北京市十一学校 2024-2025 学年第 5 学段常规初二年级

数学学科初中数学II课程教与学诊断（2024.10）

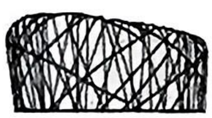
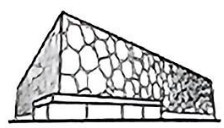
满分：100 分　　时间：90 分钟　　命题人：王佳颖　鲁思坤

注意事项：

1. 本试卷共 4 页，共三道大题，26 道小题.
2. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效.

一、选择题（共 16 分，每小题 2 分）

1. 2024 年 7 月 27 日，北京中轴线申遗成功. 北京中轴线北起钟鼓楼，南至永定门，贯穿老城南北，直线距离长约 7.8 公里，是我国现存最完整、最古老的中轴线. 这条中轴线一路向北延伸，鸟巢、冰立方为这条古老的中轴线注入了新的生命力，它正向世界述说着这座千年古都的时代新貌，下列关于中轴线建筑的简笔画中，是轴对称图形的是 A

A. 　B. 　C. 　D. 

2. 下列运算正确的是 C

A. $m^2+m^3=2m^5$　　　　B. $m^2\cdot m^3=m^6$

C. $(-m^3)^2=m^6$　　　　D. $m(-m+2)=m^2+2m$

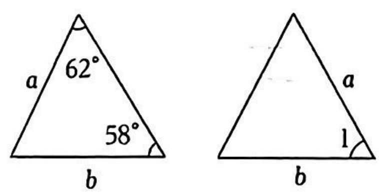
3. 如图的两个三角形全等，则 $\angle 1$ 的度数为 B

A. $62°$

B　$60°$

C. $58°$

D. $50°$



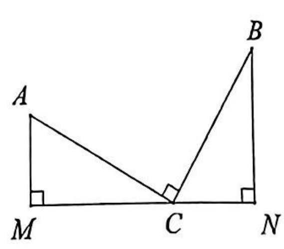
4. 如图，$\angle ACB$=90°，$CA=CB$，分别过点 A，B 作过点 C 的直线的垂线 AM，BN. 若 AM=3 cm，CM=5 cm，则 MN 的长为 B

A. 7 cm

B. 8 cm

C. 9 cm

D. 10 cm



5．已知 $x-y=5$，则 x^2-y^2-10y 的值是 D

A．10　　　　B．15　　　　C．20　　　　D．25

6．在平面直角坐标系中，线段 AB 两端点的坐标分别为 A（-1，2）、B（2，-3）．作 AB 关于某直线的对称图形 $A'B'$．若 B'的坐标为（-2，-3），则 A'的坐标为 A

A．（1，2）　　B．（2，1）　　C．（1，-2）　　D．（-1，-2）

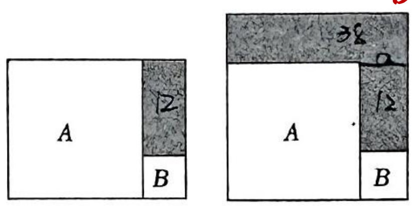
7．有两个正方形 A、B，将 A，B 并列放置后构造新的图形，分别得到长方形图甲与正方形图乙．若图甲、图乙中阴影的面积分别为 12 与 38，则正方形 B 的面积为 B

A．6

B．7

C．8

D．9

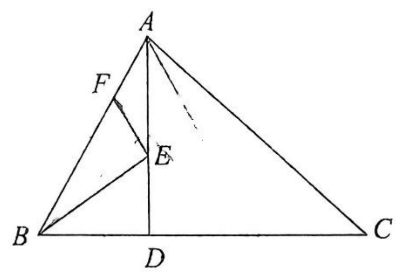


图甲　　　　图乙

8．如图，在△ABC 中，$\angle ABC=60°$，$AD\perp BC$ 于 D 点，AB=12，$AD=6\sqrt{3}$．若点 E、F 分别是线段 AD、线段 AB 上的动点，则 $BE+EF$ 的最小值是 B

