x + 3$ ($a > 0$) 的对称轴为直线 $x = t$.

(1) $t =$ _____ (用含 a 的式子表示);

(2) 已知点 $(-\frac{2}{a}, y_1)$, $(\frac{5}{a}, y_2)$ 在抛物线上, 若 $y_1 = y_2$, 求出 a 的值;

(3) 已知点 $(-2, y_1)$, $(1, y_2)$, $(4 + \frac{3}{a}, y_3)$ 在抛物线上, 比较 y_1, y_2, y_3 的大小, 并说明理由.

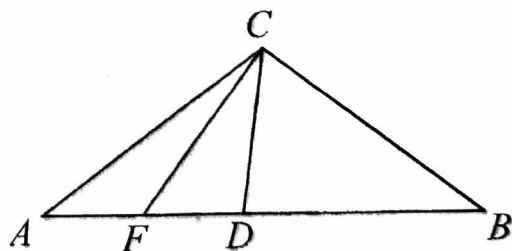


27. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = \alpha$, $AC = BC$, 点 D 在 AB 上 (不与 A, B 重合), 取 AD 的中点 F , 连结 CD, CF , 将线段 CD 绕点 C 顺时针旋转 $180^\circ - \alpha$ 得到线段 CE , 连结 AE, BE .

(1) 依题意, 请补全图形;

(2) 判断 BE 与 CF 的数量关系, 并证明;

(3) 当 $\alpha = 90^\circ$, $AC = BC = 4$ 时, 设 BE 与 CF 相交于点 H , 则点 D 在 AB 上运动的过程中, 线段 AH 的最小值为 _____.



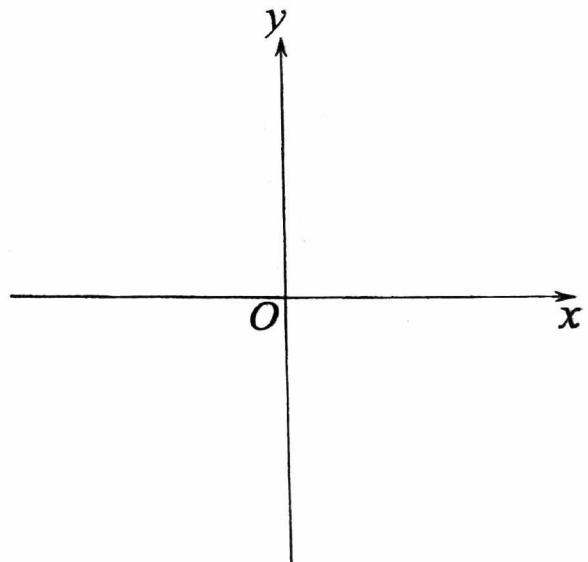
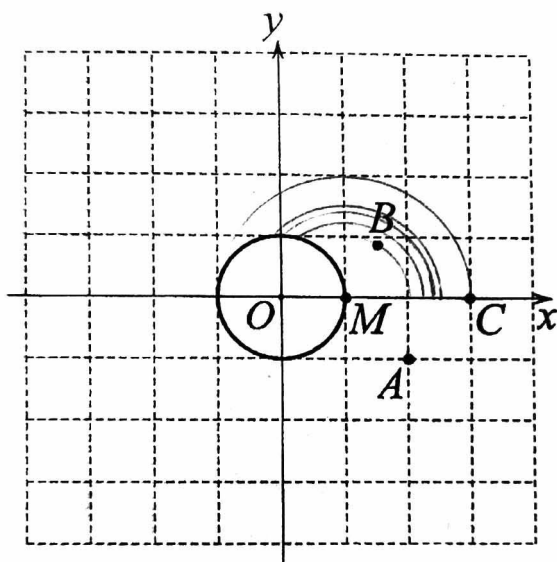
28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $\odot O$ 的半径为 r , 对于 $\odot O$ 外一点 P , 给出如下定义: 若 $\odot O$ 上存在点 M , 使点 P 绕点 M 逆时针旋转 120° 后的对应点 Q 落在 $\odot O$ 的内部或 $\odot O$ 上, 则称点 P 是点 M 关于 $\odot O$ 的“逆转点”.

(1) 如图, 当 $r=1$, $M(1, 0)$ 时,

①点 $A(2, -1)$, $B(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C(3, 0)$ 中, 点_____是点 M 关于 $\odot O$ 的“逆转点”;

②若点 P 是点 M 关于 $\odot O$ 的“逆转点”, 则点 P 的横坐标的最大值是_____;

(2) 当 $r=\sqrt{3}$ 时, 已知点 P 是直线 $y=\sqrt{3}x+3+\sqrt{3}$ 上一点, 记点 P 的横坐标为 t , 当点 P 是点 M 关于 $\odot O$ 的“逆转点”时, 求出 t 的取值范围.



备用图