A．6　　　　B．12

C．$6\sqrt{3}$　　　　D．$12\sqrt{3}$

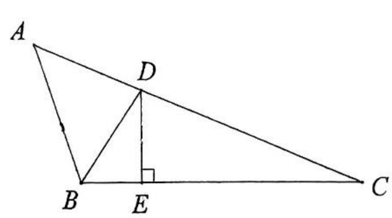


二、填空题（共 16 分，每小题 2 分）

9．若 $(x-4)^0=1$，则 x 的取值范围是 $x\neq4$．

10．若 $x^2+mxy+4y^2$ 是一个完全平方式，则 m= ±4

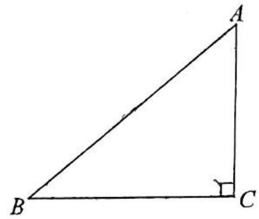
11．如图，在△ABC 中，BD 平分∠ABC，$DE\perp BC$．若 $AB=3$，$DE=2$，则 $S_{\triangle ABD}=$ 3．



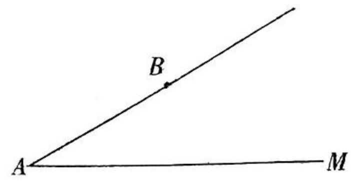
12．若 $x+m$ 与 $-x+2$ 的乘积中不含 x 的一次项，则实数 m 的值为 2．

13．已知 $x+y=5$，$x^2+y^2=13$，则 $(x-y)^2=$ 1．

14. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=40°$. 若 AB 边上有一点 D，使△BCD 是等腰三角形，则$\angle ADC$ 的度数为 80°或140° .



15. （1）如图，$\angle MAB=30°$，$AB=2.2$ cm. 点 C 在射线 AM 上，若想通过画图说明命题"有两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形全等"是假命题. 画图时选取的 BC 的长可以为 1.2 cm（精确到 0.1cm）.



（2）若$\angle MAB$为锐角，$AB=a$，点C在射线AM上，点B到射线AM的距离为d， $BC=x$，若△ABC的形状、大小是唯一确定的，则x的取值范围是 $x=d$或$x\geqslant d$

16. 在等边△ABC 中，M、N、P 分别是边 AB、BC、CA 上的点（不与端点重合），对于任意等边△ABC，下面四个结论中所有正确结论的序号是 ①③

①存在无数个△MNP 是等腰三角形；

②只存在一个△MNP 是等边三角形；

③存在无数个△MNP 是等腰直角三角形；

④存在一个△MNP 在所有△MNP 中面积最小.

三、解答题（共 68 分，17 题 12 分，18 题 9 分，19 题 5 分，20 题 5 分，21 题 6 分，22 题 5 分，23 题 5 分，24 题 7 分，25 题 7 分，26 题 7 分）

17. 计算：

（1）$x^3y\cdot(-2xy^2)^3$

解：原式$=-8x^6y^7$

（2）$(6x^3-x^2+3x)\div(-3x)$

解：原式$=-2x^2+\frac{1}{3}x-1$

（3）$(5x+3)(x-2)$

解：原式$=5x^2+7x-6$

18．分解因式：

（1）$4m^2-9n^2$

$=(2m+3n)(2m-3n)$

（2）$3ax^2+6axy+3ay^2$

$=3a(x+y)^2$

（3）x^2-5x-6

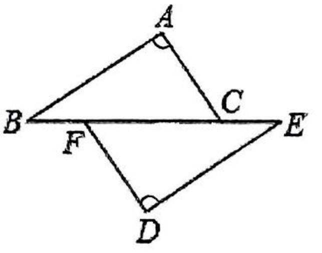
$=(x-6)(x+1)$

19．如图，点 B，F，C，E 在一条直线上，$BF=CE$，$AC=DF$

（1）在下列条件 ① $AB//DE$；② $\angle ACB=\angle DFE$；③ $AB=DE$ 中，只添加一个条件就可以证得$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，则所有可以添加的条件的序号是 ③

（2）根据已知及（1）中添加的一个条件，证明 $\angle A=\angle D$．

证明$\triangle ABC\cong\triangle DEF$(SSS)



20．已知 $x^2-4x-2=0$，求代数式 $(x+y)(x-y)-(2x-3)^2+y^2$ 的值．

解：原式$=-3x^2+12x-9$

$=-3(x^2-4x)-9$

将$x^2-4x=2$代入原式$=-3\times2-9=-15$

21．小明发现，任意一个直角三角形都可以分割成两个等腰三角形．

已知：在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$．

求作：线段 CD，使得线段 CD 将$\triangle ABC$ 分割成两个等腰三角形．

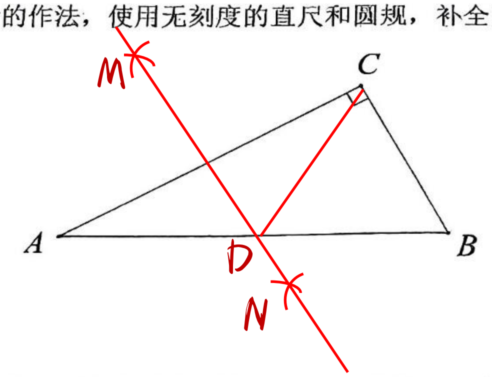
下面是小明设计的尺规作图的作法：

①作直角边 AC 的垂直平分线 MN，与斜边 AB 相交于点 D；②连接 CD．

则线段 CD 为所求．

…$AB=2.2$ cm，点 C 在射线 AM 上，若想通过画图说明命题“…

（1）请你按照小明设计的作法，使用无刻度的直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；



（2）完成下面的证明．

证明：∵直线 MN 是线段 AC 的垂直平分线，点 D 在直线 MN 上，

∴$DC=DA$．（垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等）（填推理的依据）

∴$\angle A=\angle$ ACD．

∵$\angle ACB=90°$，

∴$\angle BCD=90°-\angle ACD$．

$\angle B=90°-\angle$ A．

∴$\angle BCD=\angle B$．

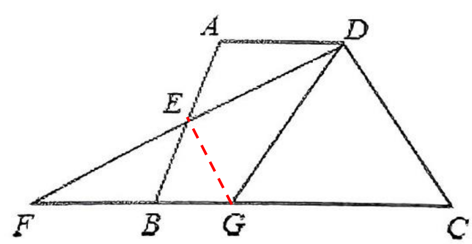
∴$DC=DB$．（等角对等边）（填推理的依据）

∴$\triangle DCB$ 和 $\triangle DCA$ 都是等腰三角形．

22．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，E 是 AB 的中点，连接 DE 并延长交 CB 的延长线于点 F，点 G 在边 BC 上，且 $\angle GDF=\angle ADF$．

（1）求证：$\triangle DGF$ 是等腰三角形；

（2）连接 EG，若 $EG=2$，$\angle DGC=60°$，求 DG 的长．



(1)证明∵$AD//BC$

∴$\angle F=\angle ADF$

∵$\angle GDF=\angle ADF$

∴$\angle F=\angle GDF$

∴$GF=GD$

∴$\triangle DGF$是等腰三角形

(2) ∵$GF=GD$，E是AB的中点

∴$\angle DEG=90°$

∵$AD//BC$，$\angle DGC=60°$，

∴$\angle ADG=\angle DGC=60°$，$\angle GDF=30°$

在$Rt\triangle DEG$中，$EG=2$，$\angle GDF=30°$

∴$DG=4$

【23初二·北京101中· 11月期中24题】

23．长方形窗户 $ABCD$（如图 1），是由上下两个长方形（长方形 $AEFD$ 和长方形 $EBCF$）的小窗户组成，在这两个小窗户上各安装了一个可以朝水平方向拉伸的遮阳帘，这两个遮阳帘的高度分别是 a 和 $2b$（即 $DF=a$，$BE=2b$），其中 $a>b>0$．当遮阳帘没有拉伸时（如图 1），若窗框的面积不计，则窗户的透光面积就是整个长方形窗户（即长方形 $ABCD$）的面积．

如图 2，上面窗户的遮阳帘水平向右拉伸 $2a$ 至 GH．当下面窗户的遮阳帘水平向左拉伸 $2b$ 时，恰好与 GH 在同一直线上（即点 G、H、P 在同一直线上）．

（1）求长方形窗户 $ABCD$ 的总面积；（用含 a、b 的代数式表示）

（2）如果上面窗户的遮阳帘拉伸至 $AG=\frac{2}{3}AD$，下面窗户的遮阳帘拉伸至 $CP=\frac{2}{5}BC$ 处时，窗户的透光面积恰好为长方形窗户 $ABCD$ 面积的一半，求 $\frac{a}{b}$．

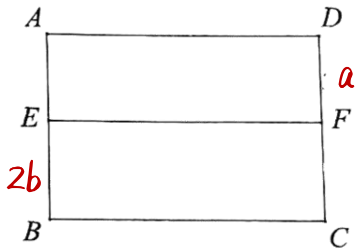


图 1

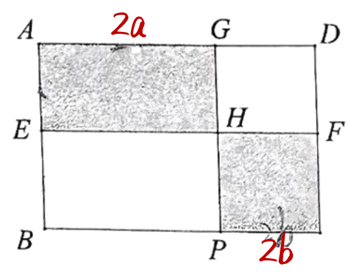


图 2

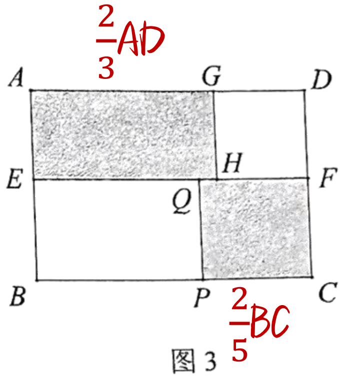


图 3

解：(1) $AD=2a+2b, AB=a+2b$

$\therefore S_{ABCD}=AD\cdot AB=(2a+2b)(a+2b)\quad =2a^2+6ab+4b^2$,

$\therefore$ 总面积是 $(2a^2+6ab+4b^2)$

(3) 设 $AD=BC=x$,

$\therefore GD=\frac{1}{3}x\quad BP=\frac{3}{5}x$

$\because$ 窗户的透光面积恰好为长方形窗户ABCD面积的一半

$\therefore \frac{1}{3}x\cdot a+\frac{3}{5}x\cdot 2b=\frac{1}{2}x(a+2b)$

解得：$\frac{a}{b}=\frac{6}{5}$

【24初二·北京四中· 9月统练28题】

24．小聪学习多项式研究了多项式值为 0 的问题，发现当 $mx+n=0$ 或 $px+q=0$ 时，多项式 $A=(mx+n)(px+q)=mpx^2+(mq+np)x+nq$ 的值为 0，把此时 x 的值称为多项式 A 的零点．

（1）已知多项式 $(3x+2)(x-3)$，则此多项式的零点为 $-\frac{2}{3}$或3

（2）已知多项式 $B=(x-2)(x+m)=x^2+(a-1)x-3a$ 有一个零点为 2，求多项式 B 的另一个零点；

24 题（3）订正：小聪继续研究 $(x-4)(x-2)$，$x(x-6)$ 及 $(x-\frac{5}{2})(x-\frac{7}{2})$ 等，发现在 x 轴上表示这些多项式零点的两个点关于直线 $x=3$ 对称，他把这些多项式称为"3-系多项式"．若多项式 $M=(2x-b)(cx-7c)=ax^2-(8a-4c)x+5b-4$ 是"3-系多项式"，则 $a=$ 2，$b=$ -2，$c=$ 1．

解：(2)将 $x=2$ 代入得

$B=4+2(a-1)-3a$

令 $B=0$，解得 $a=2$

将 $a=2$ 代入，得 $B=x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

令 $x+3=0$，得多项式B的另一个零点为：-3

(3) $\because M=(2x-b)(cx-7c)$

$\therefore$ M的两个零点分别是 $\frac{b}{2}$ 和7

根据"3-系多项式"的定义，有 $\frac{b}{2}+7=6$，化简得 $b=-2$

将 $b=-2$ 代入多项式M进行化简

得 $M=(2x+2)(cx-7c)=2c(x+1)(x-7)=2c(x^2-6x-7)=2cx^2-12cx-14c$

$\because M=ax^2-(8a-4c)x+5b-4=2cx^2-12cx-14c$

$\therefore 2c=a, 5b-4=-14=-14c$

$\therefore a=2, b=-2, c=1$

等腰

25. 如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，点 B，D 在直线 l 上，点 A，C 在直线 l 异侧，$AB=AC$，$\angle CBD=\angle CAD$．过点 A 作 $AH\perp BD$ 于点 H．

（1）依题意补全图形，

（2）若 $\angle BAC=\alpha$，求 $\angle DAH$ 的度数（用含 α 的代数式表示）；

（3）探究线段 BD、CD 和 DH 的数量关系，并证明；

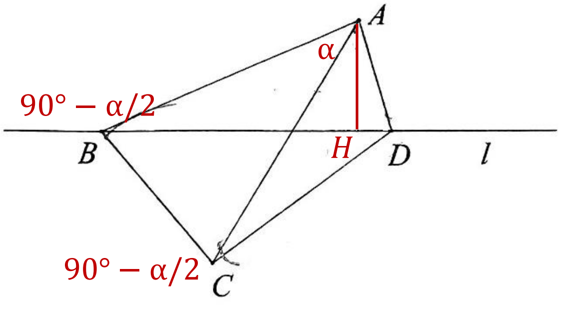
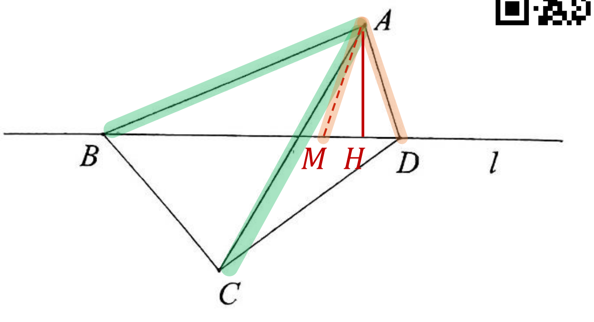


图 1



备用图

解：(2) $\because AB=AC, \angle BAC=\alpha$

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=90°-\dfrac{\alpha}{2}$

$\because \angle CBD=\angle CAD, \angle CBD+\angle BCA=\angle CAD+\angle BDA$（"8"字倒角）

$\therefore \angle BCA=\angle BDA=90°-\dfrac{\alpha}{2}$

$\because AH\perp BD$

$\therefore \angle DAH=90°-(90°-\dfrac{\alpha}{2})=\dfrac{\alpha}{2}$

(3)

在HB上截取MH=HD，连接AM

$\because AH\perp BD$

$\therefore AM=AD$

$\therefore \angle AMD=\angle ADM=90°-\dfrac{\alpha}{2}$

$\therefore \angle MAH=180°-(90°-\dfrac{\alpha}{2})-(90°-\dfrac{\alpha}{2})=\alpha$

$\therefore \angle BAC=\angle MAD=\alpha$

$\therefore \angle BAD-\angle BAC=\angle BAD-MAD$

即$\angle CAD=\angle BAM$

$\therefore \triangle CAD\cong\triangle BAM(SAS)$

$\therefore CD=BM$

$\because BD=BM+MD, MD=2DH$

$\therefore BD=CD+2DH$

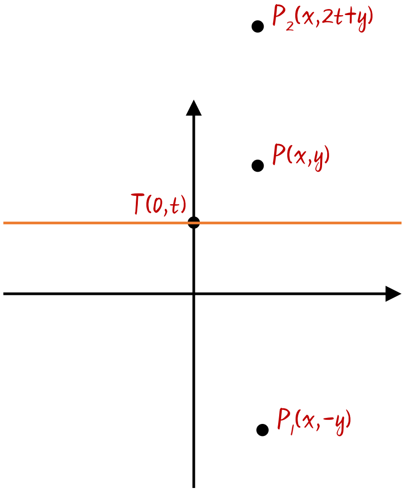
【22初二·北京首师大附中·11月期中28题】

26. 平面直角坐标系 xOy 中，过点 $T(0,t)$ 作平行于 x 轴的直线 l，若对于点 P，先将其关于 x 轴对称得到点 P_1，再将点 P_1 关于直线 l 对称得到点 P_2，若 P_2 在 x 轴和直线 l 之间（可以在 x 轴或者直线 l 上），我们就称点 P 为近 t 对称点.

（1）①在点 $Q_1(0,2)$，$Q_2(0,-2)$ 和 $Q_3(1,-3)$ 中，近 2 对称点是 Q_2、Q_3

②该坐标系所在平面上一条平行于 y 轴的线段长为 7 个单位，若该线段上存在近 2 对称点，直接写出该线段中点纵坐标 m 的取值范围是________；

（2）若存在底边为 4 的等腰直角三角形上每一点既是近 t 对称点又是近 $(t+1)$ 对称点，求 t 的取值范围.



解：(2) 设 $P(x,y)$，

$\therefore P_1(x,-y)$ $P_2(x,2t-y)$

$\because P_2$ 在 x 轴和直线 l 之间

$\therefore$ 当 $t>0$ 时，$0\leqslant 2t-y\leqslant t$，即 $t\leqslant y\leqslant 2t$

当 $t<0$ 时，$t\leqslant 2t-y\leqslant 0$，即 $2t\leqslant y\leqslant t$

$\because$ 线段长为 7，设线段中点纵坐标 m

$\therefore$ 线段的上端点纵坐标为 $m+\dfrac{7}{2}$

线段的下端点纵坐标为 $m-\dfrac{7}{2}$

由规律总结：$t\leqslant y\leqslant 2t$

$\because$ 线段上存在

$\therefore m+\dfrac{7}{2}\leqslant 4$ 或 $m-\dfrac{7}{2}\geqslant 2$

$\therefore m\leqslant \dfrac{1}{2}$ 或 $m\geqslant \dfrac{11}{2}$